

Flujo incompresible

Mario Storti

Centro Internacional de Métodos Numéricos
en Ingeniería - CIMEC

INTEC, (CONICET-UNL), Santa Fe, Argentina

mstorti@intec.unl.edu.ar

<http://www.cimec.org.ar/mstorti>

September 21, 2007

Contents

- **slide 3.....Definición de flujo compresible/incompresible**
- **slide 6.....Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible**
- **slide 13.....Formulación vorticidad-función de corriente**
- **slide 17.....Discretización en variables primitivas**
- **slide 44.....La condición de Brezzi-Babůska**

Definición de flujo compresible/incompresible

Definición de flujo compresible/incompresible

- Un flujo incompresible es aquel donde el fluido no se comprime, como es típicamente el caso de los líquidos
- También puede pasar que bajo ciertas condiciones un fluido que es compresible (como los gases en general) no manifiesta efectos de compresibilidad para un patrón o régimen de flujo en particular.
- En ese caso se le asigna a la propiedad de flujo compresible o incompresible al patrón de flujo. Para los fluidos compresibles, puede demostrarse que los efectos compresibles van con el número de Mach al cuadrado, es decir que la variación relativa de la densidad

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = O(M^2), \text{ con } M = \frac{u}{c} \quad (1)$$

es el número de Mach, u es la velocidad del fluido y c es la velocidad del sonido. Podemos decir entonces que el flujo es compresible si el número de Mach es menor que un cierto valor, digamos 0.1. Por ejemplo, un auto a 100 Km/h en atmósfera estándar posee un Mach de approx. 0.1, con lo cual en esas condiciones podemos considerar que el flujo es **incompresible**.

Definición de flujo compresible/incompresible (cont.)

Es de notar que si las variaciones de densidad son provocadas por otros efectos que no sean la presión mecánica como la dilatación térmica, expansión solutal (p.ej. salinidad), etc... entonces el patrón de flujo puede considerarse (con respecto a los efectos sobre los algoritmos numéricos) incompresible, aún si la densidad resulta no ser constante ni espacialmente ni en el tiempo. El término compresible/incompresible se aplica a las variaciones de densidad producidas exclusivamente por efecto de la presión.

Si bien en principio uno podría pensar que la incompresibilidad es una ventaja, ya que permite eliminar (en muchos casos) una variable (la densidad), desde el punto de vista numérico suele traer más problemas que soluciones.

Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible

Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

La primera es la “*ecuación de momento*”, mientras que la segunda es la “*ecuación de continuidad*” o “*balance de masa*”. Es importante notar que en el límite de “*flujo reptante*” o “*flujo de Stokes*” (es decir, despreciando el término convectivo), las ecuaciones resultantes son exactamente iguales a las de elasticidad lineal incompresible isotrópica, si reemplazamos el vector de velocidad por el de desplazamiento y la viscosidad por el módulo de elasticidad.

Problemas con las ecs. incompresibles

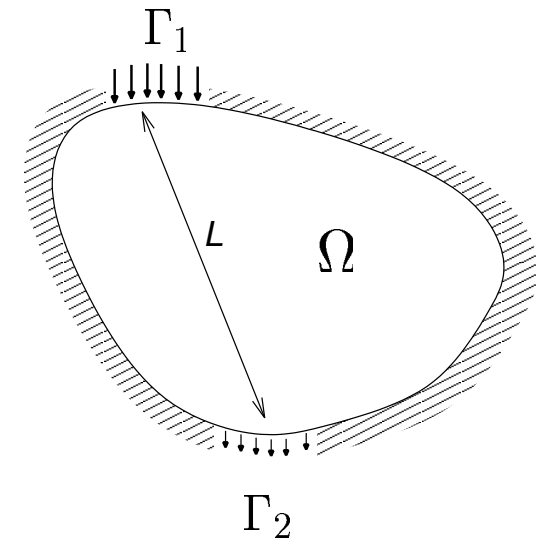
Las siguientes observaciones nos permiten adelantar el problema ocasionado por la incompresibilidad:

- **La condición de incompresibilidad no tiene un término temporal:** Esto quiere decir que “la presión no tiene historia”. El estado del fluido sólo está dado por la velocidad. También podemos decir que la ecuación de continuidad aparece como una restricción, más que como una ecuación de evolución. La presión, pasa a ser el multiplicador de Lagrange asociado.

Problemas con las ecs. incompresibles (cont.)

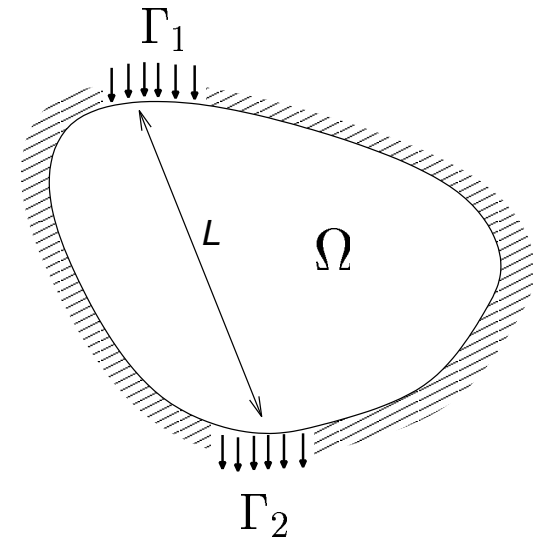
Las ecuaciones son no locales: Por ejemplo, consideremos un sólido incompresible que ocupa una región Ω . Las condiciones son de desplazamiento nulo en toda la frontera, menos en una cierta parte Γ_1 donde se aplica un cierto desplazamiento uniforme, y otra cierta parte Γ_2 donde las condiciones son libres, es decir tracción nula.

En el caso compresible, el operador es elíptico, local, y la influencia del desplazamiento impuesto sobre el dominio Γ_1 en el dominio Γ_2 dependerá de la distancia entre ambas regiones, sus tamaños relativos, etc... Si el tamaño de ambas regiones es similar y muy pequeños con respecto a la distancia que los separa, entonces los desplazamientos en Γ_2 serán despreciables.



Problemas con las ecs. incompresibles (cont.)

Por el contrario, en el caso incompresible, el cambio de volumen total en Γ_2 debe ser igual al impuesto en Γ_1 , por lo tanto los desplazamientos en Γ_2 serán del mismo orden que aquellos impuestos en Γ_1 (asumiendo que ambas regiones de la frontera tienen dimensiones similares).



Problemas con las ecs. incompresibles (cont.)

- **Cambia el carácter matemático de las ecuaciones:** También en el caso elástico, estacionario las ecuaciones dejan de ser elípticas al pasar al caso incompresible. Esto se debe a que la ecuación de continuidad “*no tiene término en derivadas segundas*”.
- **La ecuación de la energía se desacopla de la de momento y continuidad:** El campo de temperaturas se puede obtener a posteriori a partir de el campo de velocidades obtenido.

Problemas con las ecs. incompresibles (cont.)

- Notar que también en el caso de elasticidad lineal el límite incompresible es un **límite singular**. Es decir si en las ecuaciones de elasticidad compresible hacemos tender el coeficiente de Poisson ν a $1/2$ (incompresible) entonces el tensor de coeficientes elásticos se hace singular. Por eso es *necesario* pasar a una formulación que trate especialmente la incompresibilidad.
- **No hay condición de contorno para la presión:** Para un operador elíptico normalmente debemos imponer una condición de contorno (Dirichlet, Neumann o mixta) en cada parte del contorno. Eso se pega con el criterio para *Problemas de Valores de Contorno* en 1D: como el operador es de 2do orden hace falta dos condiciones (una en cada extremo). Como aquí la presión sólo tiene una derivada no queda en claro cuantas condiciones se deben imponer. Se puede demostrar que lo correcto es (sobre contornos sólidos) imponer las dos componentes de velocidad y no imponer la presión. Eso si, la presión queda definida a menos de una constante, por lo que hace falta o bien imponerla en algún nodo, o bien imponer que la presión media se nula.

Formulación vorticidad-función de corriente

Formulación vorticidad-función de corriente

La vorticidad se define como

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (4)$$

el cual, para un flujo bidimensional se reduce a

$$\Omega = \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

En 2D se puede encontrar una función de corriente ψ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

Formulación vorticidad-función de corriente (cont.)

Tomando rotor de (2) se llega, después de un cierto trabajo algebraico, a

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \Omega \quad (8)$$

pero (sólo en 2D!) el tercer término es nulo, ya que $\nabla \mathbf{u}$ debe estar en el plano y Ω está fuera del plano, de manera que la ecuación se reduce a una ecuación de advección difusión para la vorticidad

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Omega = \nu \Delta \Omega \quad (9)$$

Por otra parte, recomblando (5) con (6) se llega a una ecuación de Poisson para la función de corriente:

$$\Delta \psi = -\Omega \quad (10)$$

La “*formulación vorticidad/función de corriente*” consiste en resolver (9) y (10) en forma acoplada.

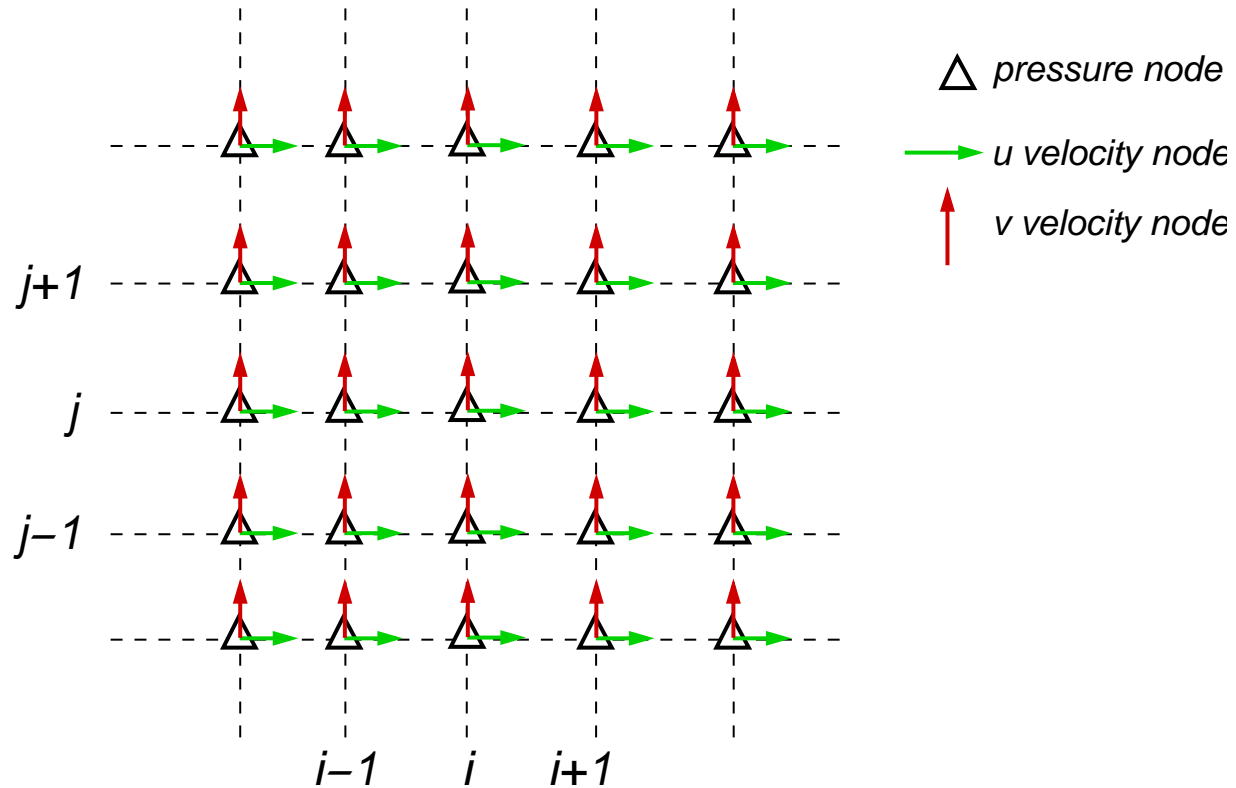
Formulación vorticidad-función de corriente (cont.)

Las ventajas y desventajas de la formulación, con respecto a la formulación en variables primitivas (2-3) son

- La extensión a 3D de la formulación vorticidad/función de corriente es muy compleja.
- La formulación vorticidad/función de corriente tiene un grado de libertad menos por nodo.
- Las condiciones de contorno para la presión son desconocidas para la formulación en variables primitivas.
- Las condiciones de contorno para la vorticidad son desconocidas para la formulación vorticidad/función de corriente .
- La formulación vorticidad/función de corriente requiere de cierto cuidado en cuanto a la discretización.

Discretización en variables primitivas

Discretización en variables primitivas



Discretización en variables primitivas (cont.)

Si despreciamos el término convectivo (problema de Stokes) y consideramos el caso estacionario en una malla de paso homogéneo h , la siguiente discretización (espacial) de segundo orden parece ser un buen punto de partida

$$\nu(\Delta_h u)_{ij} - \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\rho h} = 0$$

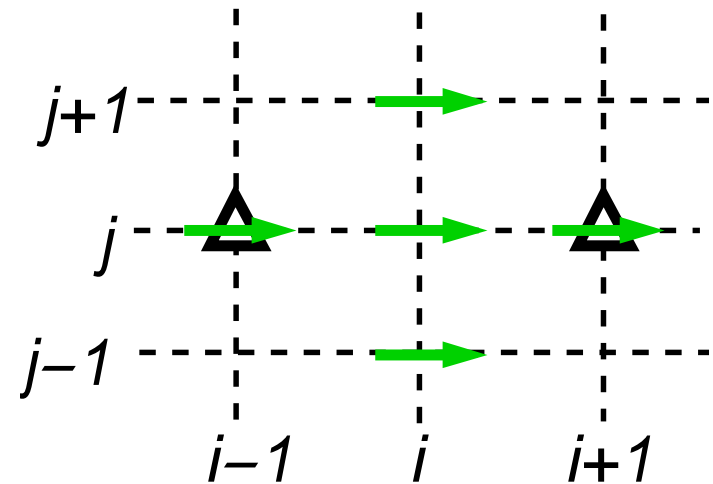
$$\nu(\Delta_h v)_{ij} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\rho h} = 0$$

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} = 0$$

Discretización en variables primitivas (cont.)

Ec. de momento según x

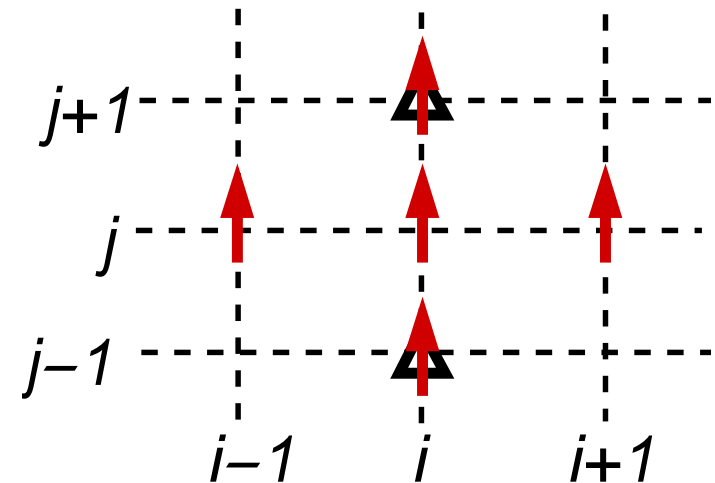
$$\nu(\Delta_h u)_{ij} - \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\rho h} = 0$$



Discretización en variables primitivas (cont.)

Ec. de momento según y

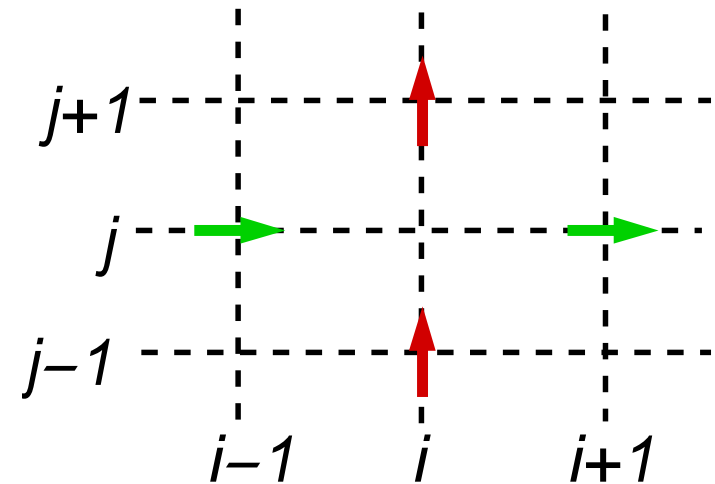
$$\nu(\Delta_h v)_{ij} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\rho h} = 0$$



Discretización en variables primitivas (cont.)

Ec. de continuidad

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} = 0$$

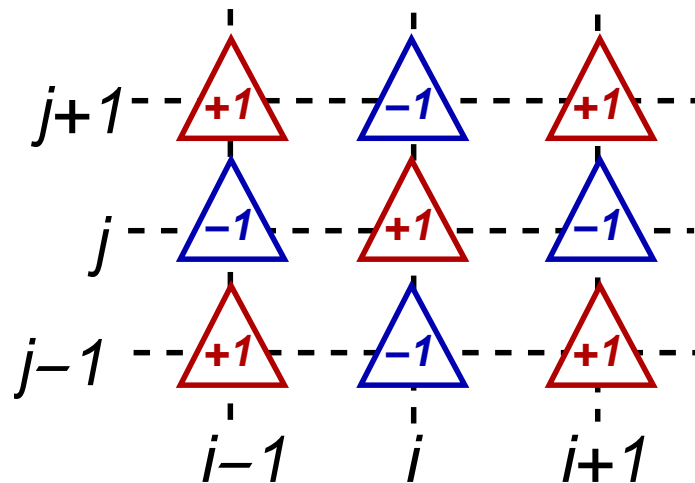


Discretización en variables primitivas (cont.)

Δ_h representa el operador de Laplace discreto estándar de 5 puntos

$$(\Delta_h u)_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}}{h^2} \quad (11)$$

Pero resulta ser que las presiones en los nodos impares se desacopla de los pares dando lugar a modos “*checkerboard*” en la presión. Notar que en las ecuaciones sólo aparece la diferencia de presiones entre dos nodos alternados.



Discretización en variables primitivas (cont.)

Las formas de resolver esto es

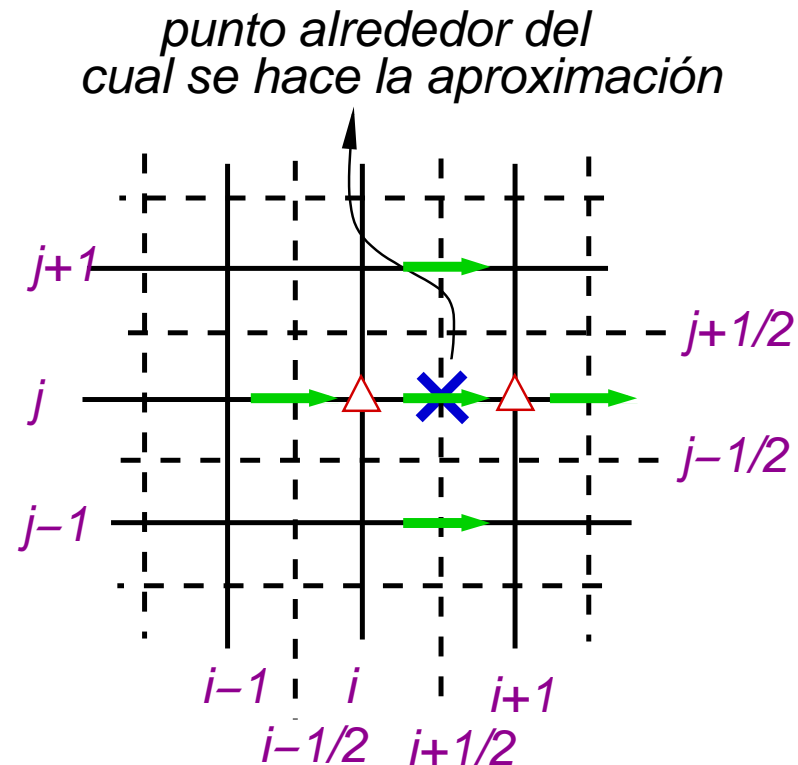
- Resolver una ecuación alternativa para la presión llamada PPE (Poisson Pressure Equation).
- Usar métodos de compresibilidad artificial.
- Usar mallas “staggered” (en español “desparramadas” (???)

Discutiremos a continuación el uso de mallas staggered.

Uso de mallas staggered

Si consideramos la ecuación de momento según x , entonces vemos que lo ideal sería tener una malla para los nodos de velocidad x desplazada en $h/2$ con respecto a la malla de los nodos de presión, en ese caso podríamos tener una ecuación de la forma

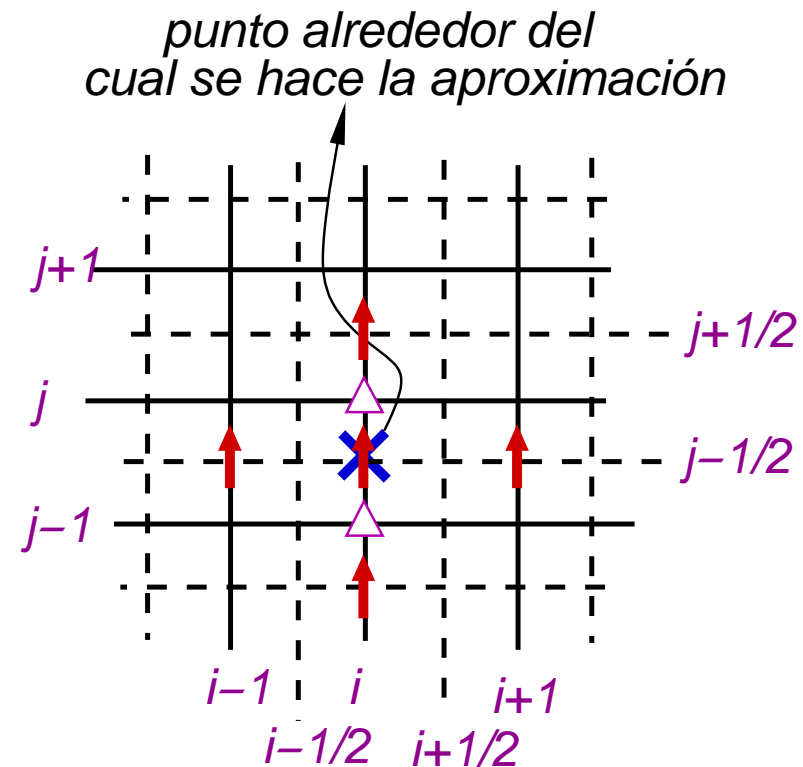
$$\nu(\Delta_h u)_{i+1/2,j} - \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho h} = 0$$



Discretización en variables primitivas (cont.)

Similarmente, para la ecuación de momento según y tenemos

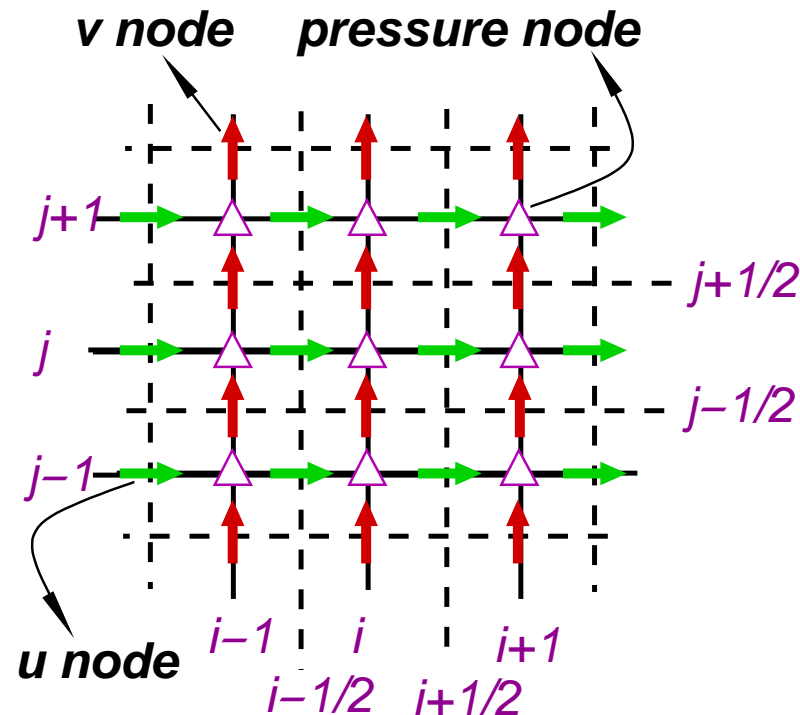
$$\nu(\Delta_h v)_{i,j+1/2} - \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho h} = 0$$



Discretización en variables primitivas (cont.)

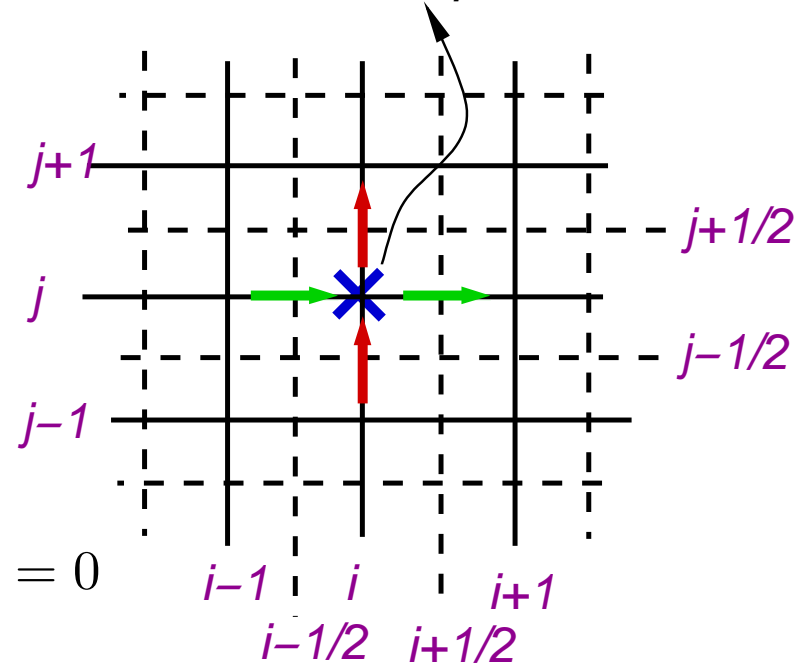
Esto lleva a considerar la siguiente malla “staggered”

- **nodos de presión** en los puntos (i, j)
- **nodos de u** en los puntos $(i + 1/2, j)$
- **nodos de v** en los puntos $(i, j + 1/2)$



Discretización en variables primitivas (cont.)

punto alrededor del cual se hace la aproximación



Para la ecuación de continuidad

$$\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{h} = 0$$

Discretización en variables primitivas (cont.)

Esto evita el desacoplamiento de las presiones entre nodos pares e impares. Entonces tenemos 3 redes “staggered” a saber

- Los nodos de presión: $p_{ij} \approx p(ih, jh)$
- Los nodos de velocidad x : $u_{i+1/2,j} \approx u((i + 1/2)h, jh)$
- Los nodos de velocidad y : $v_{i,j+1/2} \approx v(ih, (j + 1/2)h)$

Por otra parte, las condiciones de contorno también se simplifican algo, en cuanto a las condiciones sobre la presión, ya que utilizando sólo contornos que coinciden con líneas semienteras ($i, j = \text{entero} + 1/2$).

El método de mallas staggered es probablemente el más robusto y prolijo para tratar flujo incompresible por diferencias finitas.

Discretización por elementos finitos

Considerando el caso estacionario, flujo reptante, un término forzante \mathbf{f} y condiciones de contorno Dirichlet, las ecuaciones de gobierno son

$$\nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{en } \Gamma$$

y espacios de interpolación

$$X_h = \text{span}\{N_{p\mu}, \mu = 1 \dots N\}$$

$$V_h = \text{span}\{N_{u\mu}, \mu = 1 \dots N\}$$

Discretización por elementos finitos (cont.)

La formulación débil Galerkin se obtiene pesando la ecuación de momento por una función de interpolación de velocidad y pesando la ecuación de continuidad con las funciones de interpolación de presión.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \phi (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega &= 0, \quad \forall \phi \in X_h \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) p \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu (\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{u}) \, d\Omega &= \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in V_h\end{aligned}$$

Notar que, como no aparecen derivadas de p ni ϕ entonces es posible utilizar aproximaciones discontinuas para p .

Discretización por elementos finitos (cont.)

El sistema al que se llega es;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \nu \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \text{donde} \quad p_h = \sum_{\mu} p_{\mu} N_{p\mu}, \quad \mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T$$

$$u_h = \sum_{\mu} u_{\mu} N_{u\mu}, \quad \mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$$

$$Q_{\mu k \nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} N_{p\nu} \, d\Omega$$

$$K_{i\mu j \nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} \delta_{ij} N_{u\nu, k} \, d\Omega$$

Discretización por elementos finitos (cont.)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \nu \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

$$Q_{\mu k \nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} N_{p\nu} \, d\Omega$$

$$K_{i\mu j\nu} = \int_{\Omega} N_{u\mu, k} \delta_{ij} N_{u\nu, k} \, d\Omega$$

Nótese que la matriz \mathbf{K} es simétrica y definida positiva, mientras que la matriz total \mathbf{A} sólo es simétrica y de hecho no puede ser definida positiva ya que tiene elementos diagonales (en el bloque $\mathbf{0}$) nulos.

Discretización por elementos finitos (cont.)

$$\begin{bmatrix} 0 & Q^T \\ Q & \nu K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Como K es no-singular podemos eliminar U de la ecuación de momento e insertarla en la ecuación de continuidad obteniendo una ecuación para P de la forma

$$HP = (Q^T K^{-1} Q) P = Q^T K^{-1} F \quad (12)$$

Discretización por elementos finitos (cont.)

$$\mathbf{H}\mathbf{P} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (13)$$

La matriz \mathbf{H} es simétrica y semidefinida positiva. Para que el problema este bien planteado debemos al menos exigir que la matriz sea no-singular. Podemos ver que esto ocurre si y sólo si \mathbf{Q} tiene rango (el número de filas/columnas linealmente independiente) N_p (el número de grados de libertad de presión). Efectivamente, si \mathbf{Q} tiene rango menor que N_p entonces existe algún vector \mathbf{P} tal que $\mathbf{Q}\mathbf{P} = 0$ y entonces $\mathbf{H}\mathbf{P} = 0$. Por otra parte, si \mathbf{Q} tiene rango igual a N_p entonces para todo $\mathbf{P} \neq 0$ vale que $\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{P} \neq 0$ y entonces

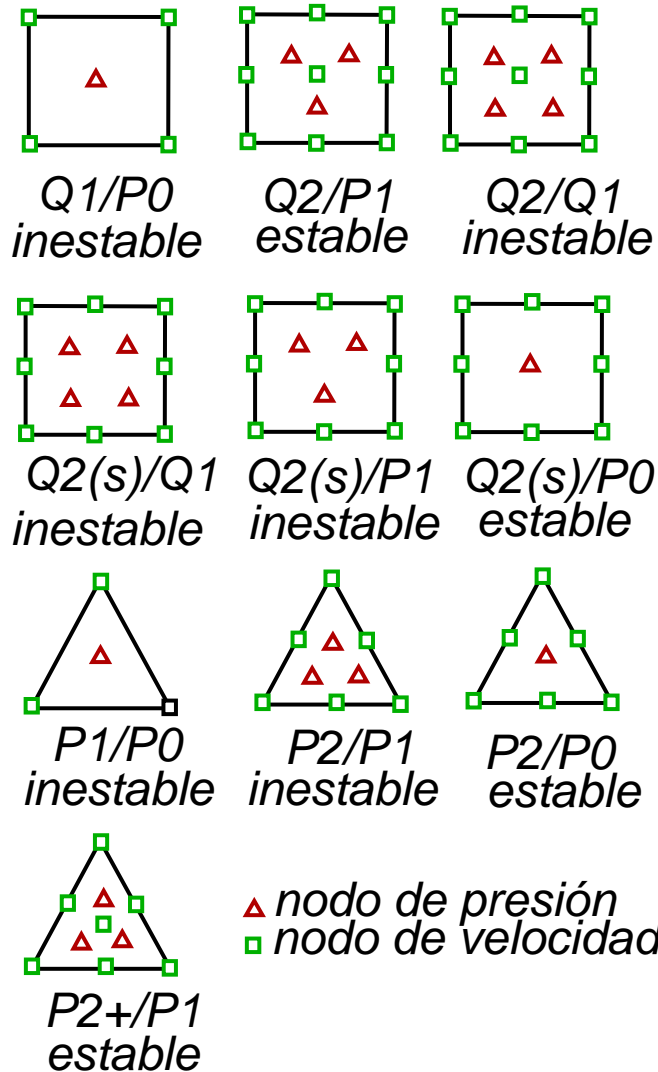
$$\mathbf{P}^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} > 0 \quad (14)$$

con lo cual \mathbf{H} resulta ser definida positiva y por lo tanto no-singular.

'slidesecc0patch-testEl patch test

El test de la parcela (patch test)

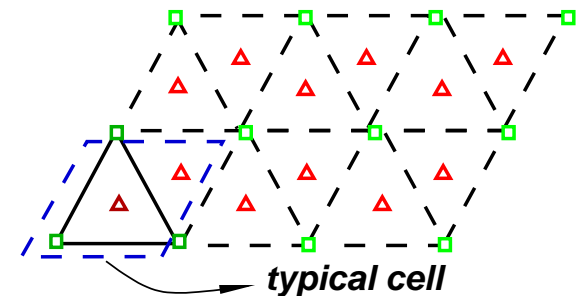
Ahora bien Q es de dimensión $N_u \times N_p$, de manera que, para que Q tenga rango N_p debemos pedir que al menos $N_u \geq N_p$. Si bien esto parece un requerimiento bastante simple, en realidad sirve para descartar toda una serie de familias de interpolación y da lugar al famoso “test de la parcela” (“patch test”).



El test de la parcela (patch test) (cont.)

Consideremos por ejemplo la interpolación más simple que se nos pueda ocurrir es $P1/P0$ para triángulos, es decir velocidades lineales continuas y presiones constantes por elemento. (La convención aquí es poner primero el espacio de interpolación para velocidades y después el que se usa para presiones. En general, a menos que se mencione lo contrario el espacio para velocidades se asume continuo y el de presiones discontinuo. P_n denota el espacio de funciones que es polinomial de grado n por elemento, mientras que Q_n denota el espacio de funciones bilineales (trilineales en 3D) de grado n .)

En una malla estructurada de cuadrángulos, donde dividimos cada cuadrángulo en dos triángulos, tenemos (para una malla suficientemente grande) $N_p=2$ grados de libertad de presión por cada cuadrángulo y un nodo de velocidad (es decir $N_u = 2$) por cuadrángulo, por lo tanto no se satisface el test de la parcela y la aproximación es inestable.



El test de la parcela (patch test) (cont.)

Si tomamos parcelas más pequeñas la situación es peor, ya que el N_u es mayor o igual al N_u asintótico pero imponiendo las condiciones de contorno “*más inestables posibles*”, es decir todo el contorno de la parcela con velocidades impuestas el N_u resulta ser

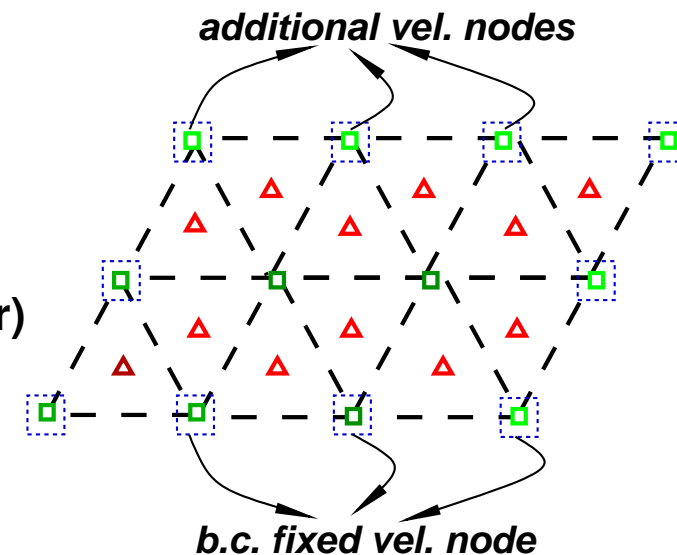
$$N_u(\text{asymptotic}) = (N_u \text{ per cell}) \times (\text{cell number})$$

$$N_u = N_u(\text{asymptotic})$$

$$+ (\text{vel. additional d.o.f.'s})$$

$$- (\text{vel b.c. (all non-slip)})$$

$$\leq (N_u(\text{asymptotic}))$$



El test de la parcela (patch test) (cont.)

Ejemplo: patch de elementos

$P1/P0$

$$N_u(\text{asymptotic}) = 12$$

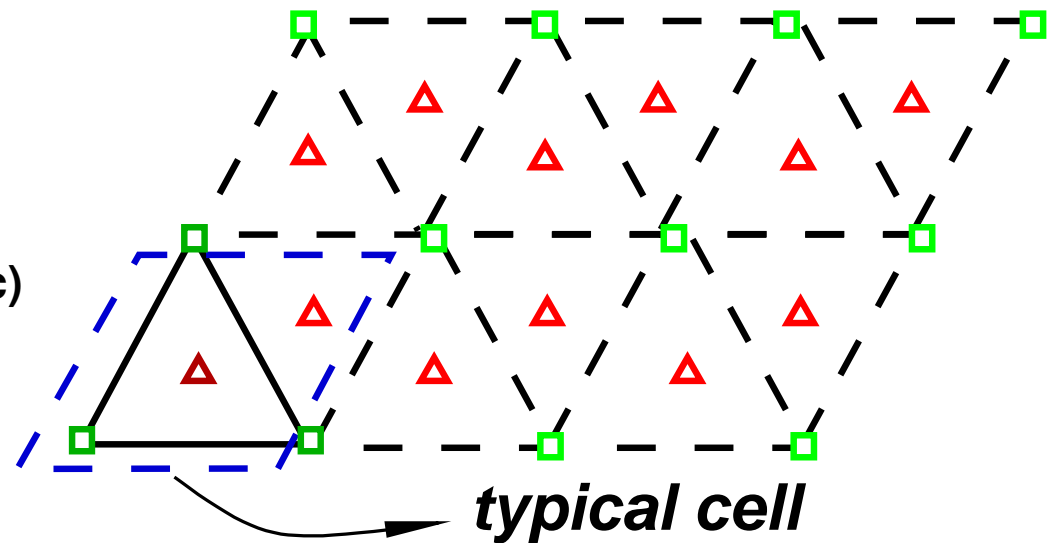
$$\text{additional boundary} = 12$$

$$\text{b.c. (all non-slip)} = 20$$

$$N_u = 4 < N_u(\text{asymptotic})$$

$$N_p = 12 - 1 = 11 > N_u$$

\Rightarrow **unstable!**



El test de la parcela (patch test) (cont.)

Entonces, si bien el test de la parcela “asintótico” permite descartar una serie de familias de interpolación, el test aplicado sobre parcelas más pequeño resulta ser más restrictivo.

Por ejemplo para la interpolación

$Q1/P0$ el análisis asintótico da

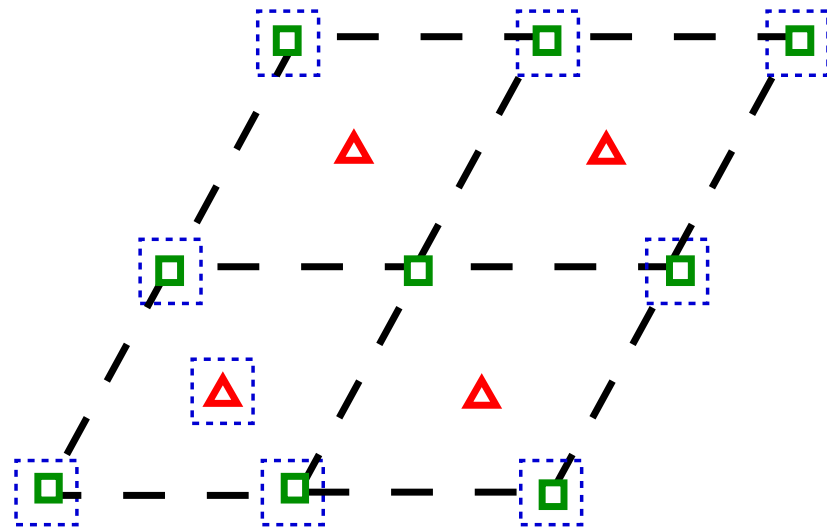
N_u por celda = 2, N_p por celda = 1

lo cual en principio está bien, pero

cuando vamos a una parcela de $2 \times 2 = 4$ elementos cuadrangulares

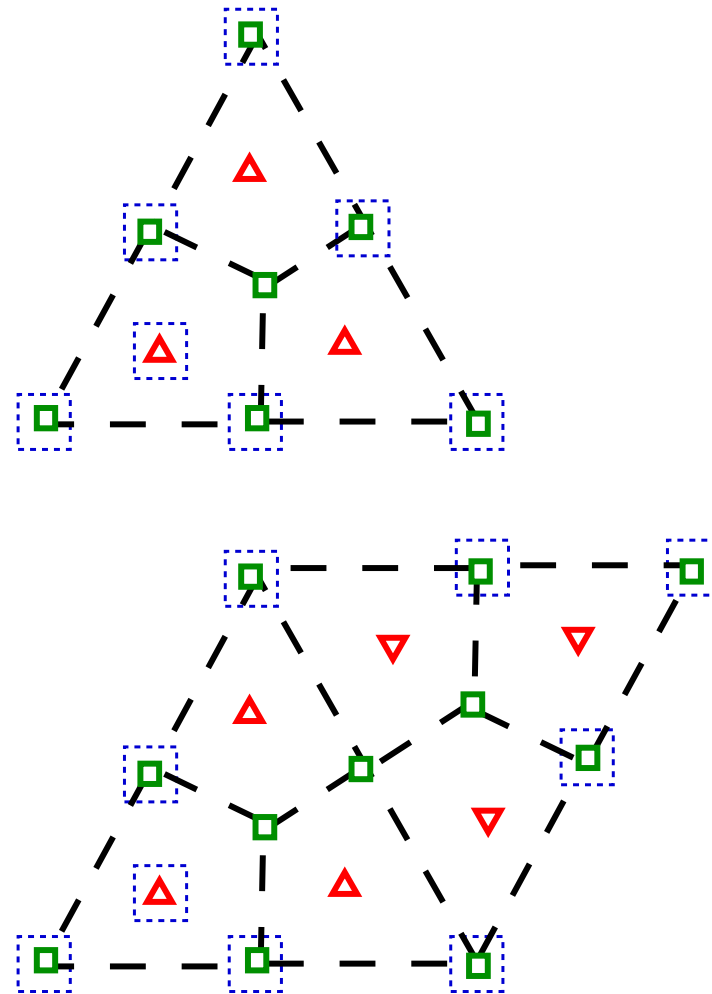
tenemos $N_u = 2$ (sólo el nodo de velocidad del medio está libre),

$N_p = 3$ (uno de los nodos de presión siempre está restringido) lo cual está mal.



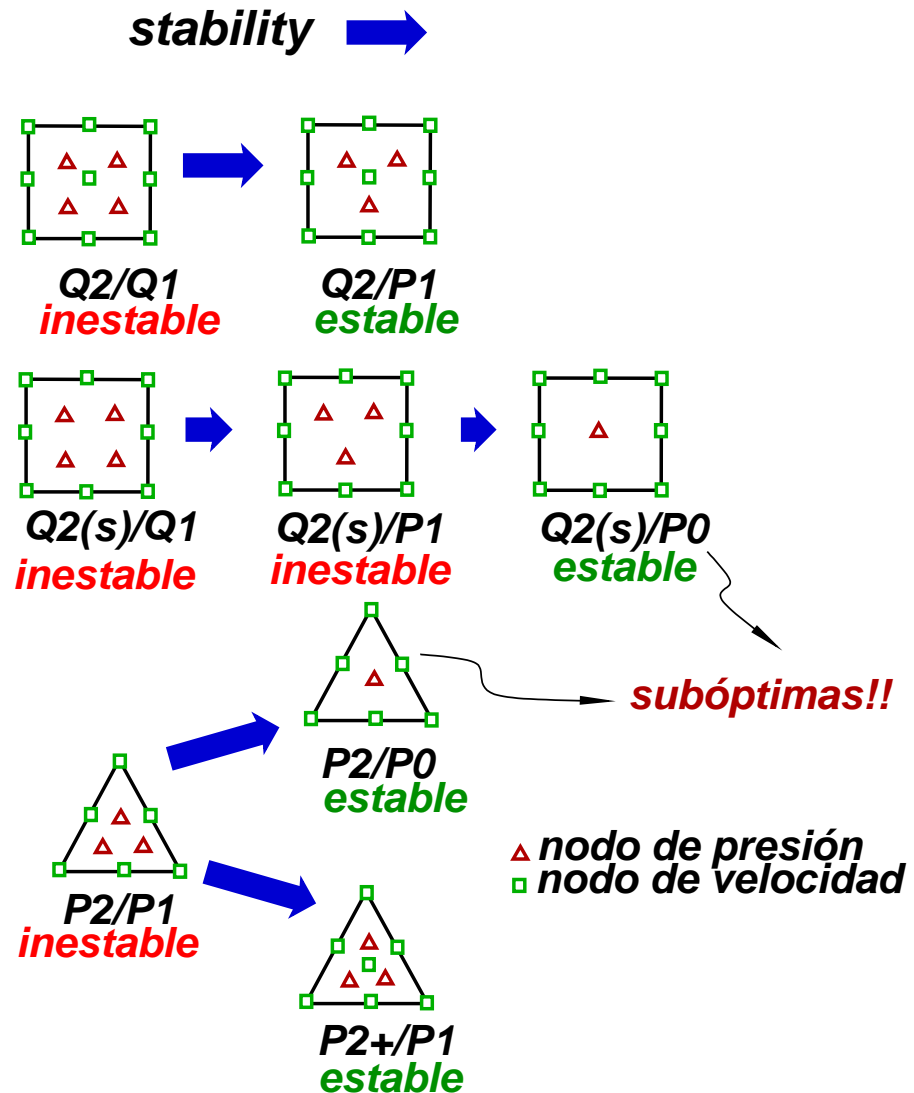
El test de la parcela (patch test) (cont.)

Sin embargo, puede verse que un macroelemento triangular formado por 3 elementos $Q1/P0$ es estable. Para un patch de 1 macro elemento (*arriba*), $N_u = N_p = 2$ y para 2 macroelementos (*abajo*) tenemos $N_u = 6, N_p = 5$.



El test de la parcela (patch test) (cont.)

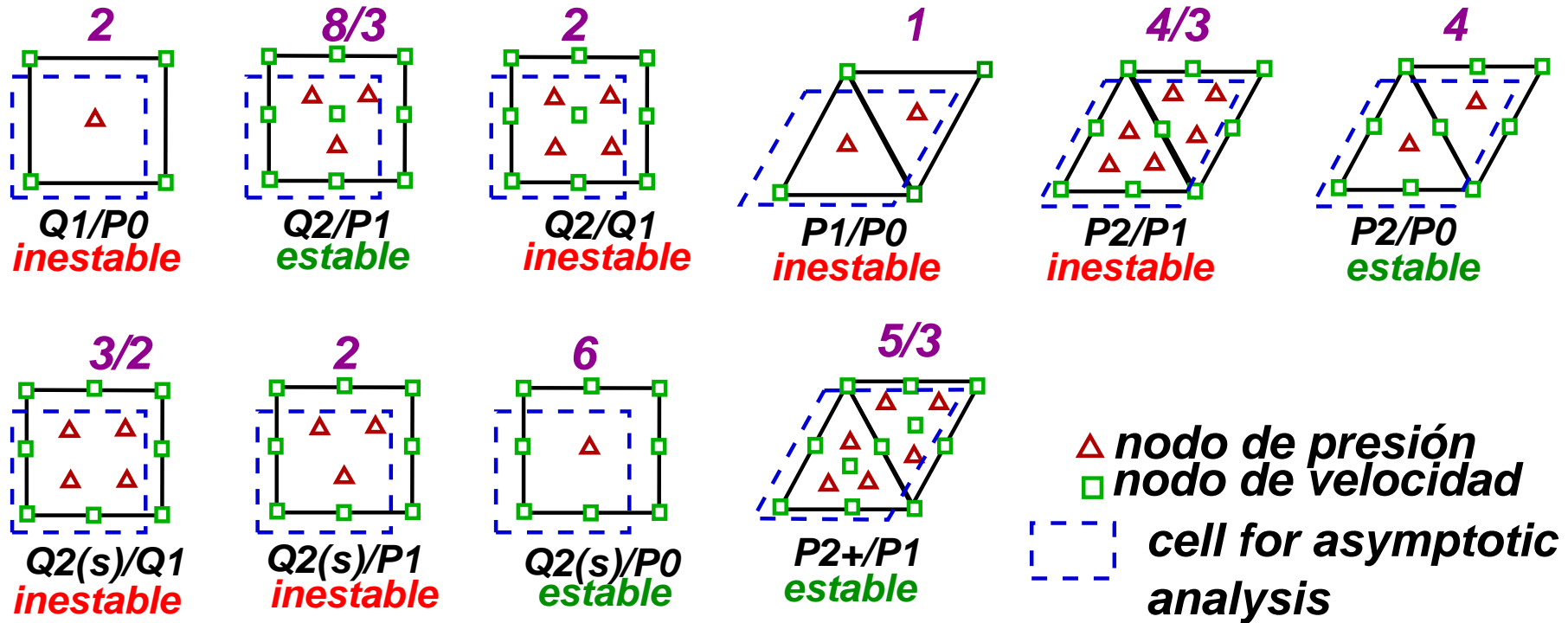
Parece que “agregar grados de libertad de velocidad” (o equivalentemente “quitar grados de libertad de presión”) tiende a estabilizar una formulación.
Sin embargo, se puede caer en aproximaciones “subóptimas”.



El test de la parcela (patch test) (cont.)

La relación asintótica más apropiada parece ser $N_u = 2N_p$.

Asymptotic Nu/Np



La condición de Brezzi-Babůska

La condición de Brezzi-Babůska

Si bien el test de la parcela es muy útil para descartar posibles familias de interpolación, no es suficiente para asegurar la convergencia. Ríos de tinta han corrido en cuanto a cual es la condición para asegurar convergencia en problemas de este tipo y la respuesta es la conocida “condición de Brezzi-Babůska” también conocida como condición “inf-sup”.

$$\inf_{q_h \in X_h - 0} \left\{ \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h - 0} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega}{\left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h|^2 \, d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |q_h^2| \, d\Omega \right)^{1/2}} \right\} = \\ = \overline{BB} \geq C \neq C(h)$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Las tres integrales que aparecen se pueden reducir a formas bilineales con las matrices de elementos finitos:

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega = \mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{v}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}_h|^2 \, d\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}$$

$$\int_{\Omega} |q_h^2| \, d\Omega = \mathbf{q}^T \mathbf{M}_p \mathbf{q}$$

donde \mathbf{M}_p es la “matriz de masa para las funciones de presión”

$$M_{p\mu\nu} = \int_{\Omega} N_{p\mu} N_{p\nu} \, d\Omega$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

De manera que

$$\overline{BB} = \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \left\{ \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_u} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{v}}{(\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v})^{1/2} (\mathbf{q}^T \mathbf{M}_p \mathbf{q})^{1/2}} \right\}$$

Haciendo el cambio de variables

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{1/2} \mathbf{v},$$

tenemos que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_u} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{v}}{(\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v})^{1/2}} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_u} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{1/2}}$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Si definimos $\mathbf{w}_q = \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{q}$, entonces el numerador es

$$\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{w} = \mathbf{w}_q^T \mathbf{w}$$

y descomponemos \mathbf{w} según una componente paralela a \mathbf{w}_q y la otra perpendicular, $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}_q + \mathbf{w}_\perp$ entonces

$$\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{1/2}} = \frac{\mathbf{w}_q^T \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{1/2}} = \frac{\lambda \|\mathbf{w}_q\|^2}{(\lambda^2 \|\mathbf{w}_q\|^2 + \|\mathbf{w}_\perp\|^2)^{1/2}}$$

El máximo se produce cuando $\mathbf{w}_\perp = 0$ y $\lambda > 0$

$$\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{1/2}}$$

$$\frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1/2} \mathbf{w}}{(\mathbf{w}^T \mathbf{w})^{1/2}} = \text{sign } \lambda \|\mathbf{w}_q\| = \|\mathbf{w}_q\| = (\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{q})^{1/2}$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Tenemos entonces que

$$\overline{BB} = \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{(\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{q})^{1/2}}{(\mathbf{q}^T \mathbf{M}_p \mathbf{q})^{1/2}}$$
$$\overline{BB}^2 = \inf_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mathbf{M}_p \mathbf{q}}$$

y de nuevo, haciendo el cambio de variable $\mathbf{q}' = \mathbf{M}_p^{1/2} \mathbf{q}$ tenemos que

$$\overline{BB}^2 = \inf_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}'^T \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{q}'}{\mathbf{q}'^T \mathbf{q}'}$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Ahora bien, sea $\mathbf{H} = \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2}$. Entonces

$$\overline{BB}^2 = \inf_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}'^T \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{q}}{\mathbf{q}'^T \mathbf{q}'} = \inf_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}'^T \mathbf{H} \mathbf{q}}{\mathbf{q}'^T \mathbf{q}'}$$

Este es el “cociente de Rayleigh”.

Como \mathbf{H} es simétrica y definida positiva es diagonalizable (en una base ortogonal) y con autovalores positivos. Sean $\{\lambda_i, \mathbf{h}_i\}_{i=1}^{N_p}$ los autovalores y autovectores de \mathbf{H} , con $\lambda_i > 0$ y $\mathbf{h}_i^t \mathbf{h}_j = \delta_{ij}$.

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Cualquier vector $\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_p}$ puede descomponerse en la base de los \mathbf{h}_i , es decir

$$\mathbf{q}' = \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i \mathbf{h}_i$$

y entonces

$$\mathbf{q}'^T \mathbf{q}' = \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2$$

$$\mathbf{q}'^T \mathbf{H} \mathbf{q}' = \sum_{i=1}^{N_p} \lambda \alpha_i^2$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

El cociente de Rayleigh es entonces

$$\begin{aligned} \overline{BB}^2 &= \inf_{\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\mathbf{q}'^T \mathbf{H} \mathbf{q}}{\mathbf{q}'^T \mathbf{q}'} \\ &= \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \lambda \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2} \geq \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2} = \lambda_1 \end{aligned}$$

Donde λ_1 es el menor autovalor (asumimos que estan ordenados). Por otra parte, para $\mathbf{q}' = \mathbf{h}_1$ tenemos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_j = 0$, para $j > 1$, de manera que

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_p} \lambda \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2} = \lambda_1$$

de manera que

$$\overline{BB}^2 = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{N_p} - \{0\}} \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \lambda \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^2} = \lambda_1 = \min \text{eig} \{ \mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2} \}$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Pero, aplicando una “*transformación de semejanza*”, podemos ver que $\mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2}$ y $\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1}$ son semejantes, de manera que

$$\overline{BB}^2 = \min \text{eig}\{\mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1}\}$$

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

$$= \min \text{eig}\{\mathbf{M}_p^{-1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{M}_p^{-1/2}\}$$

Haciendo una transformación de similaridad con $\mathbf{M}_p^{-1/2}$ tenemos que

$$\overline{BB}^2 = \min \text{eig}\{\mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}\}$$

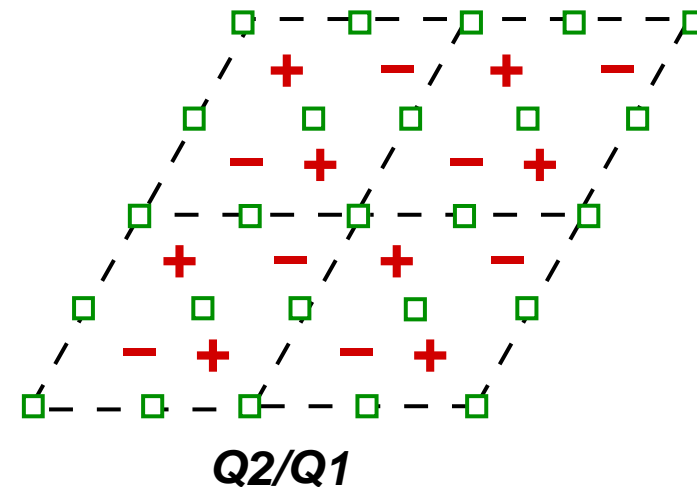
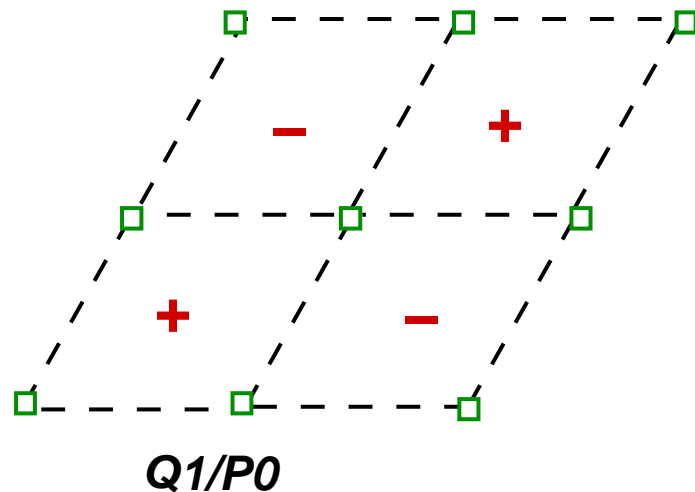
De manera que la condición de BB es

$$\overline{BB}^2 = \min \text{eig}\{\mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{Q}\} \geq C \neq C(h)$$

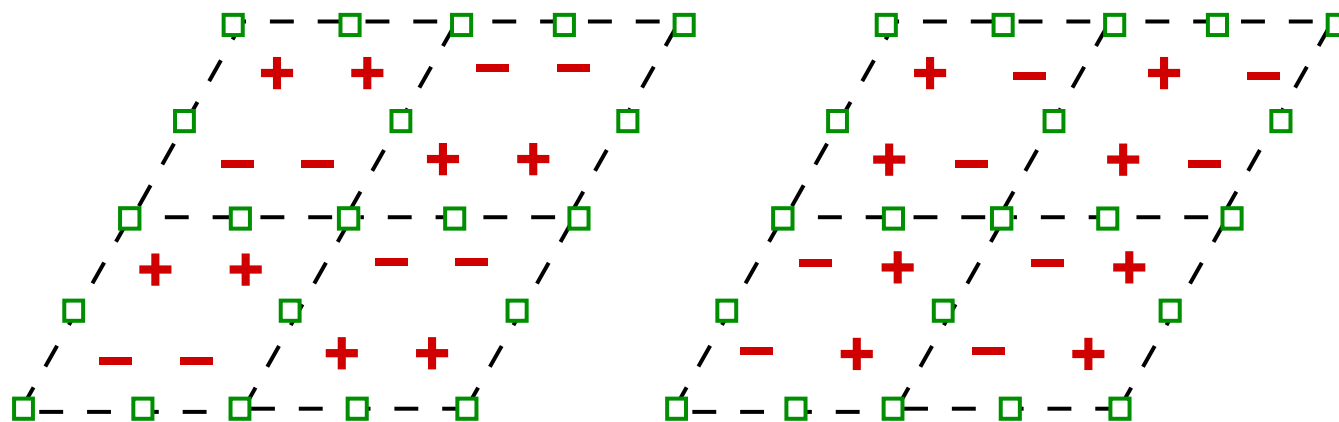
La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

Notemos que el *patch-test* es una condición necesaria para la condición de BB. Si Q no tiene rango N_p entonces existe un vector q tal que $Qp = 0$ y por lo tanto BB no se satisface.

Los q tales que $Qp = 0$ son modos “*espúreos de presión*” o también “*modos checker-board*”. En general, son modos de muy alta frecuencia.

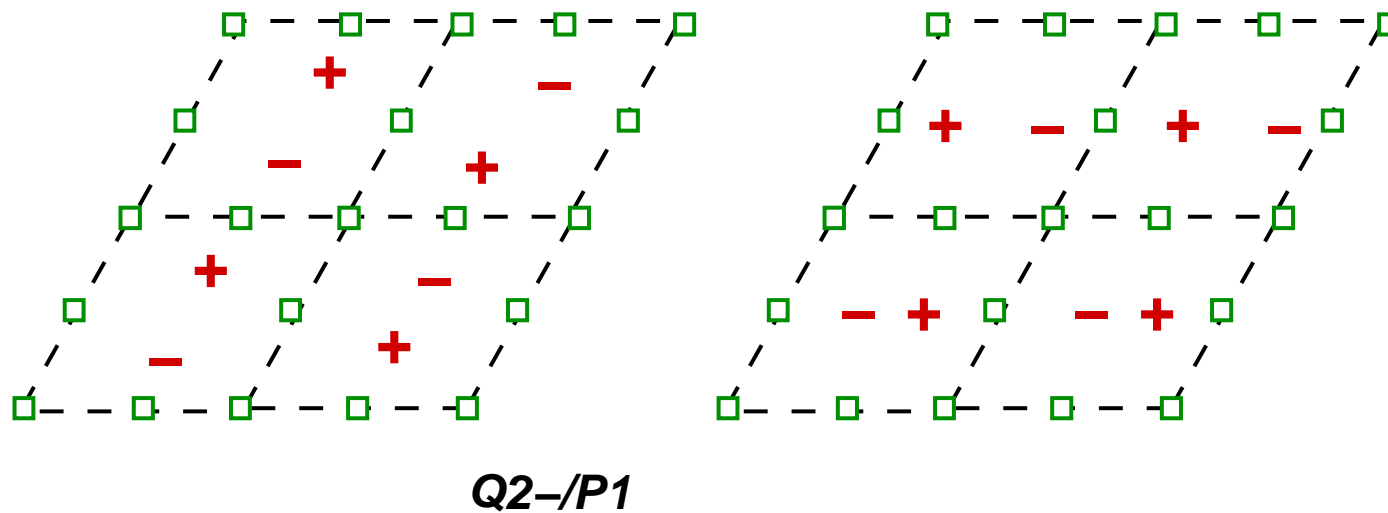


La condición de Brezzi-Babůska (cont.)

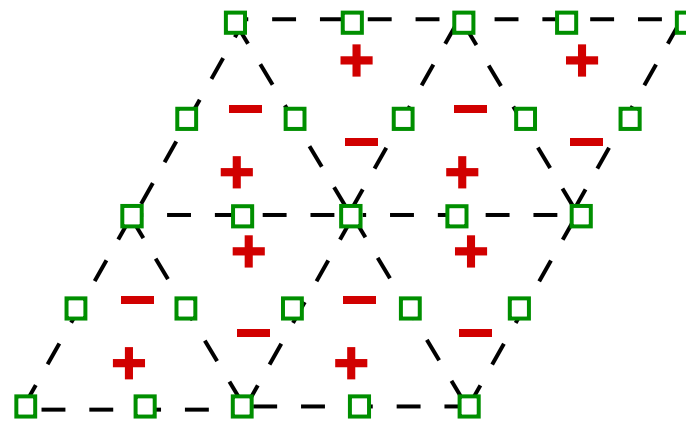


Q2-/Q1

La condición de Brezzi-Babůska (cont.)



La condición de Brezzi-Babůska (cont.)



P2/P1