

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Resumen y discusión

A lo largo del presente trabajo de investigación, se ha estudiado el problema de falla en aquellos materiales que pueden caracterizarse mediante leyes constitutivas con ablandamiento por deformación. Para tal fin, se han propuesto distintas metodologías numéricas y, en particular, puede notarse una clara tendencia hacia el análisis y desarrollo de tecnologías de elementos finitos. Estas herramientas de simulación se han aplicado a problemas típicos 2D y 3D, en el contexto de fractura cuasi-frágil y falla dúctil. Seguidamente enunciamos algunas observaciones y comentarios importantes que surgen de dicho estudio.

Simulación de fractura frágil con modelos de gradientes

El modelo de daño con teoría de gradientes (implícito) de deformación, discutido en el apéndice A, resulta ser una estrategia relativamente sencilla de programar en un código estándar de elementos finitos dado que, al momento de su implementación y desde un punto de vista algorítmico, puede considerarse como un modelo local. En estos esquemas, se introduce consistentemente una longitud característica (l_c) dependiente de la microestructura material, que es necesario caracterizar adecuadamente. La dependencia del estado tensional en un punto, como función de gradientes de segundo orden en deformaciones (de alto orden en general), hace que las ecuaciones de gobierno permanezcan bien formuladas aun en presencia de ablandamiento, en el sentido de garantizar la elipticidad del modelo constitutivo (si nos referimos a un problema mecánico cuasi-estático). Esta estrategia postula la introducción de una nueva variable, que hemos denominado deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$, cuya evolución viene dada por una ecuación diferencial adicional, la cual puede ser resuelta en forma acoplada con el campo de desplazamiento, vía *MEF*. En particular, el formato implícito del modelo resulta adecuado para propósitos numéricos dado que la interpolación de $\tilde{\tau}_\varepsilon$ requiere sólo continuidad de tipo C^0 en las funciones de forma.

Desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo, los resultados obtenidos muestran un desempeño comparable con otros tipos de aproximaciones y se ajustan razonablemente bien con información experimental, fundamentalmente en la etapa donde el mecanismo inelástico dominante es la degradación material y micro fisuración. A nivel de la imple-

mentación por elementos finitos, no es necesario conocer a priori la dirección de falla, dado que la misma surge a partir de la evolución de las variables regularizadas definidas en el modelo.

Debemos, no obstante, remarcar ciertas limitaciones en la estrategia de gradientes estudiada, al menos en la presente implementación. La primera de ellas es la necesidad de una excesiva densidad de elementos en la zona de falla para obtener una respuesta estructural objetiva. En general el tamaño de los elementos debe ser inferior a la longitud característica material. Esto último representa un inconveniente importante si pretendemos modelar situaciones generales en donde no es factible estimar previamente el dominio probable de fractura. Se ha notado además que para estados avanzados de degradación, se produce un fenómeno espúreo (físicamente no admisible) de difusión de daño fuera de la zona de localización. Dicho mecanismo, de índole numérico, está asociado a una descripción cinemática limitada cuando el proceso dominante es la coalescencia de micro defectos y desarrollo de macro fisuras. Motivados por este inconveniente, algunos investigadores han propuesto soluciones de compromiso, como por ejemplo la introducción de un enriquecimiento adicional, basado en la incorporación de discontinuidades en desplazamientos cuando se satisface algún criterio motivado por la física del problema [CMP04, SS04]. Sin embargo, nuestra línea de trabajo no ha explorado esta última alternativa.

Simulación de fractura mediante *CSDA*

Mediante el uso utilización de los denominados esquemas discretos cohesivos se ha podido modelar una gran variedad de casos de propagación de fisuras. En particular hemos de enfatizar algunas ventajas propias de la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*CSDA*) utilizada: (i) un único marco teórico subyacente (cinemático y constitutivo) para describir el comportamiento del continuo, para deducir las condiciones de bifurcación y para capturar los procesos de degradación y falla material cuando la misma está gobernada por la generación de discontinuidades en el medio, (ii) una cinemática compatible con saltos en el campo de desplazamiento, permitiendo simular modos de intensa deformación en forma objetiva y eficiente, (iii) la adopción de un único modelo constitutivo el cual tiene implicancia en la zona regular del sólido y que además, según el mecanismo explicado en el capítulo 3, se proyecta consistentemente en la interface de discontinuidad en forma de una ley cohesiva discreta, función de la apertura de la misma. Así mismo debe remarcar la robustez del algoritmo global utilizado para simular el mecanismo completo de falla, con ello nos referimos a las estrategias de trazado de discontinuidad, esquemas de integración, formulación optimizada de elementos finitos con modos embebidos, etc.

Basándonos en esta plataforma conceptual (*CSDA*), se ha trabajado especialmente en la aplicación a leyes constitutivas de daño isótropo y plasticidad clásica.

Simulación de fractura frágil mediante *CSDA*

En el contexto de la simulación computacional de fractura frágil se ha abordado un estudio original comparativo sobre dos tecnologías de elementos finitos con modos embebidos de deformación, aquí denominados *E-FEM* y *X-FEM*, ver capítulo 4. Este trabajo

se fundamenta en una implementación optimizada de ambos modelos de enriquecimiento, en el mismo código de *EF*, considerando elementos triangulares y tetraedros con interpolación lineal del desplazamiento regular. Las principales conclusiones de este análisis se describen a continuación:

- *ambas formulaciones convergen a la misma (única) solución*, tanto en resultados cualitativos como cuantitativos.
- considerando medidas de error relativo en términos de normas L^2 para curvas de respuesta carga-desplazamiento, *la velocidad de convergencia de ambos enriquecimientos es similar* y en general algo superior a la lineal.
- en contraposición con algunos comentarios encontrados en la literatura, nuestra observación es que *las diferencias entre los dos tipos de interpolaciones para el campo salto de desplazamiento, que postula cada esquema (lineal para *X-FEM* constante por elemento para el modelo *E-FEM*), no afectan sustancialmente la precisión en la representación de la superficie de discontinuidad ni las tasas de convergencia*. El hecho que la formulación *X-FEM*, a diferencia del elemento *E-FEM*, permite deformaciones regulares discontinuas a través de la interface \mathcal{S} , tampoco afecta en forma apreciable los resultados, ni las magnitudes de error y convergencia. Estas medidas parecen ser dependientes del grado de interpolación de los modos continuos de desplazamiento del elemento base seleccionado (lineal en este caso).
- se ha observado que, para mallas gruesas, la precisión y la suavidad en la respuesta es mayor en la estrategia *E-FEM*. Más específicamente, las curvas de equilibrio correspondientes al modelo *X-FEM* exhiben saltos más abruptos, hecho que puede estar asociado al retraso relativo en la activación de los grados de libertad de los modos enriquecidos, cuando un nuevo elemento es atravesado por la trayectoria de falla. Este efecto, que también puede observarse (aunque en menor grado) en la metodología *E-FEM*, disminuye con el refinamiento de malla y ha sido documentado por otros autores que utilizan el elemento *X-FEM* en sus simulaciones [GH05, Sim04]. En este sentido se ha reportado la incorporación de nuevos modos enriquecidos en la punta de la fisura [ZB03] que podrían, al menos parcialmente, corregir esta tendencia. Sin embargo este tipo de técnicas, aún en vías de desarrollo [LPRS05], pertenecen a un escalón más alto de sofisticación que no hemos considerado en el presente análisis comparativo, *para ninguno de los dos modelos*.
- *el costo computacional relativo es, en todos los casos, favorable al enriquecimiento *E-FEM**. Para el modelado de problemas que involucran una única fisura, *X-FEM* es 1,10-1,20 (en 2D) y 1,30-2,50 (en 3D) veces más costoso que *E-FEM*. El factor relativo más bajo se corresponde a las mallas refinadas. Las razones de esta pérdida de eficiencia en el modelo *X-FEM* están asociadas a: (i) la activación de grados de libertad adicionales (no condensables) que se traducen en un incremento de la cantidad de ecuaciones por resolver y (ii) la necesidad de utilizar cuadraturas de alto orden. Estos valores, no obstante, deben tomarse como una tendencia ya que pueden ser modificados por implementaciones alternativas. Los mismos corresponden a la implementación más eficiente, a conocimiento del autor, tras un esfuerzo importante de programación, en un código de elementos finitos razonablemente bien validado.

- cuando se aborda la simulación de múltiples superficies de falla, *el costo computacional asociado a la tecnología E-FEM permanece prácticamente constante aun para un número creciente de fisuras activas*. Por el contrario, *para el elemento X-FEM, el tiempo de CPU se incrementa linealmente conforme se introducen nuevas discontinuidades en el análisis*. En el caso 3D considerado, se ha estimado un aumento de aproximadamente 20 %, respecto al costo total, por cada fisura adicional.
- hemos de dejar en claro que, en un futuro, ambos modelos podrían (potencialmente) reformularse y/o mejorarse, tanto desde el punto de vista conceptual como algorítmico. En ese caso deberá proponerse un estudio similar al reportado en esta tesis, que contemple tales escenarios alternativos de comparación.

Una mención especial merece el esquema de integración constitutiva utilizado en la resolución de estos problemas, aquí denominado *método implícito-explicito* [OHBL05, OHP⁺04b]. Este procedimiento, como se mencionó, asegura que la matriz de rigidez consistente se mantenga siempre definida positiva, incluso en presencia de ablandamiento, hecho que se torna de crucial importancia para evitar inconvenientes de mal condicionamiento del sistema. Además, el jacobiano es constante con lo cual, la convergencia se logra en una única iteración por paso de tiempo. Debe notarse que en todas las simulaciones se ha podido sobrepasar la carga crítica hasta alcanzar una completa degradación de la capacidad portante estructural. La utilización de este método significó un gran avance, fundamentalmente en la simulación numérica de problemas 3D, tanto desde el punto de vista de la robustez como del costo computacional. El error extra que se introduce puede minimizarse acortando suficientemente el paso de tiempo. Para tal fin, es posible además plantear estrategias automáticas de control las cuales siguen dos caminos: (i) en el paso actual mediante algoritmos adecuados de tipo arc-length y (ii) una estimación a priori del error de tal manera que el mismo se mantenga acotado en el paso siguiente, proponiendo para ello un escalamiento consistente de la longitud del paso.

Según nuestra experiencia y en lo concerniente al modelado de problemas de fractura cuasi-frágil, una adecuada conjunción de tecnologías eficientes de elementos finitos (como por ejemplo *E-FEM*), juntamente con algoritmos robustos de integración constitutiva, y estrategias confiables de trazado de discontinuidad, permite en la actualidad abordar el cómputo de problemas tridimensionales dominados por el desarrollo de numerosas fisuras, en un ordenador personal y a costo de procesamiento razonable, los cuales hasta hace muy poco tiempo eran impensables. Más aún, ya es posible encarar los primeros estudios de sensibilidad paramétrica que nos brinden estimaciones precisas de la probabilidad de falla en estructuras complejas, véase apéndice D.

Simulación de falla dúctil mediante *CSDA*

La mecánica de falla dúctil fue otro de los tópicos al cual se le ha dedicado especial esfuerzo y atención en esta tesis, abordando su estudio (una vez más) mediante la aproximación por discontinuidades fuertes de continuo. En este sentido hemos desarrollado una nueva tecnología de elementos finitos, denominada *PGPSD*. Como particular atractivo,

este modelo está orientado a la obtención de triángulos y tetraedros de bajo orden (lineales). Este hecho no sólo representa una ventaja importante desde el punto de vista de generación de mallas sino también desde la robustez que aportan los elementos simples, condición esta última, altamente apreciable en problemas de localización y falla.

La estrategia numérica propuesta postula la utilización de un esquema mixto estabilizado (denominado por practicidad *PGP*) ideado para aliviar restricciones de incompresibilidad material inducidas por leyes de tipo J_2 , el cual se formula en marco teórico subyacente de la *CSDA*.

El desarrollo de este modelo contempla en un principio la evaluación rigurosa de la técnica de estabilización en sí misma, para situaciones donde la condición de conservación volumétrica se torna crítica, tal es el caso de problemas de localización de deformaciones y desarrollo de mecanismos de falla en régimen de ablandamiento, véase capítulo 5. Las observaciones asociadas al desempeño del esquema *PGP*, se mencionan seguidamente:

- tomando en consideración ciertas hipótesis simplificadoras en el planteamiento teórico, la introducción del término estabilizante τ^{PGP} en las ecuaciones de equilibrio puede deducirse a partir de una formulación variacional basada en el concepto de sub-escalas (en particular sub-escalas ortogonales), véase anexo B.
- posee buen desempeño numérico en problemas gobernados por campos de deformaciones isocóricas dominantes (elasticidad incompresible y/o plasticidad de Von Mises).
- la velocidad de convergencia en las variables primales (desplazamiento-presión) no se ve sustancialmente afectada por el régimen cuasi-incompresible presente, como sí sucede en los esquemas mixtos de bajo orden sin estabilización.
- el comportamiento cuantitativo es comparable con otro esquema alternativo de estabilización (*PSPG*) reconocido y ampliamente utilizado por la comunidad científica.
- la forma simplificada (desacoplada) para resolver el campo de gradiente de presión proyectado (*II*), resulta una estrategia eficiente, conservando calidad en los resultados.
- en el modelado de problemas que involucran localización de deformaciones, especialmente cuando ésta es inducida por ablandamiento material, se ha observado cierta dependencia con la orientación de la malla, hecho que atenta desfavorablemente al momento de simular mecanismos de falla en forma objetiva.

Haciendo uso de la estrategia *PGP*, es posible lograr una mejora importante en el comportamiento de los elementos. Sin embargo ésta es sólo parcial dado que, para nuestros propósitos, existen aún limitaciones cinemáticas que inducen falta de objetividad en la respuesta. Con la intención de soslayar esta falencia, hemos desarrollado la formulación *PGPSD*. El capítulo 6 está íntegramente dedicado a tal fin. Allí presentamos el modelo matemático, las hipótesis introducidas, el correspondiente análisis en régimen de discontinuidad fuerte y los tópicos relacionados con su implementación computacional. Además se ha deducido la forma lineal exacta que toma la matriz de rigidez del problema mecánico no lineal, para la solución vía un procedimiento clásico Newton-Raphson. Un

aspecto interesante, también introducido, es la interpretación del modelo en un contexto de multi-escalas.

Este nuevo elemento goza de ciertas características favorables, las cuales se detallan a continuación:

- posee buen comportamiento en la fase pre-bifurcación dado que la estrategia de estabilización mantiene estable la evolución de la presión.
- posee buen comportamiento en la fase post-bifurcación dado que se activa una cinemática enriquecida con modos discontinuos embebidos, permitiendo una descripción realista del mecanismo de falla típico de banda de corte.
- los dos puntos anteriores hacen que el elemento tenga la habilidad de representar en forma adecuada el fenómeno de localización de deformaciones, propagación de discontinuidades en el medio y posterior modo de colapso estructural.
- en régimen de discontinuidad fuerte, la ley cohesiva proyectada sobre la interface de falla se corresponde a un modo de deslizamiento puro.
- la precisión del esquema *PGPSD* resulta comparable con otra estrategia de uso aceptado, basada en una tecnología de cuadrángulos de tipo *BBAR*, tanto en la predicción de la carga última como en el comportamiento post-crítico. No obstante, debe mencionarse la ventaja adicional de trabajar con elementos símplices de bajo orden.
- también se ha reportado buena concordancia en relación a una solución analítica en carga límite.
- mediante un análisis de convergencia en normas L^2 se ha demostrado que: (i) el elemento *PGPSD* posee mayor precisión y velocidad de convergencia que el triángulo estándar con discontinuidades fuertes embebidas y (ii) la solución predicha mediante la formulación propuesta, tanto en carga última como en trayectorias de equilibrio (carga-desplazamiento), converge hacia la obtenida con la estrategia *BBAR*.

Como contrapartida, el esfuerzo computacional relativo para los problemas bidimensionales estudiados, es (en promedio) aproximadamente un 35 % más costoso con respecto al cuadrángulo *BBAR*. No obstante, consideramos esta relación aceptable en función de las demás ventajas que introduce el modelo.

7.2. Aportes originales

Considerando lo expuesto anteriormente, las contribuciones originales de esta tesis pueden resumirse en la siguiente lista:

- formulación e implementación de una familia de modelos de daño escalar con teoría de gradientes (implícito) de deformación, [SSH03].

- desarrollo de algoritmos e implementación computacional optimizada de la tecnología $X-FEM$ en el contexto de la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo.
- estudio comparativo profundo entre los dos tipos de enriquecimiento cinemático con discontinuidades fuertes de vanguardia ($E-FEM$ y $X-FEM$) tendiente a cuantificar la performance relativa de ambas formulaciones. Este análisis brinda información valiosa en cuanto a tópicos de especial importancia en la mecánica de falla, como ser: robustez, precisión, medidas de error relativo, convergencia, velocidad de convergencia, costo computacional, [OHS, SOHS05].
- aplicaciones a problemas 3D y de multi fisuración en fractura cuasi frágil. En especial se destacan las primeras aportaciones relativas al estudio de sensibilidad paramétrica material en estructuras complejas, para la posterior estimación precisa de la probabilidad de falla, [PPL+05].
- estudio crítico del desempeño numérico de un esquema mixto estabilizado (PGP) direccionado para medir su comportamiento en problemas de localización de deformaciones en plasticidad. Dentro de este punto debe mencionarse además como aspecto novedoso, la implementación y evaluación de dicha metodología en un entorno de cálculo paralelo. Así mismo, otro aporte original es la aplicación de un nuevo preconditionador (ISP), al momento de resolver (iterativamente) el sistema lineal mediante descomposición de dominios, en la estrategia estabilizada, [SSH04b, SHS04].
- planteamiento teórico, desarrollo matemático, implementación y validación de una nueva familia de elementos finitos, denominada ($PGPSD$), para el modelado de mecanismos de tipo banda de corte en plasticidad, [SSHO06, SSH04a].

7.3. Posibles líneas de investigación a futuro

No existe en la actualidad un criterio racional que permita decidir cual es la estrategia que marcará el rumbo definitivo en la mecánica computacional de falla. Por ello estamos convencidos que aún existe un extenso camino por recorrer. Sin embargo, a partir de la experiencia obtenida durante el desarrollo de esta tesis, podemos vislumbrar algunas posibles alternativas de trabajo futuro basadas en las metodologías aquí discutidas. En líneas generales se puede plantear:

- aplicación de la $CSDA$ a modelos constitutivos de continuo más elaborados, analizando su correspondiente proyección sobre la interface de discontinuidad, para capturar con mayor nivel de aproximación la degradación y el modo de falla en materiales de comportamiento complejo, materiales compuestos, etc.
- extensión de las estrategias discutidas al contexto de la *Dinámica de Fractura*. En los últimos años, se ha notado un creciente interés hacia el desarrollo de esta promisoriosa línea de trabajo, fundado probablemente en su potencial aplicación industrial.

- análisis de las propiedades de estabilidad y nuevos desarrollos en relación al método de integración *implícito-explicito*. Resulta de especial interés proseguir con la formulación de algoritmos de control automático del error.

Así mismo, debemos enfatizar y reconocer que, a diferencia de los modelos para fractura frágil, aún existen limitaciones en cuanto al desarrollo de estrategias eficientes para simular falla dúctil y por lo tanto, se estima una mayor dedicación en el futuro próximo hacia este objetivo puntual. Posibles aspectos a tener en cuenta son:

- extensión del modelo *PGPSD* en el contexto general de grandes deformaciones plásticas.
- extensión del modelo *PGPSD* a tres dimensiones. A pesar de haber considerado sólo problemas planos, el presente trabajo contiene el fundamento conceptual y numérico para su aplicación a problemas 3D.
- generalización de la aproximación *PGPSD* para ecuaciones constitutivas capaces de incorporar modos mixtos de falla y no sólo de tipo deslizamiento, como se postula en esta tesis.
- extensión del método de integración *implícito-explicito* en mecánica de falla dúctil.
- es nuestro criterio que el modelado de ciertos fenómenos típicos de fractura dúctil no pueden ser alcanzados sólo con la utilización de modelos macroscópicos de fisura discreta cohesiva. Una opción viable es el planteamiento en multi-escalas, en el siguiente sentido: *(i)* las propiedades mecánicas de la ley cohesiva se derivan a partir de una *meso-escala*, considerando los mecanismos de deslizamiento en diferentes planos cristalinos y dislocaciones para caracterizar la plasticidad a ese nivel, en conjunción con *(ii)* un análisis estructural a nivel *macro-escala*, como por ejemplo el presentado en esta tesis, caracterizado por ecuaciones constitutivas fenomenológicas clásicas, tecnologías de elementos finitos enriquecidos, etc. Esta metodología representa un verdadero desafío en el contexto de la simulación computacional de falla.

Apéndice A

Modelo de daño con teoría de gradientes implícito

Se estudia en este anexo una clase particular de modelos constitutivos de daño con *teoría de gradientes* y su aplicación al modelado de materiales cuasi frágiles, [SSH03]. En este sentido, seguimos una formulación *implícita de gradientes*, la cual conserva en forma estricta la no localidad del problema [PGdBB01]. Se analiza además el desempeño de tal estrategia en dos ejemplos clásicos. Presentamos resultados en forma de curvas carga-desplazamiento y mapas de evolución de daño, comparando los mismos con soluciones numéricas alternativas y experimentales.

A.1. Introducción

La mecánica del continuo clásica o local introduce un conjunto de variables de estado capaces de describir explícitamente los procesos inelásticos responsables de la degradación. En este contexto, el modelado de la fractura material utiliza la mecánica de daño continuo como teoría subyacente, en la cual se introduce una variable auxiliar en la ecuación constitutiva, el daño, para representar el deterioro local de resistencia. Desde este punto de vista, la iniciación, crecimiento y propagación de una fisura surge entonces como un proceso natural a partir de la evolución de tal variable de daño hasta que su valor se torna crítico, donde se asume que el material es incapaz de soportar cualquier incremento de tensión.

No obstante, diversos estudios de estabilidad y bifurcación, muestran que la estrategia de daño local presenta severas inconsistencias para modelos con ablandamiento. Como se mencionó en el capítulo 2, una opción viable para mantener la buena postura del problema matemático es recurrir a generalizaciones de la mecánica del continuo estándar. Existen numerosas formulaciones que siguen esta filosofía. Los esquemas no locales pueden mencionarse como uno de los más populares [PCB87, BPC88, BL88]. En ellos deja de considerarse el principio de acción local, en consecuencia las variables en un punto material \boldsymbol{x} dependen de valores en un entorno del mismo. Para poder cuantificar tales variables (mecánicas o cinemáticas) se apela a integrales ponderadas dependientes de un parámetro de longitud interna l_c . En general, en la estimación de l_c , se consideran factores dependientes de heterogeneidades a nivel micro estructural.

Los esquemas de gradientes [Aif84b, PdBBdV96, dBM92], que en particular nos interesan, se basan en una idea similar, pero el argumento para introducir una longitud característica es distinto. En estos modelos, se utilizan gradientes de alto orden de las variables para reproducir la dependencia espacial (*no localidad*) y regularizar de esta forma la evolución de los mecanismos irreversibles.

Desde un punto de vista conceptual, la relación constitutiva para cada tipo de formulación, puede interpretarse mediante las expresiones siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})) \quad (\text{modelo local estándar}) \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \tilde{r}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \quad (\text{modelo no local}) \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \nabla \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}), \nabla r(\mathbf{x})) \quad (\text{modelo de gradientes}) \quad (\text{A.3})$$

en función del tensor de deformación ($\boldsymbol{\varepsilon}$) y variables internas (r), además hemos considerado que $(\tilde{\bullet})$ implica carácter no local en una variable arbitraria (\bullet) y $\boldsymbol{\xi}$ es cierto dominio alrededor del punto material \mathbf{x} en donde es posible ponderar las variables para incorporar la no localidad (ver figura A.1).

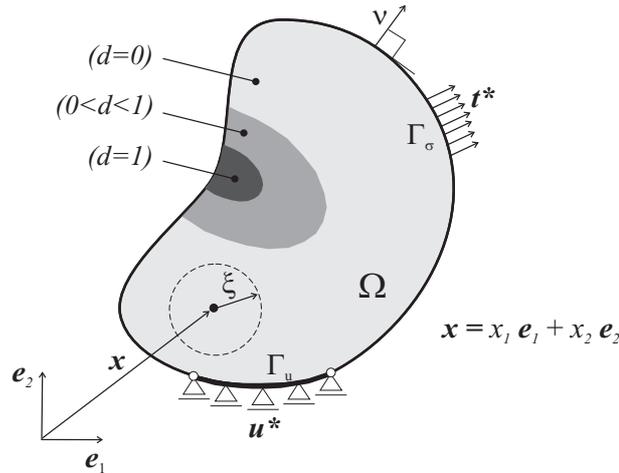


Figura A.1: Idealización del proceso de degradación material en términos de la variable de daño: $d \in [0, 1]$. Dominio de promediación $\boldsymbol{\xi}$ para incorporar no localidad

El objetivo de este anexo es caracterizar el comportamiento constitutivo de materiales frágiles con ablandamiento, considerando procesos de degradación por daño hasta alcanzar la fractura, haciendo uso de un modelo de continuo enriquecido. En esta línea de trabajo se ha implementado una formulación implícita de gradientes para modelos de daño con ablandamiento lineal y exponencial, siguiendo los trabajos de Borst et al. [dBM92], Peerlings et al. [PdBBdV96, PGdBB01, PdBBG02]. El esquema propuesto se valida numéricamente para dos problemas típicos. El primero de ellos corresponde al test de estiramiento uniaxial de una barra en estado plano de deformación, el segundo representa el problema de flexión de una viga apoyada en tres puntos bajo hipótesis de tensión plana.

A.2. Modelo de daño regularizado

Para no agregar complejidad, se utiliza la ley de daño escalar descrita en el capítulo 2 (sección 2.5) como marco de referencia teórico para los desarrollos siguientes. Su aplicación queda restringida entonces a problemas en los cuales pueden asumirse las siguientes hipótesis básicas: (i) las deformaciones plásticas son despreciables (comportamiento frágil), (ii) la evolución del daño es el mecanismo disipativo dominante, (iii) no se induce anisotropía material, (iv) deformaciones infinitesimales hasta alcanzar la fractura. Según este modelo, una única variable escalar $d \in [0; 1]$ es suficiente para describir completamente el proceso de degradación: $d = 0$ representa propiedades del sólido en estado virgen, $d = 1$ caracteriza la pérdida completa de integridad material, véase figura A.1. Recordamos que la función de degradación (ϕ) viene dada en términos de una medida de deformación *local*, la cual hemos denominado deformación equivalente (τ_ε), y su valor se computa mediante:

$$\tau_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon} \quad (\text{A.4})$$

La idea que incorporamos a continuación es una simple modificación a dicho criterio de daño, al postular que el mismo depende ahora de una variable interna con implicancia *no local*, $\tilde{\tau}_\varepsilon$, aún por definir. Esta hipótesis es precisamente la regularización que se introduce a nivel constitutivo para evitar que la localización de deformaciones y disipación de energía se produzca en un dominio de medida cero, como sí sucede en los modelos locales clásicos bajo régimen de ablandamiento.

Considerando las ecuaciones de equilibrio de Cauchy, el problema regularizado, en su forma fuerte, puede plantearse como sigue: dado $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ (fuerzas prescritas por unidad de superficie y desplazamientos impuestos respectivamente) encontrar el campo vectorial $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ tal que se verifique simultáneamente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (a) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u & \quad (b) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma & \quad (c) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u})^{sym} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (d) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\tau}_\varepsilon) & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (e) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Observación 34 *se han despreciado las fuerzas de volumen en el planteo de las ecuaciones de balance.*

Las expresiones que definen la ley constitutiva de daño regularizado A.5-(e) se han resumido, por practicidad, en el cuadro A.1.

Allí puede observarse que la variable interna r está gobernada por la deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$. Mientras $\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r < 0$ el material se comporta elásticamente y no hay evolución de los procesos disipativos. La condición $\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r = 0$ determina trivialmente el valor de la variable $r = \tilde{\tau}_\varepsilon$, cuando el estado tensional ha superado el umbral de daño. Teniendo en cuenta el valor inicial $r_0 = r|_{t=0} = q_0 = q|_{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$ se tiene:

$$r = \text{máx}\{\tilde{\tau}_\varepsilon, r_0\} \quad (\text{A.11})$$

Relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{q(r)}{r} \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - d(r)) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.6})$$

Criterio de degradación

$$\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = \tilde{\tau}_\varepsilon - r \leq 0 \quad (\text{A.7})$$

Ley de endurecimiento/ablandamiento

$$\dot{r} = \gamma \quad ; \quad r_0 = r|_{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{q} = H(r) \dot{r} \quad ; \quad q_0 = q|_{t=0} = r_0 \quad (\text{A.9})$$

Condiciones complementarias de carga-descarga

$$\phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\tilde{\tau}_\varepsilon, r) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cuadro A.1: Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar regularizado en términos una medida de deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\varepsilon$.

Si se incorpora una definición adecuada para $\tilde{\tau}_\varepsilon$ y se adopta además un mecanismo de ablandamiento dependiente del tipo de material (ecuación A.9), pueden evaluarse todas las variables del modelo con lo cual el sistema de ecuaciones A.5 queda íntegramente formulado.

A.3. Formulación del modelo con teoría de gradientes implícito

Las formulaciones de gradientes pueden deducirse a partir de teorías no locales. Para demostrar esto asumimos, como se discutió antes, que la evolución del daño en un punto \mathbf{x} está gobernada la medida $\tilde{\tau}_\varepsilon$ de la deformación, aquí denominada *deformación equivalente no local*. En este trabajo hemos considerado que $\tilde{\tau}_\varepsilon$ se define como el promedio ponderado de la deformación equivalente *local*, τ_ε , en un entorno de dicho punto:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{\Psi(\mathbf{x})} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1 \quad (\text{A.13})$$

donde $\boldsymbol{\xi}$ es un vector con origen en el punto \mathbf{x} que denota una bola alrededor del mismo, ver figura A.1, $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es una función de peso adecuada asociada a la longitud interna micro estructural l_c y $\Psi(\mathbf{x})$ una magnitud necesaria para propósitos de normalización.

Si se desarrolla la deformación equivalente local, $\tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi})$, en serie de Taylor y en un entorno de \mathbf{x} :

$$\tau_\varepsilon(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) + [\nabla\tau_\varepsilon(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2!} [\nabla\nabla\tau_\varepsilon(\mathbf{x})] : (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\xi}^3) \quad (\text{A.14})$$

y se reemplaza esta última ecuación en la expresión integral A.12, asumiendo condiciones de isotropía y despreciando términos de orden superior ($\mathcal{O}(\boldsymbol{\xi}^3)$), se llega a la clásica formulación explícita de gradientes:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) + c \nabla^2 \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{A.15})$$

Puede observarse que el parámetro de longitud interna material l_c , presente en el modelo no local, se preserva en el esquema de gradientes a través del coeficiente c , el cual posee en este caso, unidades de longitud al cuadrado. Tal coeficiente queda determinado por el promedio de las funciones de ponderación $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ en el volumen que genera $\boldsymbol{\xi}$.

Los modelos de gradientes asumen que $\tilde{\tau}_\varepsilon$ puede considerarse como una variable independiente adicional a resolver junto con el campo de desplazamientos. En este contexto, el tipo de aproximación que sugiere la ecuación A.15 para el cómputo de $\tilde{\tau}_\varepsilon$ resulta, sin embargo, inadecuada para implementaciones numéricas vía *MEF* ya que la presencia del operador laplaciano sobre la deformación equivalente local requiere funciones de interpolación con continuidad C^1 para el campo de desplazamiento. Esta desventaja puede salvarse mediante simples manipulaciones matemáticas, para finalmente obtener la forma implícita del modelo de gradientes [PdBBdV96]:

$$\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tau_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{A.16})$$

Considerando $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x})$ como una variable nodal independiente, que debe satisfacer la ecuación A.16, sólo se necesita continuidad C^0 para su aproximación. Desde el punto de vista matemático la ecuación diferencial extra de segundo orden, presente en el modelo de gradientes implícito, requiere la definición de condiciones de contorno sobre la variable $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x})$ o su derivada normal, para obtener unicidad de solución. Siguiendo los trabajos de Belytschko [LB88], Mühlhaus y Aifantis [MA91], se adopta una condición de borde natural del tipo:

$$\nabla \tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (\text{A.17})$$

Cabe mencionar que aún no se dispone de una justificación teórica estricta ni una correcta interpretación física sobre tales condiciones de contorno adicionales.

En vista de los conceptos discutidos, la forma fuerte del problema de daño con teoría de gradientes implícito se describe como: conocido $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, encontrar el campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y el campo escalar $\tilde{\tau}_\varepsilon(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ compatibles con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (a) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\mathbf{u}} & \quad (b) \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} & \quad (c) \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \mathbf{u})^{sym} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (d) \\
\boldsymbol{\sigma} &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (e) \\
\tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (f) \\
\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) &= \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} & \forall \mathbf{x} \in \Omega & \quad (g) \\
\nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu} &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma & \quad (h)
\end{aligned} \tag{A.18}$$

A.4. Implementación numérica

A.4.1. Discretización espacial

Siguiendo la metodología estándar del *MEF*, la forma variacional (débil) y discreta del modelo puede entonces expresarse: dado $\mathbf{t}^* : \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{u}^* : \Gamma_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, hallar el campo $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$ (que satisfaga las condiciones de contorno cinemáticas A.18-(b)) y el campo $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \in \Theta^h$, tal que:

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \tag{A.19}$$

$$\int_{\Omega} (\eta^h \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \eta^h \cdot c \nabla \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega = \int_{\Omega} (\eta^h \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h) d\Omega \quad \forall \eta^h \in \Theta_0^h \tag{A.20}$$

donde $\mathcal{V}_0^h \subset H_0^1(\Omega)$, $\Theta_0^h \subset H_0^1(\Omega)$, además \mathbf{w}^h y η^h son variaciones en el campo de desplazamiento y deformación equivalente no local respectivamente.

Observación 35 *el segundo término integral del lado izquierdo en la ecuación A.20 surge de debilitar $(-c \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ y considerar la condición de borde natural supuesta sobre $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (expresión A.18-(h))*

Si se utiliza nomenclatura matricial y se integra el modelo constitutivo mediante un esquema implícito, haciendo uso de un procedimiento de ensamble a nivel elemental, se obtiene la versión algorítmica de las ecuaciones para el paso de tiempo actual $(i + 1)$:

$$\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_{\mathbf{u}}^{eT} \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}) d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^e} (\mathbf{N}_{\mathbf{u}}^{eT} \mathbf{t}^{*(i+1)}) d\Gamma_{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{0} \tag{A.21}$$

$$\underbrace{\sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} \mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^e + \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} c \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^e) d\Omega^e}_{M_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} + D_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}} \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)} - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^{eT} \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i+1)}) d\Omega^e = \mathbf{0} \tag{A.22}$$

siendo \mathbf{N}_u^e y $\mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e$ los arreglos de funciones de forma para interpolar \mathbf{u} y $\tilde{\tau}_\epsilon$ respectivamente; el símbolo $(\hat{\bullet})$ representa valores nodales de una variable, en este caso $\hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)}$ es el vector de parámetros nodales de la deformación equivalente no local, el supraíndice e hace referencia a un elemento finito en particular. En A.21-A.22 definimos también los siguientes operadores: $\mathbf{B}_u^e = (\nabla \mathbf{N}_u^e)^{sym}$ y $\mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^e = (\nabla \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e)$.

Observación 36 *por claridad en la lectura, se ha quitado el supraíndice h que hace referencia a campos discretos.*

En forma compacta, el residuo $\mathbf{R}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(i+1)}$ del sistema de ecuaciones A.21-A.22 puede expresarse:

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(i+1)} = \mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)(i+1)} - \mathbf{F}^{(ext)(i+1)} = \mathbf{0} \quad (\text{A.23})$$

en función del vector de fuerzas internas generalizada $\mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)}$:

$$\mathbf{F}_{(\mathbf{u}, \tilde{\tau}_\epsilon)}^{(int)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \mathbf{F}_{\tilde{\tau}_\epsilon}^{(int)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_u^{eT} \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}) d\Omega^e \right] \\ (\mathbf{M}_{\tilde{\tau}} + \mathbf{D}_{\tilde{\tau}}) \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} - \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \tau_\epsilon^{(i+1)}) d\Omega^e \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

y el de fuerzas externas $\mathbf{F}^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ \mathbf{F}_{\tilde{\tau}_\epsilon}^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Gamma_\sigma^e} (\mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{t}^{*(i+1)}) d\Gamma_\sigma^e \right] \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

A.4.2. Retorno a la superficie de daño

La actualización del tensor de tensiones y el cálculo del operador tangente consistente se realiza siguiendo un esquema de Euler retrasado. En este contexto, el algoritmo de retorno a la superficie de daño puede formularse según el procedimiento que se resume en el cuadro A.2.

A.4.3. Módulo tangente algorítmico

Para la implementación del modelo en un esquema iterativo de Newton-Raphson, es necesario calcular la linealización exacta del esquema constitutivo. En este sentido la primera variación de la expresión de equilibrio y de la ecuación adicional de gradientes se plantea:

$$\delta \mathbf{F}_u^{(int)(i+1)} = \mathbf{K}_{uu} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} + \mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} \delta \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} \quad (\text{A.26})$$

$$\delta \mathbf{F}_{\tilde{\tau}}^{(int)(i+1)} = \mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} + \mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \delta \hat{\tau}_\epsilon^{(i+1)} \quad (\text{A.27})$$

Proyección elástica: Estado Trial	
$r_{trial}^{(i+1)} = r^{(i)} \quad ; \quad q_{trial}^{(i+1)} = q^{(i)} \quad ; \quad d_{trial}^{(i+1)} = d^{(i)}$	
$\phi_{trial}^{(i+1)} = \tilde{\tau}_{\varepsilon}^{(i+1)} - r^{(i)}$	
$\bar{\sigma}^{(i+1)} = \mathbf{C}^e : \varepsilon^{(i+1)} \quad ; \quad \tau_{\varepsilon}^{(i+1)} = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon}$	
si $\phi_{trial}^{(i+1)} \leq 0$ (paso elástico)	
$r^{(i+1)} = r^{(i)} \quad ; \quad q^{(i+1)} = q^{(i)} \quad ; \quad d^{(i+1)} = d^{(i)} \quad ; \quad \beta_1^{(i+1)} = 0$	
$\beta_2 = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$	
si $\phi_{trial}^{(i+1)} > 0$ (paso con evolución de daño)	
$r^{(i+1)} = \tilde{\tau}_{\varepsilon}^{(i+1)} \quad ; \quad \beta_1^{(i+1)} = 1$	
Ablandamiento Lineal	Ablandamiento exponencial
$q^{(i+1)} = q^{(i)} + H \Delta r$	$q^{(i+1)} = q_0 e^{\frac{H_0 [r^{(i+1)} - r_0]}{q_0}}$
$\beta_2^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$	$\beta_2^{(i+1)} = \frac{q^{(i+1)}}{r^{(i+1)}} \quad ; \quad \sigma^{(i+1)} = \beta_2 \bar{\sigma}^{(i+1)}$
$\beta_3^{(i+1)} = \frac{H_0 r^{(i+1)} - q^{(i+1)}}{[r^{(i+1)}]^2}$	$\beta_3^{(i+1)} = -\frac{q^{(i+1)}}{[r^{(i+1)}]^2} \left[-\frac{H_0 r^{(i+1)}}{q_0} + 1 \right]$

Cuadro A.2: Algoritmo de retorno a la superficie de daño para la formulación con gradientes implícito.

en donde se define:

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \beta_2^{(i+1)} \mathbf{C}^e \mathbf{B}_u^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^{eT} \beta_1^{(i+1)} \beta_3^{(i+1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \frac{1}{\tau_{\varepsilon}^{(i+1)}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(i+1)T} \mathbf{B}_u^e d\Omega^e \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^{eT} c \mathbf{B}_{\tilde{\tau}}^e + \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^{eT} \mathbf{N}_{\tilde{\tau}}^e) d\Omega^e \right] = \mathbf{D}_{\tilde{\tau}} + \mathbf{M}_{\tilde{\tau}} \quad (\text{A.31})$$

La forma explícita del tensor constitutivo algorítmico resulta en consecuencia:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\tilde{\tau}} \\ \mathbf{K}_{\tilde{\tau}u} & \mathbf{K}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

A.5. Resultados numéricos

Para los dos ejemplos reportados, se consideran elementos triangulares y cuadrangulares con interpolación cuadrática en desplazamientos y lineal en deformación equivalente no local.

A.5.1. Test de tracción

El problema consiste en estirar uniaxialmente una barra, bajo hipótesis de estado plano de deformación, hasta que el proceso de degradación por daño produzca la falla material. Los parámetros geométricos y mecánicos utilizados para la simulación numérica son (ver figura A.2): longitud de la barra $L = 100$ [mm], área $A = 10$ [mm²] (por unidad de longitud), tensión última $\sigma_y = 2$ [N/mm²], módulo de Young $E = 20000$ [N/mm²], ablandamiento lineal caracterizado por un módulo $H_0 = -0,008 = cte$ (disipación mecánica máxima $D_{mech} = 0,0125$ [N/mm²]).

Para activar el mecanismo de localización se perturba la región central de la barra en una longitud $l_p = 10$ [mm] en donde la tensión última se reduce un 10%. El parámetro longitud intrínseca micro estructural l_c está representado por un coeficiente $c = 1$ [mm²]. Por condiciones de simetría sólo se modela la mitad de la barra. En la figura A.3 se han dibujado curvas carga desplazamiento para distintos niveles de discretización (160, 320, 640 elementos cuadrangulares). Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Peerlings et al. [PdBBdV96] y claramente muestran convergencia a una solución con energía de fractura finita, conforme se refina la malla.

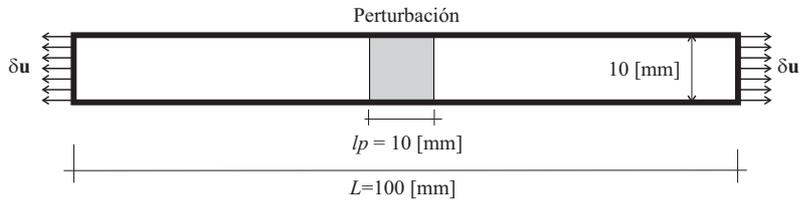


Figura A.2: Test de tracción uniaxial. Geometría del modelo.

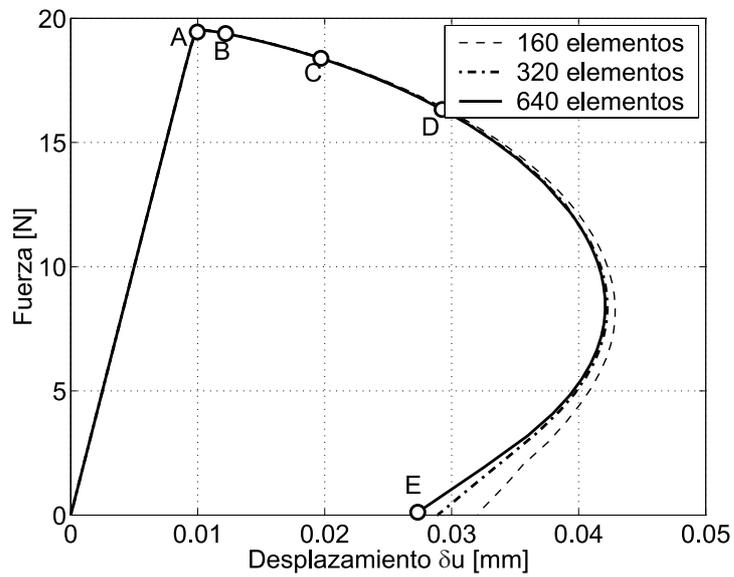


Figura A.3: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curva carga desplazamiento para distintas mallas.

La evolución de la variable interna de daño (d) y la deformación equivalente no local ($\tilde{\tau}_e$), sobre distintos puntos en la curva de equilibrio, puede observarse en la figura A.4, en la semi longituditud de la barra (test de 640 elementos).

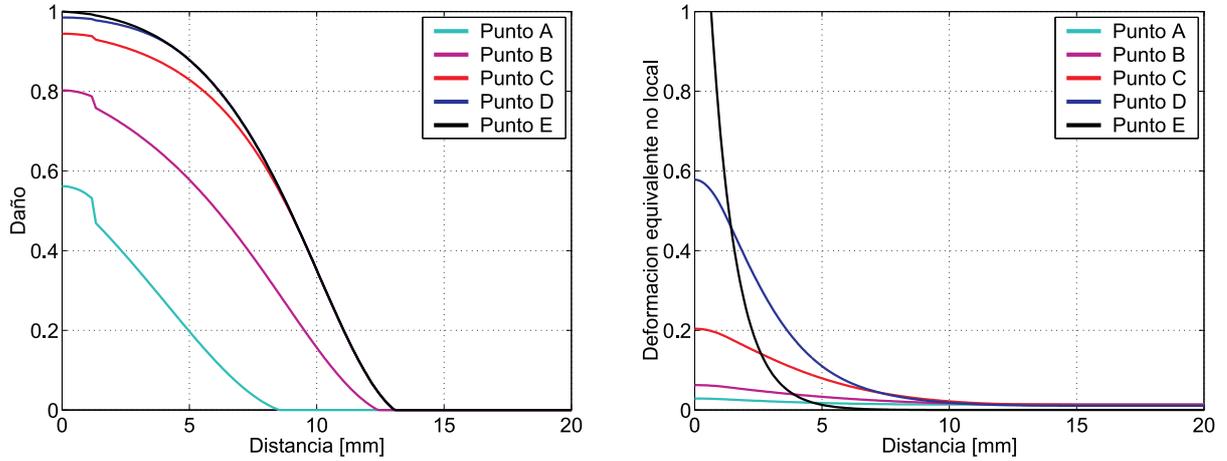


Figura A.4: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curvas de evolución: (a) Variable de daño d . (b) Deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_e$

Para este problema particular, la formulación de gradientes tiene la capacidad de capturar adecuadamente el proceso de incremento de deformación en la zona de localización y descarga elástica fuera de la misma.

A continuación asumimos la misma barra con idénticas características geométricas pero en este caso con un mecanismo de ablandamiento de tipo exponencial con un módulo inicial $H_0 = -0,016$. La curva de respuesta fuerza desplazamiento es significativamente diferente (ver figura A.5-(a)) respondiendo al tipo de ley impuesta.

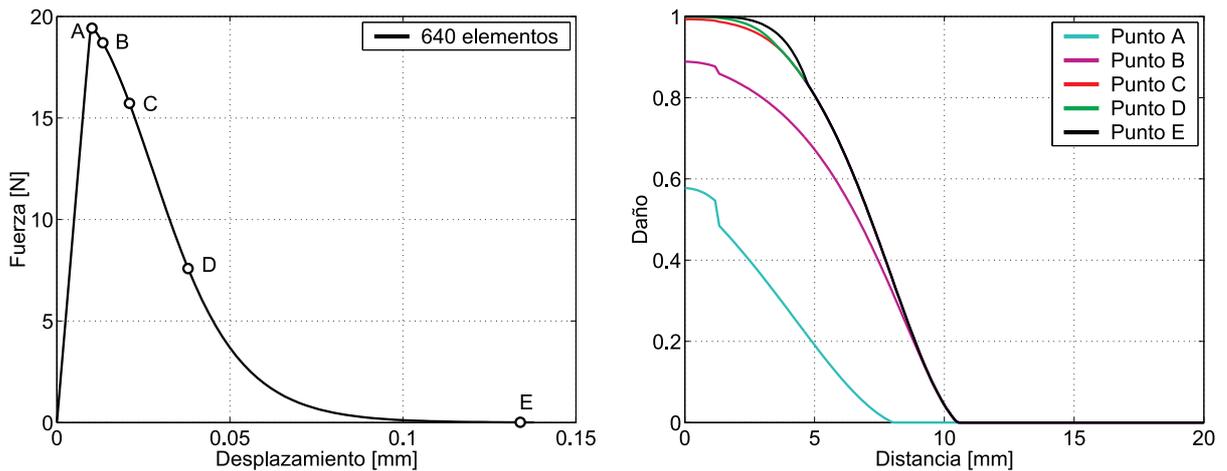


Figura A.5: Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento exponencial: (a) Curva de respuesta carga desplazamiento. (b) Curva de evolución de la variable de daño.

La figura A.5-(b) revela una falencia propia de la formulación. Como se observa, la curva de daño correspondiente al punto C ha alcanzado su valor máximo, sin embargo

a partir de ese momento incrementos de deformación producen un fenómeno de difusión del daño desde el centro hacia los extremos de la barra. Este mecanismo, físicamente inadmisibles, es consecuencia de una pobre descripción cinemática incapaz de capturar macro fisuras cuando la degradación material es completa. En estas circunstancias, la inclusión de una discontinuidad en desplazamientos parece ser una estrategia adecuada capaz de incorporar una condición de borde libre de tensiones y evitar el proceso de difusión espúreo del daño [SWS03].

A.5.2. Viga de tres puntos

Este ejemplo representa un test clásico de flexión en una viga sometida a fuerzas en tres puntos. El ensayo está especialmente diseñado para fomentar el modo I de fractura. El mismo consiste en una pieza de hormigón simplemente apoyada a la cual se le impone un desplazamiento vertical monótonamente creciente (δu) en correspondencia con una entalla practicada en la sección central de la viga, induciendo la iniciación del proceso de degradación y posterior desarrollo de fisura. Las proporciones geométricas del modelo pueden observarse en la figura A.6. Los parámetros mecánicos utilizados para el análisis son los siguientes: $E = 300000 [kg/cm^2]$, $\nu = 0,20$, $\sigma_y = 33 [kg/cm^2]$, $e = 5 [cm]$ (espesor de la viga). Desde el punto de vista constitutivo, el material se caracterizó teniendo en cuenta varios aspectos: un coeficiente $c = 0,01 [cm^2]$ (de acuerdo con los trabajos de M.G.D. Geers et al. [GdBP00]), un modelo de daño exponencial modificado para que la degradación se produzca sólo en tracción (ver capítulo 2, sección 2.6), y un módulo de ablandamiento por deformación $H_0 = -0,026$, estimado de forma tal que se verifique la energía de fractura correspondiente al material en estudio (aproximadamente $G_f = 0,120 [kg/cm]$).

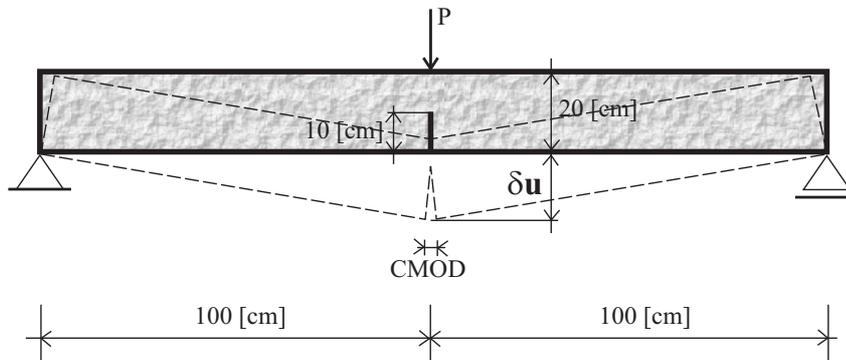


Figura A.6: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Geometría y condiciones de contorno del modelo.

La curva de respuesta obtenida, en términos de la carga P y desplazamiento de apertura *CMOD* (*Crack Mouth Opening Displacement*), se ajusta bastante bien a resultados experimentales y es comparable con otro tipo de aproximación basada en un modelo de discontinuidades fuertes como el discutido en el cuerpo de esta tesis (ver figura A.7).

En la figura A.8 puede observarse un detalle de la discretización en la zona próxima a la entalla y la posición deformada para el máximo desplazamiento impuesto. Un total de 2770 elementos triangulares se han utilizado para la simulación numérica.

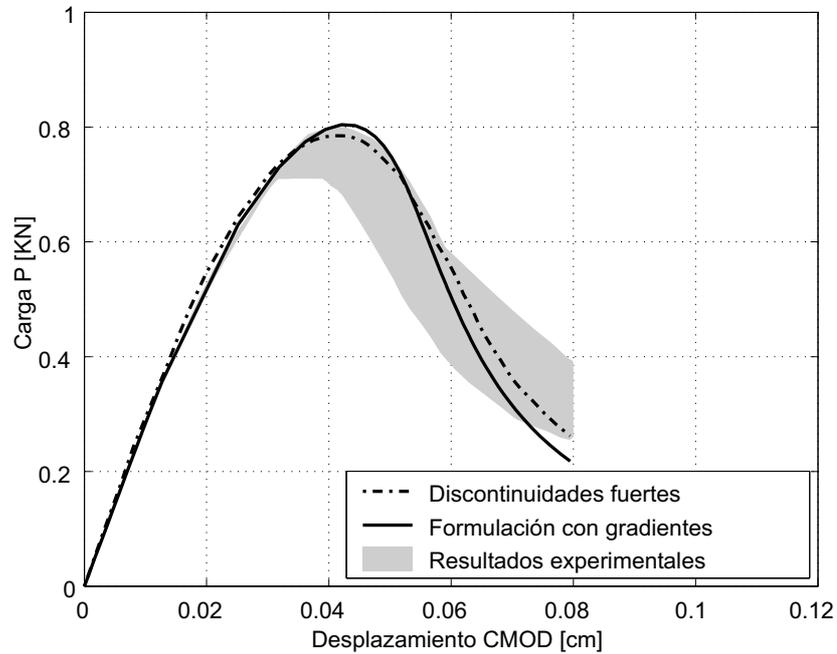


Figura A.7: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Carga P vs. Desplazamiento $CMOD$. Comparación de respuesta entre dos formulaciones alternativas y una envolvente experimental.

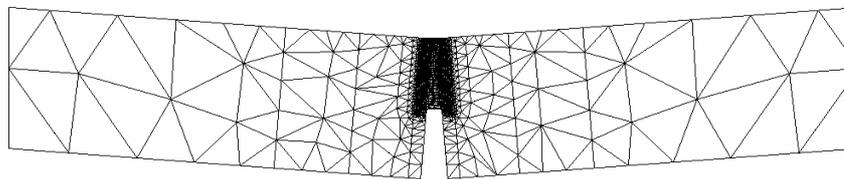


Figura A.8: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Malla de elementos finitos utilizada en la configuración deformada (≈ 2770 elementos).

La figura A.9 pone de manifiesto la capacidad de la formulación para predecir modos de propagación de fisura en función de la evolución de la variable interna de daño.

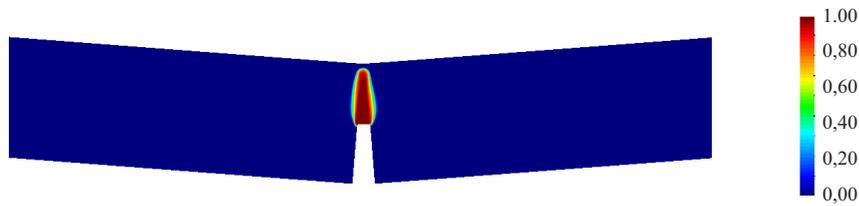


Figura A.9: Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Mapa de la variable de daño d para un estado avanzado de degradación.

A.6. Discusión

En este anexo se ha estudiado e implementado un modelo constitutivo de daño isotrópico con ablandamiento lineal y exponencial enriquecido con una formulación de gradientes implícita para simular numéricamente el comportamiento de materiales frágiles.

En vista de los resultados obtenidos puede decirse que el esquema resulta adecuado como limitador de localización, evita la pérdida de elipticidad en la ecuación de equilibrio incremental, predice modos de iniciación y propagación de fisura físicamente correctos; además, para un adecuado nivel de discretización (en general muy elevado), se obtiene objetividad en la respuesta. El valor de la carga límite y el comportamiento post-pico pueden ajustarse bastante bien a resultados experimentales en función de los parámetros que gobiernan el modelo.

Un aspecto importante a destacar es que la dirección de propagación de fisura surge en forma natural, a partir de la evolución de la variable de daño. Este hecho representa una ventaja frente a las clásicas formulaciones cohesivas discretas basadas en elementos con modos embebidos, en las cuales es necesario estimar a priori tal trayectoria de propagación.

Debe mencionarse la necesidad de una densidad de elementos importante para capturar en forma objetiva los gradientes de deformación durante el proceso de falla, hecho que se traduce en un costo computacional excesivo. En este aspecto debemos dejar en claro que desde el punto de vista de la eficiencia computacional y a partir del presente estudio, nuestra conclusión es que el modelo de gradientes desarrollado no puede competir con formulaciones de tipo discontinuidades fuertes, a igual nivel de precisión en resultados. Además, en problemas generales, dado que la trayectoria de discontinuidad no se conoce a priori, si se pretende ganar performance numérica se debe contemplar la posibilidad de acoplar algún esquema de remallado adaptativo.

Cuando la variable de degradación alcanza el valor unitario en algún punto del sólido, hemos notado un fenómeno de difusión espúrea del daño, evidenciada principalmente por el modelo con ablandamiento exponencial. Este fenómeno (ya reportado por otros investigadores) no tiene justificación física y, como consecuencia secundaria, restringe severamente la posibilidad avanzar sobre la curva de equilibrio, condición indispensable para modelar estructuras reales, en donde es común que durante la generación del mecanismo de falla, una porción del dominio se encuentre completamente sin resistencia.

En síntesis del presente análisis concluimos que la mecánica del continuo enriquecida con formulaciones de gradientes representa una estrategia adecuada para simular los procesos inelásticos en donde el mecanismo predominante es la degradación material y la micro fisuración asociada. Cuando tales micro-fisuras coalescen y originan macro fisuras la cinemática subyacente del continuo resulta demasiado limitada para capturar la realidad física. Este inconveniente sugiere la necesidad de introducir de forma explícita en el modelo numérico una discontinuidad. Algunos investigadores ya han insinuado la incorporación de una cinemática discontinua en medios regularizados [SWS03, SS04, CMP04], resultando en una línea de investigación factible.

Apéndice B

Estabilización mediante sub-escalas ortogonales

En este apartado se pretende deducir el término de estabilización del esquema *PGP* (\mathcal{S}_{st}^{PGP}) en el contexto teórico del método de las sub escalas o multi escalas (*sub-grid scales*) brindando una justificación conceptual y variacionalmente consistente de la técnica de estabilización introducida. La idea original de esta estrategia fue inicialmente propuesta por Hughes [Hug95] para resolver ecuaciones escalares del tipo convección-difusión.

B.1. Método de sub escalas

Resolver un problema por el método de elementos finitos consiste en encontrar dentro de un espacio de dimensión finita $\mathcal{V}^h \subset H^1_{(\Omega)}$ la mejor aproximación a la solución matemática del modelo continuo. Dicho espacio discreto \mathcal{V}^h queda definido en términos de la cantidad de grados de libertad adoptado y del orden de interpolación de los elementos. Esto implica que, una vez seleccionados estos dos ingredientes básicos del *MEF* (discretización y tipo de función de interpolación), queda definido un nivel de aproximación o *escala*, que se denominará de aquí en adelante la escala de elementos finitos \mathbb{E}^h , capaz de capturar una parte de la solución real. En muchos problemas prácticos, la escala \mathbb{E}^h dispone suficiente cantidad de información de tal forma que el modelo formulado sólo en términos de ésta brinda resultados satisfactorios. Por el contrario, en otras situaciones \mathbb{E}^h resulta sobre restringida, ante ciertas características particulares cinemáticas del continuo, siendo imposible representar el comportamiento físicamente observable del material.

En este sentido, la idea subyacente que introduce el método de las sub escalas consiste en incorporar explícitamente una nueva escala al problema \mathbb{E}^s (sub escala) para aproximar aquella fracción de la solución que no pertenece a \mathbb{E}^h y por ende no se puede capturar por un modelo simple de elementos finitos. En otras palabras, se asume la existencia de una componente no resuelta y por ello se enriquece el espacio discreto de aproximación para al menos lograr capturar los efectos de \mathbb{E}^s sobre la escala que sí se resuelve numéricamente. Esta metodología es absolutamente general y de hecho se la ha utilizado en diferentes contextos en la mecánica del continuo (problemas de restricción por incompresibilidad, localización de deformaciones, etc).

Para nuestro caso en particular, es bien sabido que al utilizar formulaciones mixtas con

igual orden de interpolación en las variables primales (\mathbf{u}, p) , el espacio de aproximación del campo de desplazamientos resulta demasiado limitado comparado con el de presiones, obteniéndose como consecuencia final resultados numéricos oscilatorios. Una alternativa lógica podría ser la introducción de una sub escala adicional en el campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Se asume entonces que el campo de desplazamientos del continuo tiene dos componentes, una asociada a la escala discreta \mathbb{E}^h (gruesa) y la otra vinculada a la sub escala \mathbb{E}^s (fina). Luego para que la estrategia numérica capture en forma adecuada el comportamiento real, se hace necesario aproximar consistentemente \mathbb{E}^h y \mathbb{E}^s . La escala gruesa \mathbb{E}^h puede resolverse mediante interpolación estándar de elementos finitos, sin embargo no resulta tan evidente como aproximar \mathbb{E}^s . De hecho en la practica nos conformamos con proponer un espacio para \mathbb{E}^s (aquí referenciado como \mathcal{V}^s) que al menos incluya localmente (a nivel de cada elemento finito) los *efectos* de la escala fina en la solución. En este apartado se introducen las hipótesis y simplificaciones básicas adoptadas para tal fin.

A partir de estas ideas surge que el espacio en donde ha de buscarse la solución al problema tiene la forma:

$$\mathcal{V} \approx \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.1})$$

teniendo en cuenta que la sub escala no aporta enriquecimiento en la frontera Γ , de allí la simbología \mathcal{V}_0^s . En la expresión anterior se ha considerado:

$$\mathcal{V}^h \subset H_{(\Omega)}^1 ; \mathcal{V}^h : \text{espacio discreto estándar de } EF \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{V}_0^s \subset \Psi ; \mathcal{V}_0^s : \text{espacio discreto de la sub escala} \quad (\text{B.3})$$

donde Ψ^1 es un espacio, aún por definir, pensado para incorporar la fracción de la solución que no está incluida en $H_{(\Omega)}^1$.

El campo de desplazamientos se aproxima entonces considerando dos componentes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s \quad (\text{B.4})$$

definiendo:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} ; \mathbf{u} : \text{campo de desplazamiento discreto total} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h ; \mathbf{u}^h : \text{componente asociada a la escala gruesa } \mathbb{E}^h \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^s ; \mathbf{u}^s : \text{componente asociada a la escala fina } \mathbb{E}^s, \mathbf{u}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

Con el mismo razonamiento, se construyen las variaciones admisibles de \mathbf{u} de la forma:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^h + \mathbf{w}^s \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 ; \mathbf{w} : \text{variación admisible de desplazamiento} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h ; \mathbf{w}^h : \text{variación admisible en } \mathbb{E}^h, \mathbf{w}^h|_{(\mathbf{x} \in \Gamma_u)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s ; \mathbf{w}^s : \text{variación admisible en } \mathbb{E}^s, \mathbf{w}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

¹Como se demuestra en este anexo, la elección de Ψ será consistente con el criterio siguiente: $\Psi \perp H_{(\Omega)}^1$

donde como es natural se tiene además:

$$\mathcal{V}_0 \approx \mathcal{V}_0^h \oplus \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.12})$$

Los conceptos discutidos hasta el momento se representan gráficamente en la figura B.1. Allí se observa la curva de respuesta del modelo parametrizada en función del tiempo $t \in [0, T]$, y en particular el vector solución $\mathbf{u}(t)$ en un instante dado de la historia de carga, en el espacio ampliado $\mathcal{V} = \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}_0^s$.

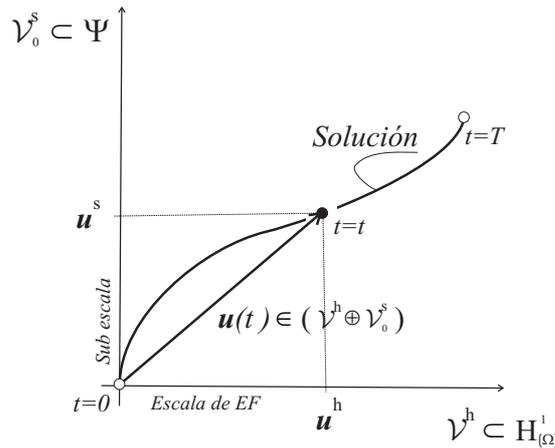


Figura B.1: Representación esquemática del método de sub escalas en el espacio $\mathcal{V}^h - \mathcal{V}_0^s$

Observación 37 *se puede advertir que, en este contexto de análisis, no se considera enriquecimiento alguno para el campo de presiones, pero en teoría podría también incorporarse.*

La versión integral del problema mecánico mixto 5.8, considerando la introducción de la sub escala \mathbb{E}^s puede plantearse en un formato variacional clásico como sigue: encontrar los campos discretos $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$, $\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^s$ y $p^h \in \mathcal{Q}^h$ tal que se satisfaga:

$$\langle \mathbf{w}^h ; \nabla \cdot [-p^h \mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s)] \rangle + \langle \mathbf{w}^h ; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.13})$$

$$\langle \mathbf{w}^s ; \nabla \cdot [-p^h \mathbf{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s)] \rangle + \langle \mathbf{w}^s ; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.14})$$

$$\langle q^h ; \frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s) \rangle = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.15})$$

observándose que las ecuaciones B.13 y B.15 están definidas en el espacio de elementos finitos, mientras que B.14 en el de la sub escala.

Una primera hipótesis a introducir es que el tensor desviador de tensiones puede escribirse como la suma de dos componentes: una inducida sólo por la escala \mathbb{E}^h y la otra sólo inducida por la sub escala \mathbb{E}^s , estando ambas desacopladas:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^s) \approx \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) + \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) = 2\mu \text{dev}[(\nabla \mathbf{u}^h)^{sym} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p^h}] \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) = 2\mu \text{dev}[(\nabla \mathbf{u}^s)^{sym}] \quad (\text{B.18})$$

Observación 38 la propuesta B.16 es lícita en régimen elástico. Como es sabido, en plasticidad la función tensorial \mathbf{S} no es lineal en \mathbf{u} con lo cual la expresión anterior deja de ser estrictamente cierta. No obstante, si consideramos a \mathbf{u}^s como una pequeña perturbación del campo \mathbf{u}^h , es decir $\|\mathbf{u}^s\| \ll \|\mathbf{u}^h\|$ (el efecto de la sub escala es de orden $\mathbf{u}^s \approx \mathcal{O}(h^2)$ Codina [Cod00b]), es razonable admitir que la sub escala de desplazamiento no genera deformaciones plásticas, o bien que las mismas son despreciables frente a las inducidas por \mathbf{u}^h , con lo cual la aproximación B.16 conserva sentido aun en el campo inelástico. Una justificación alternativa puede encontrarse en [CCVdS03].

Observación 39 una importante consecuencia de la simplificación introducida es que $\mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h)$ puede evaluarse mediante un algoritmo estándar de retorno a la superficie de fluencia, ya que sólo depende del campo de desplazamiento asociado a la escala \mathbb{E}^h .

Teniendo en cuenta B.16, las ecuaciones B.13 (previa integración por partes), B.14 y B.15 pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} & \langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle + \underbrace{\langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^1} - \\ & - \langle \nabla \cdot \mathbf{w}^h; p^h \rangle - \langle \mathbf{w}^h; \mathbf{b} \rangle - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_\sigma = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\langle \mathbf{w}^s; \nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle + \langle \mathbf{w}^s; \nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s) \rangle - \langle \mathbf{w}^s; \nabla p^h \rangle + \langle \mathbf{w}^s; \mathbf{b} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.20})$$

$$\langle q^h; \left(\frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h \right) \rangle + \underbrace{\langle q^h; \nabla \cdot \mathbf{u}^s \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^2} = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.21})$$

Salvo por la presencia de los dos términos adicionales \mathcal{S}_{st}^1 y \mathcal{S}_{st}^2 , las formas integrales B.19 y B.21 corresponden a la aproximación usual de elementos finitos para un problema mixto (nótese que están definidas sobre los espacios \mathcal{V}^h y \mathcal{Q}^h). Estos son precisamente términos de estabilización, responsables de incluir el efecto de la sub escala sobre la solución discreta estándar del MEF. Por otro lado, la ecuación B.20 asociada a \mathbb{E}^s , se utiliza como restricción adicional para aproximar \mathbf{u}^s , con lo cual el problema completo queda definido, al menos desde un punto de vista conceptual.

Para llegar a las expresiones finales del esquema PGP, discutidas en el capítulo 5 sección 5.3.1, aún se hace necesario introducir algunas hipótesis simplificativas y operar matemáticamente sobre el sistema B.19-B.21. Debe enfatizarse que el objeto fundamental de estas aproximaciones es obtener una estimación computacionalmente factible de los efectos que introduce la sub escala en la formulación, sin que ello implique la necesidad de calcular exactamente \mathbf{u}^s . Las consideraciones que se detallan a continuación, y hasta el final del apéndice, siguen esta filosofía.

El término \mathcal{S}_{st}^1 , teniendo en cuenta B.18, se puede escribir:

$$\mathcal{S}_{st}^1 = \langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; 2\mu dev[(\nabla \mathbf{u}^s)^{sym}] \rangle \quad (\text{B.22})$$

$$= -\langle \nabla \cdot \{2\mu dev[(\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}]\}; \mathbf{u}^s \rangle + \int_{\Gamma} [\mathbf{u}^s \cdot (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} \cdot \boldsymbol{\nu}] d\Gamma \quad (\text{B.23})$$

luego si se utiliza interpolación lineal por tramos para \mathbf{u}^h (y en consecuencia para \mathbf{w}^h), como el caso presente, y recordando que $\mathbf{u}^s|_{(\mathbf{x} \in \Gamma)} = 0$, se concluye trivialmente que \mathcal{S}_{st}^1 no tiene influencia en la formulación, con lo cual la expresión B.19 representa el balance de momento lineal estándar. Dicho de otra forma, en este contexto de análisis no existe estabilización en la ecuación de equilibrio clásica.

Observación 40 *el término \mathcal{S}_{st}^1 no se anula al utilizar espacios discretos de mayor orden, en tales situaciones es necesaria su correcta evaluación.*

Un punto clave en el planteamiento formal de esta metodología es conservar el carácter *fuerte* (en el sentido de no aplicar integración por partes) en la ecuación B.20. Este hecho aporta varias consecuencias favorables, a saber:

- permite escribir B.20 de una forma alternativa:

$$\langle \mathbf{w}^s ; \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s)}_{\mathcal{L}(\mathbf{u}^s)} \rangle = - \langle \mathbf{w}^s ; \underbrace{[\nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) - \nabla p^h + \mathbf{b}]}_{\mathbf{r}^h} \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^s \quad (\text{B.24})$$

donde se observa claramente que $\nabla \cdot \mathbf{S}^s(\mathbf{u}^s)$ (y por lo tanto \mathbf{u}^s) depende en cierta medida de la proyección del residuo obtenido a partir de la escala de elementos finitos \mathbf{r}^h , sobre el espacio de la sub escala \mathcal{V}_0^s .

- permite, basándose en la misma justificación expuesta anteriormente, anular el término $\langle \mathbf{w}^s ; \nabla \cdot \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle$, al utilizar interpolación lineal para \mathbf{u}^h .
- dado que el campo \mathbf{u}^s está afectado por una doble diferenciación espacial, aquí representada por la aplicación $\mathcal{L}(\mathbf{u}^s)$, es posible introducir localmente (a nivel de cada elemento finito) una aproximación de la forma:

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{u}^s) \approx -\boldsymbol{\tau}_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \quad (\text{B.25})$$

donde $\boldsymbol{\tau}_e$ es una matriz de estabilización, que según el razonamiento siguiente (véase B.26), dependerá en forma proporcional a h_e^2 , siendo h_e una medida característica de cada elemento:

$$\|\nabla \cdot \mathbf{S}_e^s\| = \|\nabla \cdot [2\mu \operatorname{dev}(\nabla^{\operatorname{sym}} \mathbf{u}_e^s)]\| \approx \underbrace{\frac{\alpha 2\mu}{h_e^2}}_{\boldsymbol{\tau}_e^{-1}} \|\mathbf{u}_e^s\| \quad (\text{B.26})$$

Un formato muy utilizado para el operador $\boldsymbol{\tau}_e$ y que ha generado resultados satisfactorios es simplemente:

$$\boldsymbol{\tau}_e = \operatorname{diag}(\tau_e, \dots, \tau_e) \quad (\text{B.27})$$

definiendo τ_e como sigue:

$$\tau_e = c \frac{h_e^2}{2\mu^*} \quad (\text{B.28})$$

donde $c \approx \mathcal{O}(1)$ es un coeficiente de estabilidad y μ^* el módulo de corte secante. Debe aclararse que desde el punto de vista computacional τ_e es un parámetro robusto, en el sentido que variaciones del coeficiente c (dentro del orden establecido $\mathcal{O}(1)$), no tienen un impacto significativo en la respuesta. En Codina [Cod00b] puede encontrarse un estudio basado en análisis de Fourier para deducir valores admisibles del parámetro τ_e .

B.2. Método de sub escalas ortogonales

Hasta el momento, nada se ha dicho con relación a qué criterio debe adoptarse para estimar el campo \mathbf{u}^s y dar un formato definitivo al segundo término de estabilización \mathcal{S}_{st}^2 en B.21. Si bien existen diversas alternativas, una elección natural para generar el espacio complementario \mathcal{V}_0^s , de la sub escala \mathbb{E}^s , es proponer que éste resulte ortogonal al espacio de elementos finitos \mathcal{V}^h . De este modo surge el procedimiento de estabilización denominado *Método de Sub Escalas Ortogonales (Orthogonal Sub Scales (OSS))* [Cod00a].

En esta metodología se considera entonces que:

$$\mathcal{V}_0^s \perp \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{V}_0^s \approx \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.30})$$

donde \mathcal{V}_0^s es el espacio complementario ortogonal al de elementos finitos. La sub escala \mathbf{u}^s y su variación admisible \mathbf{w}^s quedan definidas mediante:

$$\mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.31})$$

$$\mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.32})$$

Por practicidad se introducen los operadores de proyección sobre \mathcal{V}^h y $\mathcal{V}^{h\perp}$ de la forma:

$$P^h\{\mathbf{u}\} = \mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.33})$$

$$P^{h\perp}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{u}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.34})$$

$$P^{h\perp}\{(\bullet)\} = (\bullet) - P^h\{(\bullet)\} \quad (\text{B.35})$$

Si además se asume, como es usual, que el campo de fuerzas de volumen \mathbf{b} puede ser descrito completamente en el espacio \mathcal{V}^h :

$$P^{h\perp}\{\mathbf{b}\} = 0 \quad (\text{B.36})$$

la ecuación B.20, considerando el conjunto de hipótesis enunciadas e introduciendo un proceso de ensamble de términos integrales evaluados a nivel de cada elemento finito, se puede expresar como:

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \mathbf{r}_e^h \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.37})$$

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; -\nabla p_e^h \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.38})$$

$$\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; \tau_e^{-1} \mathbf{u}_e^s \rangle = \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \mathbf{w}_e^s; P^{h\perp} \{-\nabla p_e^h\} \rangle \quad \forall \mathbf{w}^s \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.39})$$

de donde surge trivialmente que la definición del campo de desplazamiento asociado a la sub escala responde a la forma:

$$\mathbf{u}_e^s = \tau_e P^{h\perp} \{-\nabla p_e^h\} = -\tau_e (\nabla p_e^h - P^h \{\nabla p_e^h\}) \in \mathcal{V}_0^{h\perp} \quad (\text{B.40})$$

Observación 41 de acuerdo con B.37, \mathbf{u}^s es la proyección del residuo \mathbf{r}^h sobre el espacio ortogonal a EF , a menos de un factor de escala. Según las consideraciones introducidas, únicamente la componente ∇p^h interviene en tal proyección, véase B.38.

Observación 42 la componente \mathbf{u}^s no necesariamente es continua a través de los contornos elementales. Para obtener las ecuaciones finales B.37-B.39 debe considerarse sólo la contribución de la sub escala en el interior de los elementos, despreciando las integrales entre las interfaces de los mismos.

El campo de gradiente de presión proyectado sobre el espacio de elementos finitos, $P^h \{\nabla p^h\}$, se incorpora como una nueva variable independiente, referenciada por simplicidad como:

$$\mathbf{\Pi}^h = P^h \{\nabla p^h\} \quad ; \quad \mathbf{\Pi}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.41})$$

la cual también se aproxima por interpolación lineal a trozos.

Reemplazando la ecuación B.40 en B.21 y debilitando el término \mathcal{S}_{st}^2 se obtiene:

$$\langle q^h; \nabla \cdot \mathbf{u}^h \rangle + \langle q^h; \frac{p^h}{\kappa} \rangle + \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q^h; \tau_e (\nabla p_e^h - \mathbf{\Pi}_e^h) \rangle}_{\mathcal{S}_{st}^{PGP}} = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.42})$$

Finalmente, la formulación mixta estabilizada puede describirse en los siguientes términos: encontrar $(\mathbf{u}^h, p^h, \mathbf{\Pi}^h) \in (\mathcal{V}^h \times \mathcal{Q}^h \times \mathcal{V}^h)$ tal que se satisfaga:

$$\langle (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym}; \mathbf{S}^h(\mathbf{u}^h) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{w}^h; p^h \rangle - \langle \mathbf{w}^h; \rho \mathbf{b} \rangle = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{w}^h \cdot \mathbf{t}^*) d\Gamma_\sigma \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad (\text{B.43})$$

$$\langle q^h; \frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h \rangle + \bigwedge_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q^h; \tau_e (\nabla p_e^h - \mathbf{\Pi}_e^h) \rangle = 0 \quad \forall q^h \in \mathcal{Q}^h \quad (\text{B.44})$$

$$\langle \boldsymbol{\eta}^h; (\nabla p^h - \mathbf{\Pi}^h) \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h \quad (\text{B.45})$$

donde $\boldsymbol{\eta}^h$ es el campo de variaciones admisibles del gradiente de presión proyectado ($\boldsymbol{\eta}^h \equiv \delta \boldsymbol{\Pi}$). Obsérvese además que la ecuación B.45 es la que permite computar $\boldsymbol{\Pi}^h$ en forma consistente con el espacio complementario de la sub escala adoptado.

El sistema B.43-B.45 es precisamente aquel presentado y evaluado numéricamente en el capítulo 5.

De los aspectos discutidos en este apéndice se pueden enumerar algunas observaciones finales:

- el campo de la sub escala efectivamente tiene orden $\mathcal{O}(h_e^2)$, con lo cual su aporte cinemático decrece al refinar la malla.
- \boldsymbol{u}^s es lineal por tramos y discontinuo entre elementos.
- a pesar que \boldsymbol{u}^s se evalúa a nivel elemental no es posible condensarlo en forma estática.
- según las consideraciones hechas, sólo se incorpora estabilización en la ecuación de restricción volumétrica, mientras que el balance de cantidad de movimiento lineal se resuelve en forma estándar.
- si bien durante el procedimiento descrito pueden observarse ciertas hipótesis carentes de una justificación completamente consistente, debe considerarse también que al densificar la malla su “*posible*” influencia sobre la respuesta disminuye rápidamente. El fin que tienen tales simplificaciones es aproximar en forma eficiente el efecto de la sub escala para aliviar una restricción presente en la escala de EF (\mathbb{E}^h), sin que ello implique su evaluación exacta.

Apéndice C

Esquema *PGP*. Implementación en un entorno paralelo.

Para poder abordar eficazmente la simulación computacional de grandes problemas estructurales, es necesario utilizar estrategias numéricas de alta performance (*HPC: High Performance Computing*). Si bien el estudio de estas técnicas avanzadas no está estrechamente vinculado a la línea general seguida en la presente disertación, la tendencia actual seguida por la comunidad científica mundial durante los últimos años hacia este tipo de desarrollos, hace más que razonable su estudio. Se pretende con ello disponer de un fundamento conceptual introductorio para posibles desarrollos futuros en esta promisoriosa rama de la mecánica computacional.

Siguiendo tal filosofía, en este apartado se introducen los aspectos básicos de implementación del esquema mixto estabilizado *PGP* (discutido oportunamente en el capítulo 5) en un entorno de cálculo distribuido, [SSH04b, SHS04]. Como objetivo más ambicioso, y por ende fuera del alcance de este trabajo, se pretende formular todo un conjunto de algoritmos y estrategias numéricas para el modelado de fractura en materiales, haciendo uso de metodologías en paralelo.

C.1. Tópicos de implementación en paralelo

La plataforma de trabajo utilizada es un código general de elementos finitos en paralelo de propósito múltiple *PETSc-FEM* (Storti et al. [SNP]). Este es un software abierto que se encuentra en constante desarrollo en el *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)*.

PETSc-FEM corre en un cluster tipo Beowulf, haciendo uso de las librerías *PETSc* [BBG⁺01, BBG⁺02, BGMS97] para resolver operaciones de álgebra lineal, *MPI* [GLS95] como herramienta de comunicación entre procesadores y está basado en un paradigma de programación orientado a objetos. De hecho *PETSc-FEM* es una librería formada por un conjunto de aplicaciones desarrolladas para simular problemas de multi-física, como por ejemplo:

- ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes
- ecuaciones compresibles de Euler

- modelo de aguas poco profundas (*shallow water*)
- sistemas advectivos-difusivos generales
- ecuaciones de Laplace
- elasticidad
- y como aporte adicional, en el marco de esta tesis, se han agregado modelos de plasticidad junto con una formulación mixta estabilizada para resolver casos de incompresibilidad en mecánica de sólidos.

Cada una de estas aplicaciones puede dividirse conceptualmente en dos módulos: rutinas a nivel de los elementos y algoritmo principal.

En el primero de ellos se computan los vectores de estado, el residuo de las ecuaciones discretas y el jacobiano o matriz de rigidez consistente con la formulación. En este punto, la algoritmia a utilizar no logra diferenciarse en absoluto de un código secuencial.

En el segundo módulo, el algoritmo principal, se especifican características globales del problema a resolver (definiendo por ejemplo si es un caso lineal o no-lineal, estacionario o transitorio, etc), también a este nivel se ejecutan rutinas para lectura de malla, se ensamblan vectores y matrices globales de tipo *PETSc*, se verifica la convergencia, etc. En este sentido, la librería *PETSc* permite al usuario manipular estructuras de datos complejas, alocar información en cada nodo del cluster, como así también realizar llamadas a subrutinas de álgebra matricial (incluyendo solvers de sistemas de ecuaciones lineales), todo ello en un entorno de memoria distribuida y con la ventaja adicional de no tener que programar explícitamente en paralelo.

Básicamente, el flujo de cálculo se distribuye entre varios procesadores (*se paraleliza*) en dos puntos bien definidos dentro de la estrategia numérica global.

Como es sabido, en el contexto del *MEF* estándar, el cómputo de las variables en el interior de cada elemento está completamente desacoplado de los restantes, induciendo naturalmente un primer nivel de bifurcación en el cálculo. Para ello se hace necesario fraccionar la malla de manera tal que cada nodo contenga un patch (o grafo) de elementos y realice cuentas sobre ellos. En *PETSc-FEM*, esta subdivisión de la malla se realiza utilizando un particionador de grafos no estructurado (*METIS* [KK97]).

El otro punto clave de paralelización es al momento de factorizar el sistema de ecuaciones. En general para tal propósito se utilizan estrategias iterativas ya que los métodos directos de solución resultan extremadamente acoplados, con lo cual la excesiva comunicación entre procesadores hace disminuir drásticamente la eficiencia computacional, véase figura C.1.

Observación 43 *la introducción de una formulación mixta estabilizada, como el caso presente, incrementa el número de incógnitas a resolver, pero no varía la estructura básica del algoritmo paralelo descrito.*

C.2. Solución del sistema de ecuaciones

Nuestro estudio se restringe a analizar las propiedades de convergencia de métodos iterativos y costo computacional en paralelo para resolver el sistema de ecuaciones resultante del esquema mixto estabilizado *PGP*. Debe aclararse que dicha formulación resulta simétrica pero no necesariamente definida positiva. Los resultados mostrados en este anexo se corresponden a la solución del sistema monolítico 5.24, que por comodidad se describe a continuación:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^e(\hat{\mathbf{u}}^e) d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{H} \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{M}_u \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

es decir sin desacoplar el campo $\hat{\mathbf{I}}$, lo cual representa un desafío incluso mayor para el solver lineal. El hecho de evaluar monolíticamente C.1 nos ha permitido además verificar satisfactoriamente la metodología simplificada descrita en el capítulo 5 (sección 5.3.2) en términos cualitativos y cuantitativos.

En particular se analizan dos estrategias iterativas para resolver C.1:

- Estrategia *E-1*: procedimiento iterativo global, aquí referenciado como *GGMRES*, resolviendo el sistema completo de ecuaciones en paralelo utilizando *GMRES* (*Generalized Minimal Residual Method*).
- Estrategia *E-2*: método de Descomposición de Dominio (*DDM*). Se ha encontrado que, en cuanto a eficiencia computacional, las metodologías del tipo *DDM* son más adecuadas frente a los esquemas iterativos globales, especialmente para problemas grandes y mal condicionados. Esta técnica se basa en particionar el dominio completo en subdominios y distribuirlos entre los diferentes nodos, de tal forma que el procedimiento completo de cálculo pueda dividirse en dos fases: resolver las incógnitas internas en cada subdominio y resolver las incógnitas globales en las interfaces de los mismos. El sistema de incógnitas internas se resuelve localmente en cada procesador utilizando métodos directos (típicamente descomposición *LU*). Los grados de libertad en la interface forman parte de un sistema global, el cual se resuelve iterativamente utilizando nuevamente un esquema de tipo *GMRES*. Por lo expuesto, este procedimiento de cálculo se referencia de aquí en adelante como esquema *IISD* (*Interface-Iterativo/Subdominio-Directo*).

Observación 44 debe agregarse que, siguiendo la misma filosofía descrita anteriormente, a su vez cada subdominio en cada nodo del cluster puede resolverse utilizando nuevamente un Método de Descomposición de Dominios (*DDM*).

El requerimiento de memoria para el procedimiento iterativo global (*GGMRES*) y para Descomposición de Dominios (*DDM*) crece a medida que disminuye la tolerancia del

error admisible en la solución. *DDM* necesita mayores recursos de memoria (y tiempo de CPU) que *GGMRES* para tolerancias groseras. Sin embargo la tasa de crecimiento del consumo de memoria RAM (y del tiempo de CPU), al disminuir la tolerancia, es mayor para *GGMRES* comparado con *DDM*, como se muestra en la figura C.1. Luego, *DDM* resulta más eficiente cuando se requieren tolerancias más ajustadas, como suele suceder en aplicaciones prácticas, para mayor detalle véase además [SDP+03].

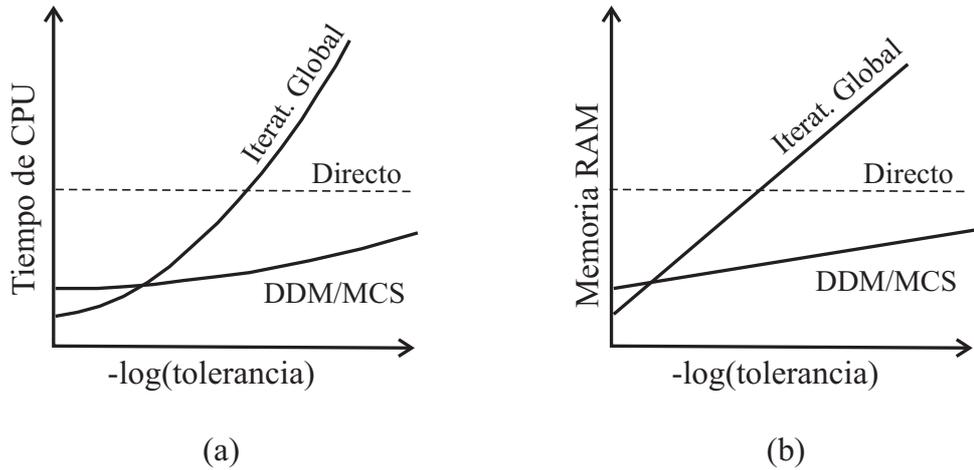


Figura C.1: Performance en paralelo para solvers directos e iterativos: (a) Tiempo de CPU para distintas estrategias de solución. (b) Consumo de memoria RAM para distintas estrategias de solución.

Como se mencionó, el hecho de fraccionar el dominio completo en subdominios no solapados origina un problema de interface cuya matriz representativa se denomina Matriz de Complemento de Schur (*MCS*). El tamaño del sistema de interface es mucho menor que el sistema global y por lo tanto se encuentra mejor condicionado. Aun así, para mejorar la performance computacional, el problema de interface puede *precondicionarse* con lo cual el número de condición de la *MCS* disminuye. En este sentido, aquí utilizamos un preconditionador denominado *ISP* (*Interface Strip Preconditioner*) recientemente desarrollado por Storti et al. [SDP+03], diseñado para métodos de descomposición de dominios. Éste está basado en resolver un problema sobre una delgada tira de nodos alrededor de las interfaces de los subdominios, de forma tal que las altas frecuencias del operador de Steklov¹ puedan capturarse correctamente. El preconditionador *ISP* requiere menos memoria y costo computacional que el clásico preconditionador Neumann-Neumann y sus variantes. Además el ancho de la tira de nodos puede utilizarse como un parámetro para decidir qué cantidad de memoria asignar para propósitos de preconditionamiento.

En este trabajo se ha extendido la aplicación de las estrategias *IISD/ISP* al contexto de la mecánica de sólidos, comparando además su performance con otros esquemas alternativos de solución y preconditionamiento.

¹Asumiendo que \mathcal{L} es el operador que gobierna el problema a nivel del continuo, el operador de Steklov es aquel que proyecta a \mathcal{L} sobre el espacio de la interface. La Matriz de Complemento de Schur representa la versión discreta tal proyección.

C.3. Test de elasticidad incompresible

El problema de elasticidad incompresible en 3D presentado en el capítulo 5, se estudia ahora desde el punto de vista de la eficiencia computacional en paralelo (para mayores detalles en cuanto a la descripción del ejemplo véase en particular la sección 5.4.2). Para su resolución se ha utilizado un conjunto de 9 procesadores *P4* 2,4 [GHz], 1 Gb-RAM DDR 333 [MHz].

En la figura C.2 se observan los dos modelos discretos de elementos finitos utilizados en el presente test, cada uno compuesto de aproximadamente 56000 y 90000 tetraedros lineales en $\hat{\mathbf{u}}$, \hat{p} y $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$ (desplazamiento, presión y gradiente de presión proyectado) respectivamente.

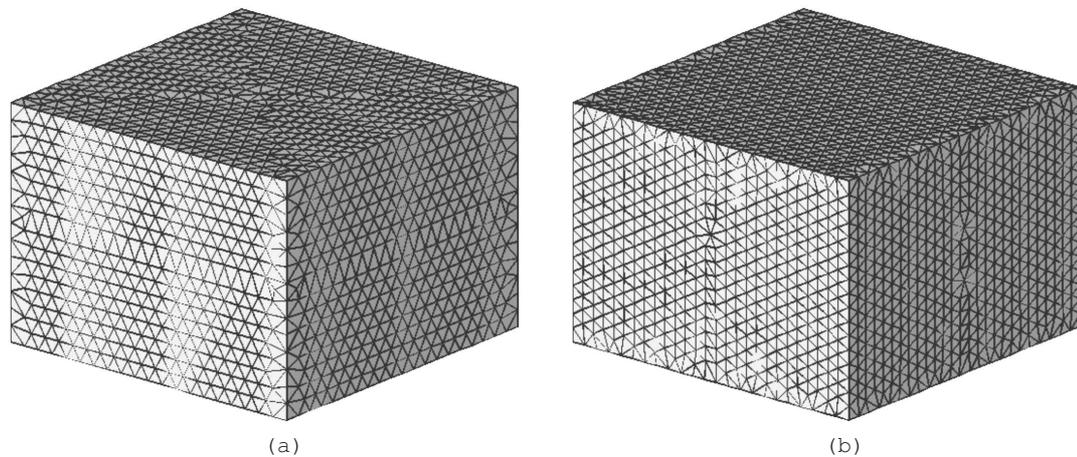


Figura C.2: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Mallas de elementos finitos: (a) 56000 elementos tetraédricos (b) 90000 elementos tetraédricos.

El análisis comparativo del costo computacional para resolver el sistema monolítico C.1, considera las dos estrategias ya mencionadas en la sección anterior. En el primer caso (*E-1: GGMRES*) se utiliza un preconditionador estándar *Jacobi*, mientras que en el segundo (*E-2: IISD*) se analiza la performance relativa del preconditionador *ISP*² con el de *Jacobi*.

En las figuras C.3 y C.4, se muestra el número de iteraciones requeridas por el solver lineal al reducir 10 órdenes de magnitud la norma relativa del residuo, para las dos mallas respectivamente. Las diferencias entre *IISD* y *GGMRES* son más que evidentes, véase también tabla C.1 y C.2.

Nótese que en el contexto de la estrategia *IISD*, el preconditionador *ISP* requiere menos iteraciones que el preconditionador estándar *Jacobi* en una relación prácticamente de 1/2 para ambas mallas, consecuentemente, el consumo de memoria para almacenar el espacio de Krylov generado disminuye. Este hecho por sí solo no implica necesariamente una mejor performance del algoritmo. Sin embargo cuando comparamos tiempos totales de CPU, en las tablas C.1 y C.2, se observa una mejora de aproximadamente 12% entre *ISP* y *Jacobi*. Si bien actualmente todavía se está trabajando para lograr una implementación

²En este ejemplo adoptamos para el preconditionador *ISP* un ancho de banda de nodos unitario

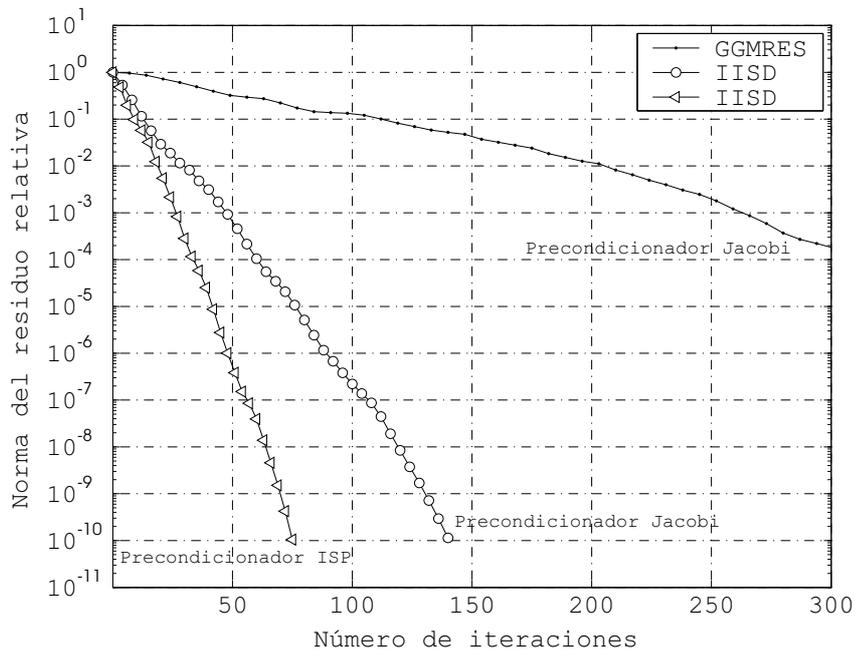


Figura C.3: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 56000 elementos.

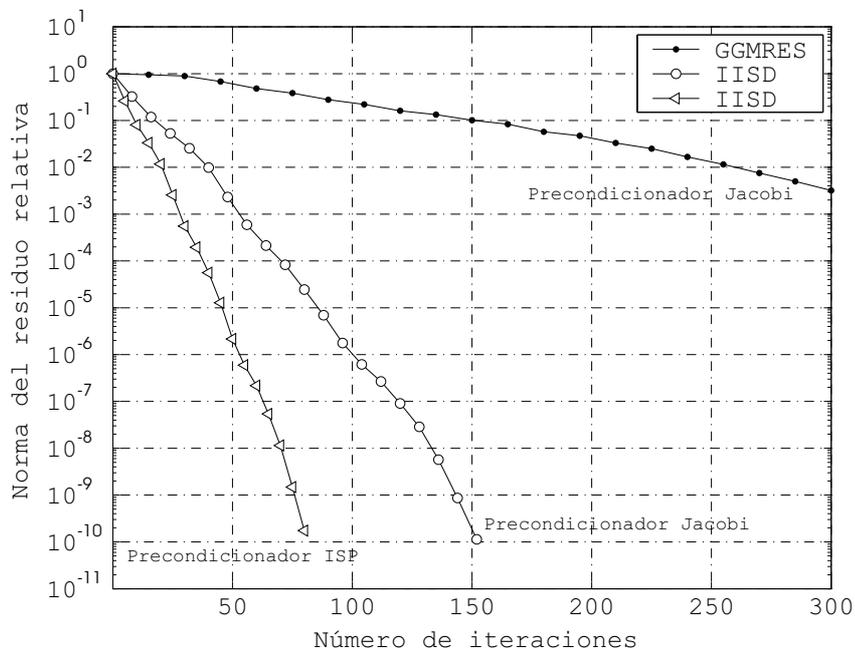


Figura C.4: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 90000 elementos.

más eficiente del preconditionador *ISP*, los resultados mostrados en este apéndice son alentadores.

Estrategia de solución	Precondicionador	Tiempos Absolutos	Tiempos Relativos
<i>GGMRES</i>	<i>Jacobi</i>	64,85 [seg]	3,33
<i>IISD</i>	<i>Jacobi</i>	19,47 [seg]	1,00
<i>IISD</i>	<i>ISP</i>	16,93 [seg]	0,87

Cuadro C.1: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia *IISD-Jacobi*. Test con 56000 elementos

Estrategia de solución	Precondicionador	Tiempos Absolutos	Tiempos Relativos
<i>GGMRES</i>	<i>Jacobi</i>	197,02 [seg]	3,83
<i>IISD</i>	<i>Jacobi</i>	51,49 [seg]	1,00
<i>IISD</i>	<i>ISP</i>	45,99 [seg]	0,89

Cuadro C.2: Modelo *PGP*, performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia *IISD-Jacobi*. Test con 90000 elementos

Apéndice D

Aplicación de la *CSDA* al análisis de vulnerabilidad estructural.

En este anexo se reportan resultados parciales de una línea de investigación aún en desarrollo, cuyo objetivo fundamental es la cuantificación precisa de la probabilidad de falla en estructuras de importancia, [PPL⁺05]. El trabajo completo se ha enmarcado en un proyecto europeo de investigación denominado *NW-IALAD: Network on the Integrity Assessment of Large Concrete Dams*. El mismo contempla la utilización de un código de *Redes Neuronales (Neuronal Network: NN)* basado en un procedimiento de tipo *Monte Carlo (MC)* para el análisis de vulnerabilidad estructural¹ de grandes diques en conjunción con una secuencia de análisis no lineal por elementos finitos hasta la falla². Nuestro aporte radica en la obtención de una gran cantidad de soluciones numéricas (determinísticas) para una misma estructura utilizando la *CSDA*, en términos de carga límite y mecanismos de colapso.

Este apéndice se ha incluido con la única finalidad de enfatizar la capacidad (robustez) del algoritmo numérico global utilizado para simular fractura frágil, descrito en el capítulo 3 y 4, en un problema 3D complejo dominado por el desarrollo de múltiples fisuras. Con esta idea en mente, no pretendemos discutir aquellos aspectos ajenos al análisis mecánico de falla, y que complementan el desarrollo del proyecto.

D.1. Introducción

Durante los últimos años, las teorías y procedimientos para confiabilidad estructural han alcanzado un importante desarrollo. Entre éstos puede mencionarse la incorporación del tratamiento probabilístico de las incertezas en los estados de cargas, resistencias del material, etc. La vulnerabilidad, entendida como la probabilidad de falla frente a diversos escenarios de carga, es un aspecto de suma importancia en el diseño, construcción, monitoreo y mantenimiento de obras civiles de alta prioridad como por ejemplo las presas. Este análisis intenta cuantificar la probabilidad que tiene la estructura para satisfacer comple-

¹Institute of Structural Analysis and Seismic Research, National Technical University of Athens (NTUA), Athens 15780, Greece.

²Technical University of Catalonia (UPC), Campus Nord, Edifici C-1, C/Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona, Spain.

tamente los requerimientos de servicio y diseño con un nivel aceptable de seguridad ante el colapso.

Encarar este complejo problema no es una tarea sencilla. Esta contribución forma parte de un proyecto interdisciplinario que avanza hacia este objetivo involucrando recursos de varios institutos y/o universidades europeas (NTUA, UPC). Como una primera aproximación, este estudio supone considerar que las incertidumbres están asociadas sólo a la caracterización del comportamiento material, mientras que los demás factores como estados de cargas, condiciones de contorno, condiciones de construcción, etc, no se consideran entre estas incertezas. Siguiendo esta idea, la lista global de tareas a desarrollar puede resumirse en:

- identificación y definición de las propiedades materiales que pueden sufrir variaciones importantes (parámetros inciertos) a utilizar en el modelo mecánico de falla. Para el hormigón, se adopta:
 - Módulo de Young (E)
 - Relación de Poisson (ν)
 - Tensión última uniaxial (σ_y)
 - Energía de fractura específica (G_f)
- estimación o caracterización estadística de tales parámetros inciertos. Esto último puede asumirse en función de estudios previos o bien obtenerse mediante ensayos experimentales.
- generación de un número definido (n_T) de combinaciones, cada una estará asociada a un conjunto de cuatro parámetros materiales $\{E, \nu, \sigma_y, G_f\}_i$ $i = 1 \dots n_T$, obtenidos siguiendo una función de densidad de probabilidad pre-especificada (en general una distribución normal) a partir de los valores medios del material.
- selección de un caso de prueba (benchmark) para realizar la cantidad pre-establecida (n_T) de análisis límite estructural y consecuente cómputo de capacidad de carga última (trabajo presente).
- cálculo de la confiabilidad (probabilidad de falla) utilizando un entorno de Redes Neuronales entrenado en forma apropiada.

Este apéndice se limita sólo a presentar algunos resultados correspondientes al cuarto punto de la lista previa, y puede interpretarse como un estudio de sensibilidad paramétrico asumiendo que las propiedades del material pueden modificarse dentro de un rango físicamente admisible de variación.

D.2. Ejemplos numéricos

Se desarrollan a continuación dos ejemplos. Para la resolución de ambos se adopta la *CSDA*, involucrando las estrategias numéricas discutidas en esta tesis (en particular aquellas presentadas en el capítulo 4) como por ejemplo: algoritmo de integración

implícito-explicito, metodología global de trazado de discontinuidad y elementos con modos enriquecidos de deformación. Con respecto a este último punto se utiliza la tecnología *E-FEM*, por cuestiones de precisión y costo computacional.

D.2.1. Viga de 4 puntos. Caso 2D

En esta sección reproducimos un test experimental clásico, ampliamente utilizado en mecánica de fractura para validaciones numéricas. El mismo corresponde al caso de una viga apoyada en 4 puntos sometida a un modo predominante de flexión, véase figura D.1. Recordamos que este ejemplo ha sido presentado en el capítulo 4, pero en esta ocasión el objetivo es distinto. Se pretende ahora resolver este problema de propagación de fractura una gran cantidad de veces (1000 para ser más específicos) variando la caracterización del material.

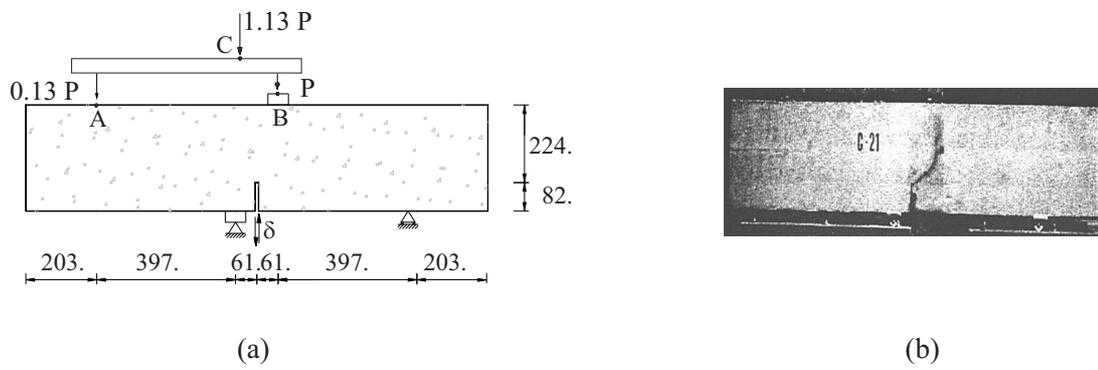


Figura D.1: Viga de 4 puntos: (a) Descripción geométrica del modelo. (b) Trayectoria de fisura obtenida experimentalmente.

En el cuadro D.1 se muestra el valor promedio de los parámetros mecánicos, en concordancia con el ensayo experimental reportado por Arrea & Ingrafea [AI82], y los máximos y mínimos adoptados para cada propiedad material.

	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]
Valor máximo	37081	0.331	4.904	158.941
Valor promedio	24800	0.18	2.80	100.0
Valor mínimo	13471	0.017	0.670	43.054

Cuadro D.1: Viga de cuatro puntos. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del material.

Considerando tales valores y postulando que la aleatoriedad sigue una función densidad de probabilidad Gaussiana, se generan 1000 test, uno por cada combinación de cuatro parámetros y se efectúan los correspondientes análisis de falla utilizando la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo.

En la figura D.2-(a) puede observarse la respuesta en términos de la curva carga P versus el desplazamiento en modo deslizamiento (*CMSD*) obtenida numéricamente para los valores medios del material y la envolvente experimental documentada por Arrea &

Ingrafea, acorde a la misma caracterización constitutiva (mismos parámetros). Se advierte una adecuada correspondencia entre las dos soluciones.

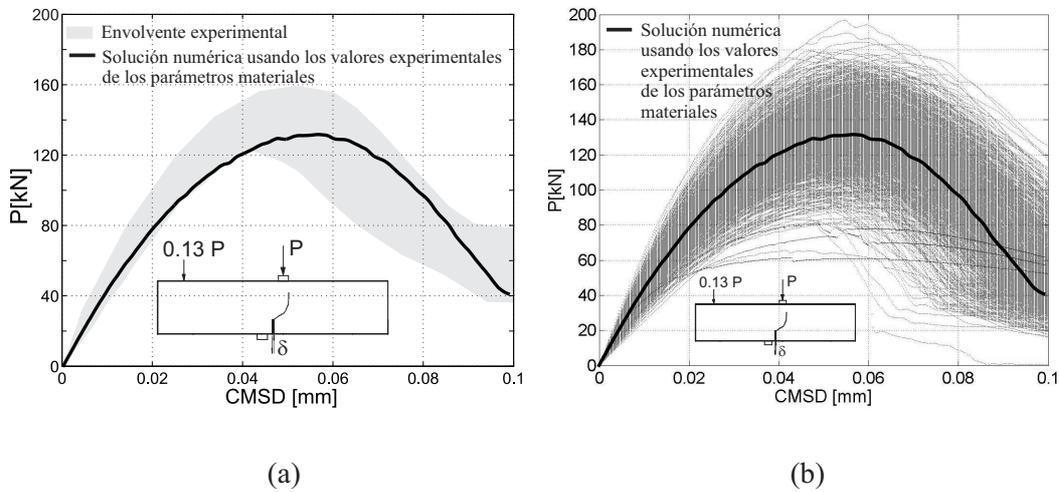


Figura D.2: Viga de 4 puntos. Curvas de respuesta carga P vs. desplazamiento $CMSD$: (a) Comparación entre la solución numérica vía *CSDA* y la envolvente experimental. (b) Curvas de equilibrio para todos los casos analizados.

Las trayectorias de equilibrio (P - $CMSD$) para la totalidad de los ejemplos estudiados se muestran en la figura D.2-(b). A partir de la figura D.3-(a) y D.3-(b) queda en evidencia la variación en la carga pico y del desplazamiento $CMSD$, según el problema considerado.

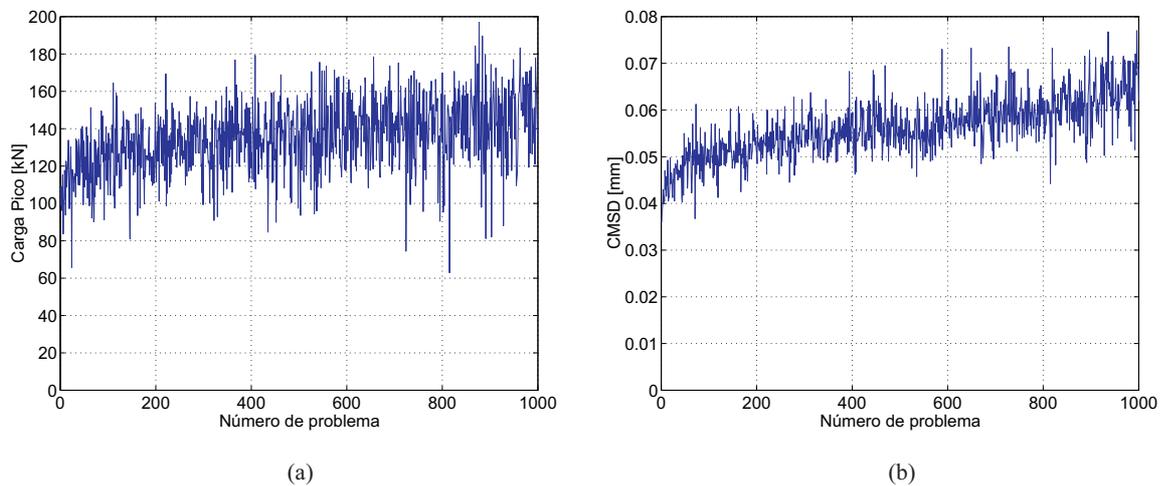


Figura D.3: Viga de 4 puntos. Resultados para los 1000 casos analizados: (a) Variación de la carga límite según el problema considerado. (b) Variación del desplazamiento $CMSD$, en correspondencia con la carga límite, según el problema considerado.

Finalmente, a modo ilustrativo, en el cuadro D.2 se transcriben 10 de los casos analizados.

Nombre del problema	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]	Carga última [kN]	CMSD [mm]
v4p-0015	27699	0,2197	2,4831	60,6210	117,6618	0,0405
v4p-0020	24982	0,1824	2,1489	62,6940	108,8068	0,0442
v4p-0150	23036	0,1558	2,8217	81,3010	127,6422	0,0493
v4p-0225	23953	0,1684	2,5206	86,3941	125,1792	0,0543
v4p-0458	19840	0,1121	4,1581	98,0562	140,7802	0,0615
v4p-0550	23406	0,1610	2,9645	102,2470	140,3054	0,0550
v4p-0700	22288	0,1455	2,8721	109,4215	136,1133	0,0592
v4p-0745	27161	0,2123	1,7504	111,8349	115,6962	0,0512
v4p-0840	23285	0,1592	2,3254	117,8936	129,2772	0,0623
v4p-0970	25829	0,1941	2,6397	133,6778	148,5738	0,0633

Cuadro D.2: Viga de cuatro puntos. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.

Observación 45 debe enfatizarse que la resolución de cada problema hasta alcanzar el máximo valor de CMSD (falla completa), compuesto por aproximadamente 2000 elementos (1000 nodos) y considerando 400 pasos de tiempo (400 iteraciones), insume (en promedio) sólo 1,4-1,5 minutos en un ordenador personal estándar.

D.2.2. Presa de Scalere

El problema propuesto corresponde a la presa de arco de Scalere³. Esta represa fue construida entre 1910 – 1911 y se encuentra ubicada en región centro-norte de Italia. La cota máxima de la cresta es 830,5 [metros] a.s.l., la altura máxima del dique es de 34 [metros] y la longitud de la cresta 158 [metros].

Para el análisis sistemático de falla se consideran fijos todos los parámetros que definen la estrategia numérica, permitiendo solamente variaciones en la descripción material. En consecuencia, los resultados estarán asociados a tales perturbaciones físicas.

Geometría

La geometría del dique de hormigón se ha tomado de [NW-]. Sólo se modela una pequeña parte de la fundación debido a que el análisis está especialmente direccionado al colapso de la presa propiamente dicha. Sin embargo, para recuperar el comportamiento mecánico real, se deben aplicar las condiciones de borde apropiadas al modelo numérico.

En la figura D.4 y D.5 puede observarse la malla de elementos finitos desde distintas perspectivas. La discretización está compuesta por aproximadamente 13580 elementos tetraédricos y 3047 nodos.

Condiciones de contorno

Las restricciones cinemáticas a considerar son muy simples, a saber: las dos superficies laterales y la cara inferior se asumen empotradas (A, B y C en la figura D.4-(b)), mientras que las restantes están libres.

³Este ejemplo se ha tomado como benchmark en Wp3Tg4 [GMMF03] (7th International Benchmark Workshop 2003, Bucharest, Romania), véase también <http://nwialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg3/Se5/Ss9/Sss1>.

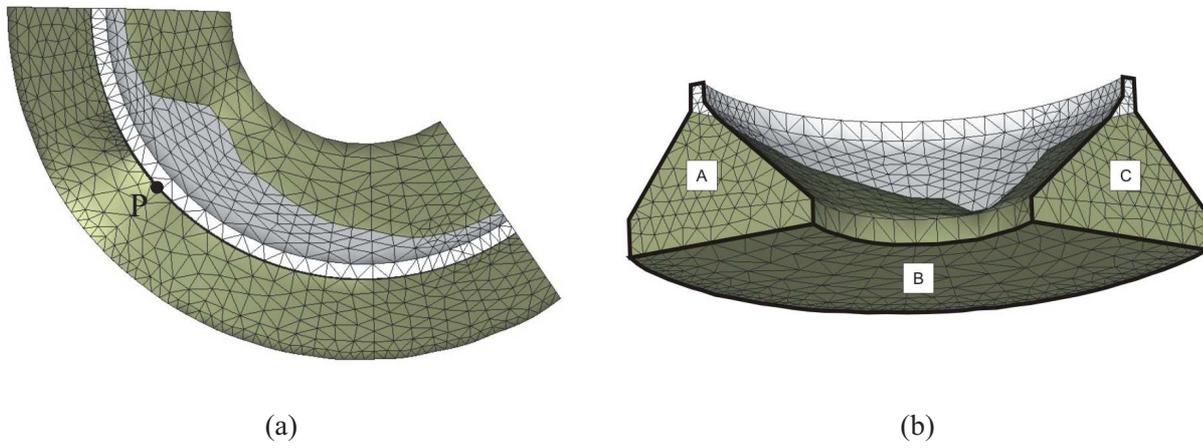


Figura D.4: Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Vista superior. (b) Perspectiva inferior

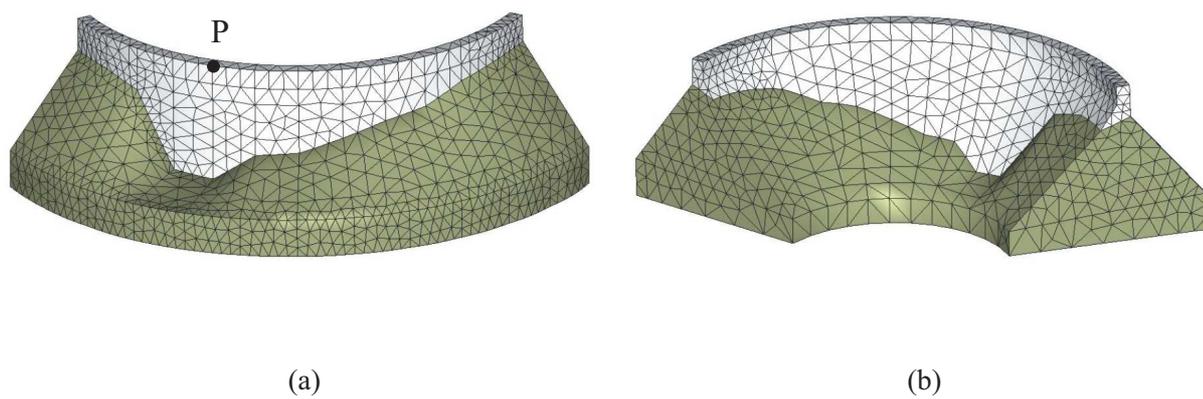


Figura D.5: Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Perspectiva aguas arriba. (b) Perspectiva aguas abajo.

El estado de cargas externas comprende el peso propio de la estructura (constante) y la presión hidrostática (variable). Se asume que el reservorio se llena con agua hasta la cresta de la presa, ver figura D.6. La evolución, en el pseudo-tiempo, del factor de carga debe entenderse como un factor de proporcionalidad aplicado a la densidad del agua, de tal forma que en un principio la densidad es cero, incrementándose posteriormente hasta que se alcanza la carga última de la presa. Este no es el escenario común adoptado en el diseño de diques, sin embargo, consideramos que este criterio es más aceptable desde el punto de vista de la falla estructural y además simplifica en gran medida la aplicación del empuje hidrostático. El valor máximo del factor de carga obtenido, determina el coeficiente de seguridad.

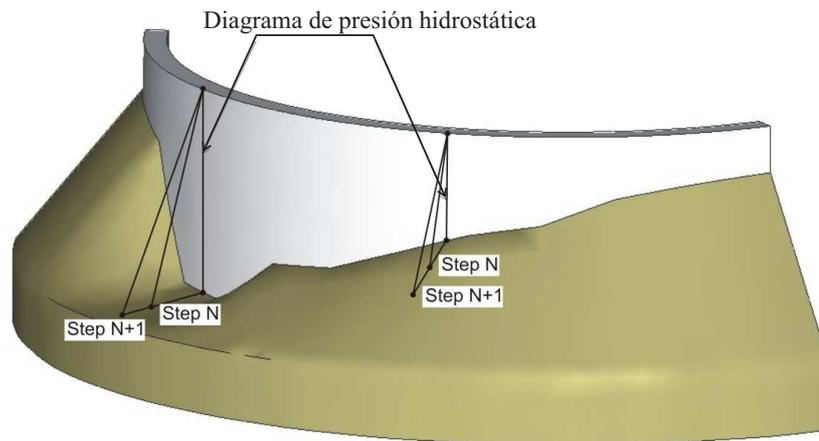


Figura D.6: Presa de Scalere. Esquema simplificado para la aplicación de la presión hidrostática. Evolución del factor de carga.

Propiedades del material

La estructura en estudio esta formada por dos materiales: la roca de fundación y el hormigón que conforma la presa. Para ambos se asume un modelo de daño continuo isótropo con diferente resistencia a compresión y tracción. Como simplificación adicional se consideran incertezas sólo en la caracterización del hormigón (cuadro D.3) mientras que el comportamiento mecánico de la roca se postula como determinístico (cuadro D.4). En consecuencia, el análisis presente está dirigido a evaluar la *probabilidad de falla de la estructura* más que la *probabilidad de falla del sistema estructura-fundación*.

Observación 46 *nótese, en el cuadro D.3, que ni la tensión última a compresión ($\sigma_y^{(-)}$) ni la densidad material (ρ) se consideran como variables aleatorias.*

Como en el ejemplo previo, a partir de los valores medios del hormigón y adoptando una distribución de probabilidad, se genera una cantidad establecida (n_T) de combinaciones de parámetros ($\{E, \nu, \sigma_y, G_f\}$), y se realiza un análisis hasta la falla de cada una de ellas. En este caso particular hemos adoptado $n_T = 100$, y por ende se computaron 100 magnitudes distintas de carga última.

Hormigón						
	E	ν	$\sigma_y^{(-)}$ Compresión	σ_y Tracción	G_f	ρ Densidad
	[MPa]		[MPa]	[MPa]	[N/m]	[kg/m ³]
Valores máximos	22297	0.235	10.0	1.399	113.988	2300
Valores promedio	20000	0.20	10.0	1.0	100.0	2300
Valores mínimos	17690	0.172	10.0	0.614	88.907	2300

Cuadro D.3: Presa de Scalere. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del hormigón.

Roca de Fundación				
E	ν	$\sigma_y^{(-)}$ Compresión	σ_y Tracción	G_f
[MPa]		[MPa]	[MPa]	[N/m]
20000	0.20	10.0	1.0	100

Cuadro D.4: Presa de Scalere. Parámetros materiales para la roca de fundación.

Resumen de las hipótesis introducidas

A continuación remarcamos las principales hipótesis hechas para la resolución de todos los casos:

- sólo dos materiales se modelizan: hormigón y roca.
- no hemos considerado elementos de interface entre la roca de fundación y la presa.
- la roca se asume como determinística.
- los cuatro parámetros materiales del hormigón tomados como variables aleatorias son: módulo de Young, relación de Poisson, tensión última uniaxial y energía de fractura, los cuales están definidos vía una función densidad de probabilidad establecida a partir de valores medios.
- se adopta un único escenario numérico. Solamente las propiedades del hormigón pueden modificarse.
- incremento monótono de la densidad del agua como principal estado de carga, se considera además el peso propio de la estructura.

Resultados numéricos

El cuadro D.5 muestra resultados para 10 conjuntos de parámetros, en términos del factor de carga (columna 6).

En la figura D.7 se observa, para uno de los casos estudiados, la curva de evolución del factor de carga como función del desplazamiento horizontal (dirección x) del punto P en la cresta de la presa (véase figura D.4-(a) y D.5-(a)).

Los mapas de igual desplazamiento (figuras D.8-(a) y D.8-(b)) y la geometría del modelo discreto en la configuración deformada (ver figuras D.9-(a) y D.9-(b)) ponen en evidencia el mecanismo de colapso de la presa. Este está formado por la conjunción de

Nombre del problema	E [MPa]	ν	σ_y [MPa]	G_f [N/m]	Factor de Carga
dam-004	20343	0,2046	1,0587	91,8538	7,23
dam-018	20106	0,2017	1,0223	95,9953	7,56
dam-027	21124	0,2152	1,2043	97,3479	7,74
dam-040	20650	0,2092	1,1226	99,0081	8,29
dam-042	19284	0,1901	0,8708	99,2920	7,98
dam-064	19425	0,1924	0,8954	101,9026	7,32
dam-077	17690	0,1717	0,6140	103,9041	5,17
dam-084	19980	0,1995	0,9968	105,3341	8,88
dam-089	20051	0,2006	1,0104	106,6047	8,78
dam-098	18884	0,1897	0,7947	100,5677	7,30

Cuadro D.5: Presa de Scalere. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.

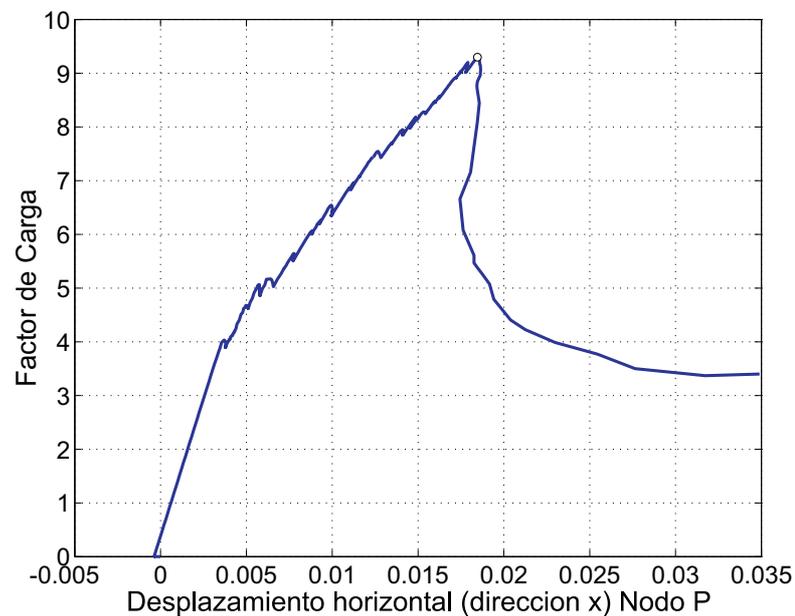


Figura D.7: Presa de Scalere. Curva de equilibrio: Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal del nodo P.

2 macro fisuras primarias que propagan a través del cuerpo del dique, como se puede observar en las figuras D.10-(a), D.10-(b), D.11-(a) y D.11-(b). Sin embargo, debe hacerse notar que el proceso disipativo completo también involucra un número importante de fisuras secundarias que se desarrollan tanto en el dominio de la presa como en la roca de fundación.

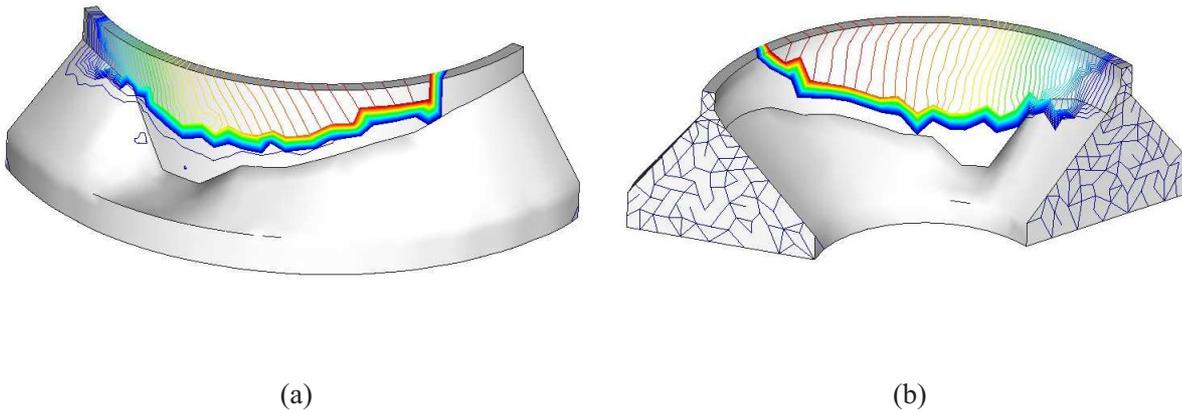


Figura D.8: Presa de Scalere. Contornos de igual desplazamiento.

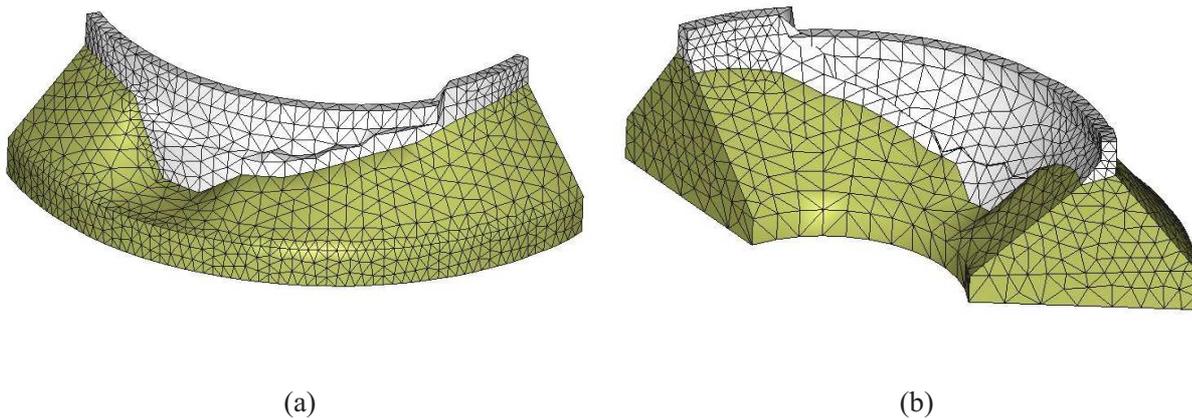


Figura D.9: Presa de Scalere. Geometría en la configuración deformada.

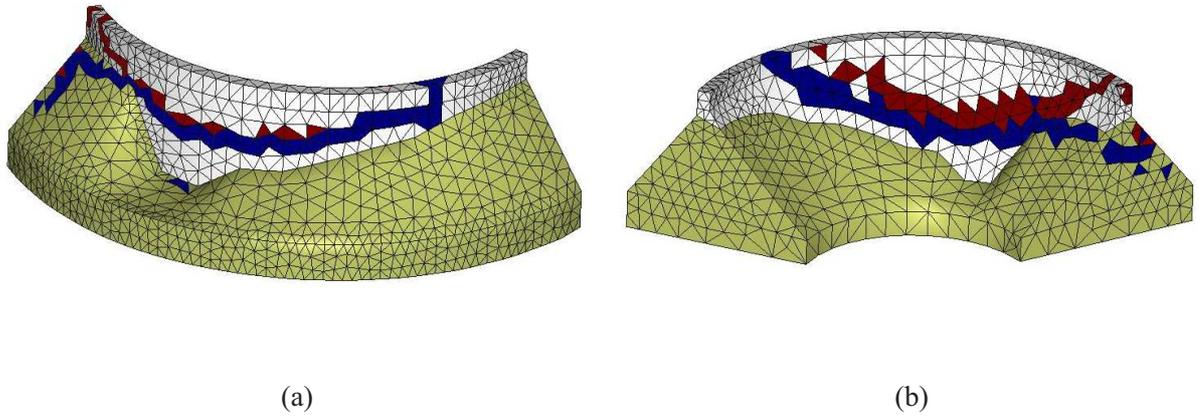


Figura D.10: Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.

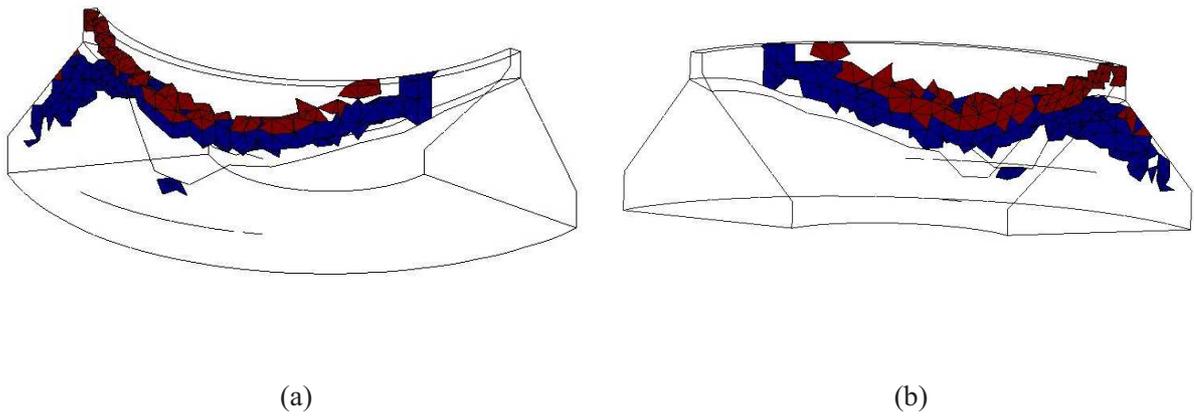


Figura D.11: Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.

Observación 47 *enfaticamos que para resolver cada presa hasta el colapso, en un ordenador personal, el tiempo de cálculo promedio ha sido de 2 : 15 horas.*

Observación 48 *la idea que se pretende transmitir, mediante los resultados mostrados en este anexo, es la capacidad que posee el modelo de falla utilizado y la potencialidad del mismo (bajo costo computacional) para encarar los primeros estudios de vulnerabilidad y confiabilidad estructural aplicando conceptos de mecánica de fractura mediante aproximaciones por discontinuidades fuertes. Esta aplicación práctica, de gran interés ingenieril, se considera un aporte novedoso en el contexto de la presente investigación.*

Bibliografía

- [ABS98] H. Askes, L. Bodé, and L. Sluys. Ale analyses of localization in wave propagation problems. *Mech. Coh-frict. Mat.*, 3:105–126, 1998. [13](#)
- [AG96] F. Armero and K. Garikipati. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization. *Int. J. Solids Struct.*, 33:2863–2885, 1996. [14](#), [58](#), [122](#)
- [AI82] M. Arrea and A.R. Ingraffea. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. Technical Report 81-13, Dept. of Struct. Engrg., 1982. [81](#), [205](#)
- [Aif84a] E. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *ASME J. Engrg Mat. Tech.*, 106:326–334, 1984. [12](#)
- [Aif84b] E. Aifantis. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *J. Engrg Sci.*, 30:1279–1299, 1984. [12](#), [172](#)
- [Alf03] J. Alfaiate. New developments in the study of strong embedded discontinuities in finite elements. *Adv. Fract. Damage Mech.*, 251-252:109–114, 2003. [58](#)
- [Asa83] R.J. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Appl. Mech.*, 23:1–115, 1983. [129](#)
- [Bab71] I. Babuska. Error bounds for finite element methods. *Numerical Mathematics*, 16:322–333, 1971. [95](#)
- [Bar62] G. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7:55–129, 1962. [13](#)
- [Baz76] Z. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 102:331–344, 1976. [7](#), [10](#)
- [BB91] T. Belytschko and L. P. Bindeman. Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 88:311–340, 1991. [105](#)
- [BBC84] Z. Bažant, T. Belytschko, and T. Chang. Continuum theory for strain softening. *ASCE J. Engr. Mech.*, 110:1666–1692, 1984. [11](#)
- [BBG⁺01] Satish Balay, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matt Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. Petsc home page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001. [195](#)
- [BBG⁺02] Satish Balay, Kris Buschelman, William D. Gropp, Dinesh Kaushik, Matt Knepley, Lois Curfman McInnes, Barry F. Smith, and Hong Zhang. Petsc users manual. Technical Report ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2002. [195](#)
- [BC80] Z. Bazant and L. Cedolin. Fracture mechanics of reinforced concrete. *J. Eng. Mech. Div ASCE*, pages 1287–1305, 1980. [89](#)
- [BCV91] P. Bocca, A. Carpinteri, and S. Valente. Mixed mode fracture of concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 27:1139–1153, 1991. [14](#)
- [BCXZ03] T. Belytschko, H. Chen, J.X. Xu, and G. Zi. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58:1873–1905, 2003. [58](#)
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991. [95](#), [134](#)

- [BFE88] T. Belytschko, J. Fish, and B. Engelman. A finite element with embedded localization zones. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70:59–89, 1988. 10, 14
- [BGMS97] Satish Balay, William D. Gropp, Lois Curfman McInnes, and Barry F. Smith. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In E. Arge, A. M. Bruaset, and H. P. Langtangen, editors, *Modern Software Tools in Scientific Computing*, pages 163–202. Birkhauser Press, 1997. 195
- [BH82] A.Ñ. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:199–259, 1982. 94
- [BL88] Z. Bažant and F. Lin. Non-local yield limit degradation. *Int J. Numer. Meth. Engrg.*, 26:1805–1823, 1988. 11, 171
- [BMUP01] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 50:993–1013, 2001. 14, 58, 66
- [BO83] Z. Bažant and B.H. Oh. Crack band theory for fracture concrete. *Materials and Structures.*, 16:155–177, 1983. 9, 10
- [BOG00] T. Belytschko, D. Organ, and C. Gerlach. Element-free galerkin methods for dynamic fracture in concrete. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 187:385–399, 2000. 13
- [BOLK84] T. Belytschko, J. S.-J. Ong, W. K. Liu, and J. M. Kennedy. Hourglass control in linear and nonlinear problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 43:251–276, 1984. 94
- [BP98] Z.P. Bazant and J. Planas. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1998. 8, 41
- [BPC88] Z. Bažant and G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *ASME J. Appl. Mech.*, 55(2):287–293, 1988. 11, 171
- [BR00] R.L. Borja and R.A. Regueiro. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous field based on standard galerkin approximation. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, 190:1529–1549, 2000. 58
- [Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO*, 8-R2:129–151, 1974. 95
- [Car89] A. Carpinteri. Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive cracks propagation. *Engrg. Fract. Mech.*, 32:265–278, 1989. 14
- [CB00] R. Codina and J. Blasco. Stabilized finite element method for the transient navier-stokes equations based on a pressure gradient projection. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 182:277–300, 2000. 93, 98
- [CCVdS03] M. Cervera, M. Chiumenti, Q. Valverde, and C. Agelet de Saracibar. Mixed linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 192:5249–5263, 2003. 94, 99, 190
- [Cha03] E.W.V. Chaves. *A three dimensional settings for strong discontinuities modelling in failure mechanics*. PhD thesis, E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports, Technical University of Catalonia (UPC), Barcelona, 2003. 39
- [CMP04] C. Comi, S. Mariani, and U. Perego. An extended finite element strategy for the analysis of crack growth in damaging concrete structures. In P.Ñeittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux, and D. Knörzer, editors, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004*, Jyväskylä, 2004. 164, 185
- [Cod00a] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190:1579–1599, 2000. 93, 94, 98, 100, 102, 192
- [Cod00b] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal sub-scales. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:4295–4321, 2000. 190, 192
- [CRCN80] R.J. Cope, P.V. Rao, L.A. Clark, and P. Norris. Modelling of reinforced concrete behaviour for finite element analysis of bridges slabs. In C. Taylor et al., editor, *Numerical Methods for Nonlinear Problems*, volume 1, pages 457–470, Swansea, 1980. Pineridge Press. 10
- [CVdSC02a] M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar, and M. Cervera. A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 191:5253–5264, 2002. 94, 98, 102

- [CVdSC02b] M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar, and M. Cervera. Una formulación estabilizada para plasticidad incompresible usando triángulos y tetraedros con interpolaciones lineales en desplazamientos y presiones. *Métodos Numéricos en Ingeniería V*, 2002. 94, 99, 100
- [DA91] E. Dvorkin and A. Assanelli. 2d finite element with displacement interpolated embedded localization lines: the analysis of fracture in frictional materials. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90:829–844, 1991. 14
- [DA00] E. Dvorkin and A. Assanelli. Implementation and stability analysis of the qmitc-tlh elastoplastic finite strain (2d) element formulation. *Computers and Structures*, 75:305–312, 2000. 94
- [dB91] R. de Borst. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Eng. Comput.*, 8:317–332, 1991. 12
- [dB93] R. de Borst. A generalisation of j2-flow theory for polar continua. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 103:347–362, 1993. 12
- [dBM92] R. de Borst and H. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J. Numer. Meth. Engrg.*, 35(3):521–539, 1992. 12, 172
- [dBN85] R. de Borst and P. Nauta. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, 2:35–46, 1985. 10
- [dBPPS95] R. de Borst, J. Pamin, R. Peerlings, and L. Sluys. On gradient-enhanced damage and plasticity models for failure in quasi-brittle and frictional materials. *Comp. Mech.*, 17:130–141, 1995. 12
- [dBSMP93] R. de Borst, L. Sluys, H. Mühlhaus, and J. Pamin. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10:99–121, 1993. 11
- [DnG90] E. Dvorkin, A. Cuti no, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30:541–564, 1990. 14, 58
- [Dug60] D. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8:100–108, 1960. 13
- [EGGP02] M. Elices, G.V. Guinea, J. Gómez, and J. Planas. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:137–163, 2002. 13
- [EN98] G. Etse and M.Ñieto. Micropolar regularization in concrete plasticity. In *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 1998. Springer Verlag. 12
- [FH88] L. P. Franca and T. J. R. Hughes. Two classes of mixed finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 69:89–129, 1988. 94
- [FH04] C. Feist and G. Hofsteller. Computational aspect of concrete fracture simulations in the framework of the sda. In *Fracture Mechanics of Concrete Structures FRAMCOS*, Vale, Co, USA, 2004. 66
- [GA84] A.K. Gupta and H. Akbar. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 110(8):1735–1746, 1984. 10
- [GdBP00] M.G.D. Geers, R. de Borst, and R.H. Peerlings. Damage and crack modelling in single-edge and double-edge notched concrete beams. *Engrg. Fracture Mech.*, 65:247–261, 2000. 182
- [GH98] K. Garikipati and T.J.R. Hughes. A study of strain-localization in a multiple scale framework. The one dimensional problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 159:193–222, 1998. 58
- [GH03] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel. Geometrically non-linear and consistently linearized embedded strong discontinuity models for 3d problems with an application to the dissection analysis of soft biological tissues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192:5059–5098, 2003. 58
- [GH05] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel. Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete using pufem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:2859–2896, 2005. 165
- [GLS95] W. Gropp, E. Lusk, and A. Skeljumm. Using mpi: Portable parallel programming with the message passing interface. Technical report, MIT Press, 1995. 195

- [GMMF03] G. Guisepetti, G. Mazzr, M. Meghella, and M. Fanelli. In *Seventh Benchmark Workshop On Numerical Analysis Dams*, Bucharest, Romania, <http://www.rocold.ro/themea.htm>, 2003. Marinus Nujhoff. 207
- [HF88] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A mixed finite element formulation for Reissner-Mindlin plate theory: uniform convergence of all higher-order spaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 67:223–240, 1988. 94
- [HFB85] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of Stokes problem accommodating equal-order interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99, 1985. 94, 98
- [Hil50] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1950. 29
- [Hil58] R. Hill. General theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6:236–249, 1958. 5, 7
- [Hil62] R. Hill. Accelerations waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962. 9
- [HMP76] A. Hillerborg, M. Modeer, and P. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6(6):163–168, 1976. 13
- [Hug87] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987. 95
- [Hug95] T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions dirichlet-to-neumann formulation, sub-grid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 127:387–401, 1995. 187
- [Ing13] C. Inglis. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. In *Int. Naval Architects*, 1913. 8
- [Irw57] G. Irwin. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. *Transactions ASME, J. Appl. Mech*, 1957. 9
- [Irw58] G. Irwin. *Fracture, Handbuch der Physik*, volume VI. Springer, Berlin, 1958. 9
- [Jir00] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 188:307–330, 2000. 14, 58, 64, 73, 134
- [JNP84] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 45:285–312, 1984. 94
- [JZ97] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage: 1. local formulation, 2. nonlocal formulation and adaptativity. Technical Report 97/01, LSC, January 1997. 11
- [JZ98a] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Analysis of rotating crack model. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124:842–851, 1998. 11
- [JZ98b] M. Jirásek and Th. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage. *J. Eng. Mech., ASCE*, 124:277–284, 1998. 11
- [Kac58] L. M. Kachanov. Time of rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tech. Nauk.*, 8:26–31, 1958. 9
- [Kac71] L. M. Kachanov. *Foundation of the theory of plasticity*. North-Holland Pub. Co., Neetherlands, 1971. 111
- [Kac86] L. M. Kachanov. *Introduction to continuum damage mechanics*. Nijhoff, Dordrecht, Neetherlands, 1986. 9, 31
- [KHBL85] A.S. Kobayashi, M.N. Hawkins, D.B. Barker, and B.M. Liaw. Fracture process zone in concrete. In S.S.P., editor, *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, pages 25–50, Dordrecht, 1985. Marinus Nujhoff. 72
- [KK97] G. Karypis and V. Kumar. Metis 3.0: Unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system, 1997. 196
- [KMS99] O. Klaas, A. Maniatty, and M. S. Shephard. A stabilized mixed finite element method for finite elasticity. Formulation for linear displacement and pressure interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 180:65–79, 1999. 94, 98, 99

- [KP85] M.F. Kanninen and C.H. Popelar. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, 1985. [9](#), [157](#)
- [KRS91] M. Klisinski, K. Runesson, and S. Sture. Finite element with inner softening band. *ASCE J. Eng. Mech.*, 117:575–587, 1991. [14](#)
- [LB88] D. Lasry and T. Belytschko. Localization limiters in transient problems. *Int J. Solids Struct.*, 24:581–597, 1988. [12](#), [175](#)
- [LC90] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mechanics of solids materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. [29](#), [31](#)
- [LP90] B. Loret and J. Prévost. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, part 1. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83:247–273, 1990. [12](#)
- [LPRS05] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, and M. Salaün. High order extended finite element method for cracked domains. In *Computational Plasticity VIII: Fundamentals and Applications*, Barcelona, 2005. [165](#)
- [LR96] R. Larsson and K. Runesson. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *ASCE J. Eng. Mech.*, 122:402–411, 1996. [14](#)
- [LR00] K. Liao and K.L. Reifsnider. A tensile strength model for unidirectional fiber-reinforced brittle matrix composite. *Int. J. Fract.*, 106:95–115, 2000. [89](#)
- [LRO93] R. Larsson, K. Runesson, and N.S. Ottosen. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 36:2087–2105, 1993. [64](#)
- [LS94] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized mitc plate bending elements. In *2nd Int. Conf. on Computational Structures Technology*, pages 11–16, Athens, Greece, 1994. [94](#)
- [LS95] H. Lotfi and P. Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38:1307–1325, 1995. [14](#)
- [Lub90] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1990. [29](#)
- [MA91] H.B. Mühlhaus and E.C. Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 28:845–857, 1991. [175](#)
- [MB02] N. Moës and T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813–833, 2002. [14](#)
- [MM03] J. Mosler and G. Meschke. 3d modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 57:1553–1576, 2003. [58](#), [66](#)
- [MM04] J. Mosler and G. Meschke. Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:3351–3375, 2004. [58](#)
- [MMdSC04] Cervera M., Chiumenti M., and Agelet de Saracibar C. Shear band localization via local j2 continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:849–880, 2004. [123](#)
- [MP03] S. Mariani and U. Perego. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58:103–126, 2003. [58](#)
- [MSMT00] N. Moës, N. Sukumar, B. Moran, and Belytschko T. An extended finite element method (X-FEM) for two and three-dimensional crack modelling. In *ECCOMAS 2000*, Barcelona, Spain, September 11-14, 2000. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6. [58](#)
- [MV87] H. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Geotechnic*, 37:271–283, 1987. [12](#)
- [Nee88] A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67:69–86, 1988. [12](#)
- [NW-] Thematic network on the integrity assessment of large concrete dams (nw-ialad). Technical report, <http://nw-ialad.uibk.ac.at/>. [207](#)
- [OCM97] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of j2 plasticity models for the simulation of 2d strong discontinuities in solids. In E. Hinton D.R.J. Owen, E. Oñate, editor, *Int. Conference on Comput. Plasticity*, pages 38–55, CIMNE, Barcelona, Spain, 1997. [14](#), [49](#)

- [OCM99] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *Int. J. Plasticity*, 15(3):319–351, 1999. [50](#), [121](#)
- [OCOL] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In *N.B. et al. editor, SCI-C Computer Aided Analysis and design of concrete Structures*, Swansea. Pineridge Press. [31](#), [35](#)
- [OH04] J. Oliver and A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, 193:2987–3014, 2004. [39](#), [54](#), [58](#), [64](#), [65](#), [66](#), [67](#)
- [OHBL05] J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, and D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. in Engrg.*, (Article in press. Available on line at www.sciencedirect.com, from November 2005), 2005. [59](#), [71](#), [143](#), [166](#)
- [OHP⁺04a] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, S. Blanco, and D. L. Linero. New developments in computational material failure mechanics. In *Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI)*, Beijing, PR China, 2004. [59](#)
- [OHP⁺04b] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, S. Blanco, and D. L. Linero. Recent advances in computational modelling of material failure. In K. Majava P.Ñeittaanmäki, T. Rossi and O. Pironneau), editors, *European Congress on Comput. Methods in Appl. Sciences and Eng., ECOMAS 2004*, Jyväskylä, Finland, 2004. [59](#), [71](#), [166](#)
- [OHPC02] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:113–136, 2002. [56](#), [72](#)
- [OHS] J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: e-fem vs x-fem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, accepted for publication. [18](#), [57](#), [169](#)
- [OHS03] J. Oliver, A. Huespe, and E. Samaniego. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 56:2135–2161, 2003. [62](#), [134](#)
- [Oli98] J. Oliver. The strong discontinuity approach: an overview. In E. Dvorkin S. Idelsohn, E. Oñate, editor, *Comput. Mech.: New Trends and Applications. WCCM98 Proc. (CD-ROM) IV World Congress on Comput. Mech.*, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998. [14](#), [50](#)
- [Oli00] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *Int. J. Solids Struct.*, 37:7207–7229, 2000. [41](#), [52](#), [54](#), [64](#)
- [Oli5a] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics. In E. Hinton D.R.J. Owen, E Oñate, editor, *Int. Conference on Comput. Plasticity: Fundamentals and Applications, vol 1.*, pages 455–479, CIMNE, Barcelona, España, 1995a. Pineridge Press. [14](#), [15](#)
- [Oli5b] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solids mechanics using damage models. *Comput. Mech.*, 17(1-2):49–61, 1995b. [14](#)
- [Oli6a] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. j. numer. methods eng.*, 39(21):3575–3600, 1996a. [14](#), [46](#), [122](#)
- [Oli6b] J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Int. j. numer. methods eng.*, 39(21):3601–3623, 1996b. [14](#), [58](#), [122](#), [132](#), [134](#), [140](#)
- [OLN87] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61:189–214, 1987. [14](#), [39](#)
- [OR91] N. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401–421, 1991. [7](#), [21](#), [26](#), [28](#), [39](#)
- [PBF97] C. Polizzotto, G. Borino, and P. Fuschi. A thermodynamically consistent formulation of nonlocal and gradient plasticity. *Mech. Research. Comm.*, 25:75–82, 1997. [12](#)
- [PCB87] G. Pijaudier-Cabot and Z. Bažant. Nonlocal damage theory. *ASCE J. Engrg. Mech.*, 113(10):1512–1533, 1987. [11](#), [171](#)

- [PdBBdV96] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, and J. de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 39:3391–3403, 1996. [12](#), [172](#), [175](#), [179](#)
- [PdBBG02] R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, and M. Geers. Localization issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21:175–189, 2002. [12](#), [172](#)
- [PE92] J. Planas and M. Elices. Nonlinear fracture of cohesive material. *Int. J. of Fracture*, 51:139–157, 1992. [13](#)
- [Pet81] P. Petersson. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials. *Technical report TVBM-1006, Lund Institute of Technology*, 1981. [13](#)
- [PGdBB01] R. Peerlings, M. Geers, R. de Borst, and W. Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int. J. Solids Struct.*, 38:7723–7746, 2001. [12](#), [171](#), [172](#)
- [PM81] S. Pietruszczak and Z. Mróz. Finite elements analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:327–334, 1981. [10](#)
- [PPL⁺05] M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, N. Lagaros, J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. Vulnerability analysis of large concrete dams using the continuum strong discontinuity approach and neural networks. *Structural Safety*, submitted, 2005. [18](#), [169](#), [203](#)
- [Ras68] Y. R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestresses concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Desing*, 7:334–344, 1968. [9](#), [10](#)
- [RB99] R. Rigueiro and R. Borja. A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach. *Finite Element in Analysis and Design*, 33:283–315, 1999. [14](#), [122](#), [143](#), [144](#)
- [Ric76] J. Rice. The localization of plastic deformation. In W. Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congress*, pages 207–220, Amsterdam, North-Holland, 1976. [5](#), [7](#), [9](#), [26](#)
- [ROP91] K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. of Plasticity*, 7:99–121, 1991. [22](#)
- [Rot88] J. Rots. *Computational modelling of concrete fracture*. PhD thesis, Delft University, Netherlands, 1988. [10](#), [72](#)
- [RPKB85] J. Rots, Nauta P., G. M. A. Kusters, and T. Blaauwendraad. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON.*, 1, 1985. [9](#), [81](#)
- [RR75] J. Rudnicki and J. Rice. Condition for the localization of deformations in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975. [5](#), [7](#), [9](#), [21](#), [26](#)
- [RR80] J. Rice and J. Rudnicki. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Structures*, 16:597–605, 1980. [22](#), [26](#), [28](#)
- [Run98] K. Runesson. *Constitutive theory and computational technique for dissipative materials with emphasis on plasticity, viscoplasticity and damage. Part II: Models and algorithms for geometrically linear theory*. Course Notes, 1998. [29](#)
- [SB98] L. Sluys and A. Berends. Discontinuous failure analysis for mode-i and mode-ii localization problems. *Int. J. Solids Struct.*, 35:4257–4274, 1998. [14](#)
- [SB05] E. Samaniego and T. Belytschko. Continuum-discontinuum modelling of shear bands. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1857–1872, 2005. [122](#)
- [SdBM93] L. Sluys, R. de Borst, and H. Mühlhaus. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int. J. Solids Struct.*, 30:1153–1171, 1993. [12](#)
- [SDP⁺03] M. Storti, L. Dalcin, R. Paz, A. Yommi, V. Sonzogni, and N. Nigro. An interface strip preconditioner for domain decomposition methods. *J. Comput. Methods Sciences and Eng.*, (in press), 2003. [198](#)
- [SH98] J. Simo and T. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, 1998. [29](#), [142](#)
- [SHS04] P.J. Sánchez, A.E. Huespe, and V. Sonzogni. Numerical performance of a mixed stabilized finite element technology for solid mechanics. parallel implementation. In G. Buscaglia, E. Dari, and O. Zamonski, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, San Carlos de Bariloche, Argentina, 2004. AMCA. [19](#), [94](#), [169](#), [195](#)

- [Sim04] A. Simone. Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issues. *Commun. Numer. Methods Engrg.*, 20:465–478, 2004. **58**, **165**
- [SJ87] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain -and stress- based continuum damage models -ii formulation. *Int. J. Solids Struc.*, 23:841–869, 1987. **31**, **33**
- [Slu97] L. J. Sluys. Discontinuous modeling of shear banding. In E. Hinton D.R.J. Owen, E Oñate, editor, *Conference on Comput. Plasticity: Fundamentals and Applications.*, pages 735–744, CIMNE, Barcelona, España, 1997. **10**
- [SNP] M. Storti, N. Nigro, and R. Paz. *PETSc-FEM A general purpose, parallel, multy-physics fem program.* International Center of Computational Method in Engineering (CIMEC), <http://www.cimec.org.ar/petscfem/>. **195**
- [SO94] J. Simo and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of stong discontinuities. In M. Jirásek J. Mazars Z.B. Bažant, Z. Bittnar, editor, *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures.*, pages 25–39. E & FN Spon, 1994. **15**
- [SOA93] J. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Comput. Mech.*, 12:277–296, 1993. **14**, **41**
- [SOHS05] P.J. Sánchez, J. Oliver, A.E. Huespe, and V. Sonzogni. Finite elements with embedded strong discontinuities for the numerical simulation in failure mechanics: E-fem and x-fem. In A. Larrateguy, editor, *VII Congreso Argentino de Mecánica Computacional*, Buenos Aires, Argentina, 2005. AMCA. **18**, **57**, **169**
- [SR82] S. W. Sloan and M. F. Randolph. Numerical prediction of collapse loads using finite element methods. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6:47–76, 1982. **94**
- [SR90] J. Simo and M. Riffai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods eng.*, 29:1595–1638, 1990. **14**, **58**, **94**
- [SS73] M. Suidan and W.C. Schnobrich. Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 99(10):2109–2122, 1973. **10**
- [SS03] B.W. Spencer and P.B. Shing. Rigid-plastic interface for an embedded crack. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 56:2163–2182, 2003. **58**
- [SS04] A. Simone and L. Sluys. The use of displacement discontinuities in a rate-dependent medium. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:3015–3033, 2004. **164**, **185**
- [SSH03] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Modelización de fractura utilizando un modelo de gradientes implícito. In M. Rosales, V. Cortinez, and V. Bambill, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, pages 2233–2247, Bahía Blanca, Argentina, 2003. AMCA. **17**, **168**, **171**
- [SSH04a] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Elemento finito estabilizado con discontinuidades fuertes embebidas para plasticidad isocórica. In G. Buscaglia, E. Dari, and O. Zamonski, editors, *XIV Congreso sobre métodos numéricos y sus aplicaciones ENIEF 2003*, San Carlos de Bariloche, Argentina, 2004. AMCA. **19**, **121**, **169**
- [SSH04b] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, and A.E. Huespe. Evaluation of a stabilized mixed finite element for solid mechanics problems and its parallel implementation. *Computers and Structures*, submitted, 2004. **19**, **94**, **95**, **169**, **195**
- [SSHO06] P.J. Sánchez, V. Sonzogni, A.E. Huespe, and J. Oliver. Stabilized mixed finite elements with embedded strong discontinuities for shear band modellig. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, accepted for publication, 2006. **19**, **121**, **169**
- [SW91] P. Steinmann and K. Willam. Localization within the framework of micropolar elastoplasticity. In V. Mannl et al., editor, *Advances in continuum mechanics*, pages 296–313, Berlin, 1991. Springer Verlag. **12**
- [SWS03] A. Simone, G. Wells, and L. Sluys. Discontinuities in regularised media. In *VII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS 2003.*, 2003. **182**, **185**
- [TH92] V. Tvergaard and J.W. Hutchinson. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elasto-plastic solids. *J. of the Mech. Phys. Solids*, 40:1377–1397, 1992. **13**
- [TMRS92] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 95:221–242, 1992. **99**

- [TN95] V. Tvergaard and A. Needleman. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *Int J. Solids Struct.*, 32(8/9):1063–1077, 1995. 11
- [TPM96] K. Terzaghi, R. Peck, and G. Mesri. *Soil mechanics in engineering practice*. J. Wiley, New York, 1996. 2
- [Val02] Q. Valverde. *Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos*. PhD thesis, UPC, ETSCCP, Barcelona, Spain, 2002. 94, 99
- [WBR98] W. A. Wall, M. Bishcoff, and E. Ramm. Stabilization techniques for fluid and structural finite elements. *Comput. Mech., New Trends and Applications, CIMNE, Barcelona, Spain*, 1998. 94
- [Wil00] K. William. Constitutive models for engineering materials. In *Encyclopedia of Physical Science and Technology, Academic Press*, pages 603–633, New York, 2000. 39
- [WS87] K. William and N. Sobh. Biurcation analysis of tangential material operators. In J. Middleton G.N. Pande, editor, *Transient/Dynamic Analysis and Constitutive Laws for Engineering Materials*, volume 2, pages C4/1–C4/13. Martinuss-Nijhoff, 1987. 39, 66
- [WS01] G. Wells and L. Sluys. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 50:2667–2682, 2001. 14, 58
- [YRC98] B. Yang and K. Ravi-Chandar. A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastoplastic cracks. *Int. J. Fract.*, 93:115–144, 1998. 13
- [ZB03] G. Zi and T. Belytschko. New crack-tip elements for xfem and applications to cohesive cracks. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 57:2221–2240, 2003. 165
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000. 95