

Capítulo 5

Estabilización en plasticidad J_2 con ablandamiento.

Uno de los principales desafíos de este trabajo de investigación consiste en formular estrategias numéricas eficientes para el modelado de falla material en plasticidad. Entendemos que este es un problema aún no resuelto, especialmente en el contexto de elementos triangulares y tetraédricos de bajo orden. Es bien sabido que esta tipología de elementos facilita en gran medida la generación de mallas al momento de resolver problemas prácticos reales. En el capítulo presente y en el siguiente se avanza hacia este objetivo específico. Se pretende desarrollar una formulación de elementos finitos *símplices* con la habilidad de capturar mecanismos de colapso inducidos por la progresiva acumulación de deformaciones inelásticas.

Al encarar la simulación numérica del fenómeno de localización de deformaciones en forma de bandas de corte (*shear bands*), y en especial para aquellos problemas gobernados por modelos constitutivos del tipo J_2 , es necesario disponer de tecnologías de elementos finitos estables ante la restricción de incompresibilidad inducida por el predominio de deformaciones plásticas isocóricas. Este hecho nos impulsa a buscar estrategias adecuadas tendientes a aliviar este inconveniente presente a nivel numérico. En este sentido, este capítulo está dedicado completamente al análisis de un esquema estabilizado mixto (desplazamiento-presión) aquí denominado formulación *PGP* (*Pressure Gradient Projection*, Codina et al. [CB00]) basado en el concepto de sub-escalas ortogonales [Cod00a].

Como primer paso hacia la obtención de un modelo más completo, se realiza un estudio riguroso de la performance numérica del esquema de estabilización *PGP* cuando se utilizan polinomios de igual orden de interpolación para las variables primales, resolviendo para ello problemas típicos donde la restricción por incompresibilidad juega un papel determinante en la respuesta, como ser: cómputo de la carga última estructural y el modelado de bandas de localización de deformaciones plásticas.

El objetivo final que se persigue consiste en acoplar esta tecnología estabilizada de base con una formulación regularizada y cinemáticamente enriquecida de elementos finitos (incorporando discontinuidades en desplazamientos) capaz de capturar bandas de deslizamiento en forma eficiente y para aquellos materiales equipados con leyes de ablandamiento por deformación. El desarrollo formal y el planteo matemático de este modelo acoplado es el objetivo del capítulo siguiente.

5.1. Introducción

Los elementos finitos de bajo orden, formulados en desplazamientos, presentan importantes ventajas al momento de resolver problemas prácticos en mecánica de sólidos, e inclusive se amplifican cuando consideramos el problema del modelado de localización de deformaciones. Entre las más destacadas se pueden nombrar: robustez, facilidad para la generación automática de mallas, reducido número de grados de libertad y mínimo ancho de banda del sistema final de ecuaciones, etc. Estas características implican en forma directa una mayor eficiencia desde el punto de vista computacional.

Sin embargo, como contrapartida, es un hecho bien conocido que la respuesta numérica de los elementos finitos estándar de Galerkin, en problemas gobernados por campos de deformaciones isocóricas, difiere considerablemente de las soluciones analíticas o experimentales de referencia.

Para salvar estas limitaciones subyacentes en los modelos clásicos, se han desarrollado diversas estrategias de análisis. A modo de ejemplo se pueden citar las técnicas de integración reducida Belytschko et al. [BOLK84], la utilización de elementos finitos de alto orden Sloan and Randolph [SR82] o métodos que enriquecen en forma adecuada el campo de deformaciones *EAS* (*Enhanced Assumed Strains*) Simo & Rifai [SR90], Dvorkin & Assanelli [DA00]. Una detallada descripción del estado del arte y reseña de las diversas alternativas mencionadas puede encontrarse en Valverde [Val02].

Los esquemas de elementos finitos mixtos estabilizados representan una promisoría línea de investigación, ampliamente reconocida en la actualidad a través de la gran cantidad de trabajos publicados en el área. Una característica distintiva de estas formulaciones es que, en general, están especialmente direccionadas a la obtención de elementos finitos símplices y lineales, originando de esta manera aproximaciones robustas, eficientes y de aplicabilidad generalizada. En un principio, estas metodologías fueron utilizadas en el contexto de la *Mecánica de Fluidos Computacional* (*CFD*) (Brooks et al. [BH82], Johnson et al. [JNP84], Hughes [HFB85]). Las estrategias de estabilización consisten básicamente en agregar a las formulaciones estándar, términos dependientes del tamaño de malla, y en función del residuo obtenido a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estos términos, evaluados a nivel de cada elemento, aseguran consistencia e incorporan estabilidad. En el ámbito de la *Mecánica de Sólidos*, para elasticidad y plasticidad incompresible, también se han aplicado conceptos similares, véase por ejemplo Hughes et al. [HF88], Franca et al. [FH88], Lyly et al. [LS94], Wall et al. [WBR98], Klaas et al. [KMS99].

Este capítulo se focaliza en la evaluación numérica de un elemento finito mixto estabilizado recientemente introducido (Chiumenti et al. [CVdSC02a, CVdSC02b], Cervera et al. [CCVdS03], Valverde [Val02]) para problemas de elasticidad incompresible y plasticidad isocórica de Von Mises. Especialmente se pretende medir su performance para el análisis del fenómeno de localización de deformaciones inducido por inestabilidades a nivel material, ver también [SSH04b, SHS04]. La formulación mixta propone interpolaciones lineales por tramos tanto para el campo de desplazamientos como para el de presiones. Los requisitos de compatibilidad entre los campos discretos involucrados se salvan utilizando una técnica de estabilización basada en el método de las *sub-escalas ortogonales* (*Orthogonal Sub-grid Scale method OSS*, Codina [Cod00a]).

Como primer objetivo se propone discutir aspectos particulares del desempeño numérico que complementan las conclusiones expuestas en las citadas referencias, y más

importante aún, aportar detalles adicionales en cuanto a su comportamiento en lo que se refiere a: (i) comparación con otro método alternativo de estabilización; (ii) estudio paramétrico del coeficiente de estabilización el cual es un ingrediente fundamental en este modelo; (iii) análisis de convergencia en tensiones y desplazamientos; (iv) dependencia de los resultados con la orientación de malla, particularmente cuando se modela plasticidad bajo régimen de ablandamiento. Este último punto es un aspecto clave cuando se pretende modelar, vía *MEF*, procesos de acumulación de deformaciones y falla material.

El resto de este apartado se organiza como sigue: en la próxima sección (5.2) se plantean las formulaciones débiles, continuas y discretas, de los esquemas mixtos estabilizados. En particular se introducen elementos finitos con funciones de interpolación de igual orden (triángulos y tetraedros lineales). Aquellos aspectos vinculados a la implementación numérica computacional del esquema se exponen en la sección 5.3. La sección 5.4 está dedicada a mostrar ejemplos numéricos bidimensionales y tridimensionales, con especial énfasis en la utilización de modelos de plasticidad. Por último, en la sección 5.5 se discuten algunas observaciones y comentarios importantes de este estudio.

Observación 16 *como objetivo secundario, se analiza además la performance de la presente formulación mixta estabilizada en un entorno de cálculo distribuido ([SSH04b]). Sin embargo, para evitar desviarse del fin principal del capítulo, este aporte adicional se presenta como un apéndice (véase apéndice C), donde se trata en forma detallada este aspecto particular del modelo.*

5.2. Formulación mixta estabilizada en mecánica de sólidos

5.2.1. El problema numérico de la incompresibilidad

Para situaciones cercanas a la incompresibilidad material, la simulación numérica con elementos finitos estándar resulta poco confiable en términos de la precisión en la respuesta. Esto se debe a que la formulación irreducible en desplazamientos impone esta restricción cinemática de forma fuerte. El espacio discreto de aproximación del *MEF* resulta sobre restringido y no es posible representar en forma adecuada el campo de desplazamientos real que se observa en el continuo [ZT00, Hug87].

La verificación explícita de la condición de incompresibilidad puede evitarse introduciendo campos adicionales de interpolación, mejorando en consecuencia el tratamiento de las restricciones internas del problema. Desde este punto de vista, las formulaciones mixtas *desplazamiento-presión* ofrecen una alternativa factible para imponer la incompresibilidad en forma débil. Sin embargo, en este tipo particular de aproximación es necesario verificar ciertas condiciones de compatibilidad entre las funciones de interpolación de los campos discretizados para asegurar convergencia y estabilidad de los elementos. Tales criterios se reconocen en la literatura como *Condiciones de Ladyzhenskaya-Babusca-Brezzi* o simplemente *LBB*, véase Babuska [Bab71], Brezzi [Bre74], Brezzi & Fortin [BF91].

Lamentablemente, las interpolaciones en desplazamiento y presiones de igual orden, relevantes desde el punto de vista algorítmico, no satisfacen dicha condición. Ante este inconveniente, una opción posible es utilizar los denominados *esquemas de estabilización*

que permiten eliminar las inestabilidades numéricas en formulaciones mixtas que no verifican LBB . Actualmente, el desarrollo alcanzado por estos métodos permite su aplicación en una gran variedad de problemas en la mecánica del continuo.

5.2.2. Formulación variacional

Considérese un problema de mecánica de sólidos en donde se asume la hipótesis de geometría lineal. Respetando la nomenclatura introducida en los capítulos previos, las condiciones de contorno cinemáticas y mecánicas pueden escribirse de la forma (véase figura 5.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u & & (a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{t}^* & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma & & (b) \end{aligned} \quad (5.1)$$

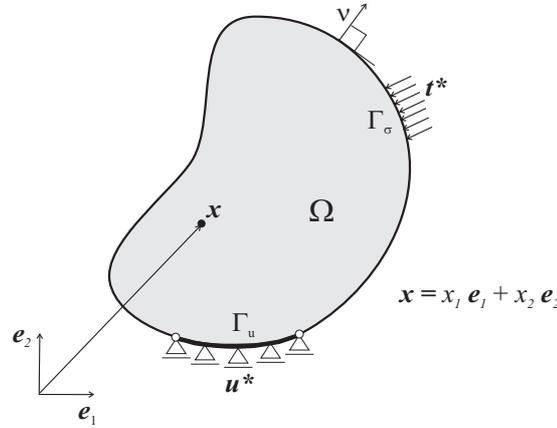


Figura 5.1: Nomenclatura básica para la definición del problema mecánico.

La forma desacoplada del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, en su componente esférica¹ ($\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$) y desviadora² ($\mathbf{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$):

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbb{I} + \mathbf{S} \quad (5.2)$$

nos permite escribir las ecuaciones de movimiento de Cauchy, despreciando efectos inerciales, como sigue:

$$\nabla \sigma_m + \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.3)$$

donde la variable \mathbf{b} representa un campo de fuerzas distribuidas por unidad de masa y ρ la densidad del material.

Introduciendo las ecuaciones del modelo constitutivo, la dependencia del tensor de tensiones con el campo (gradiente) de desplazamientos \mathbf{u} puede expresarse:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \underbrace{\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\sigma_m} \mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (5.4)$$

¹Definiendo el tensor de proyección esférico $\mathbf{P}_E = \frac{1}{3}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$, se obtiene: $\sigma_m \mathbb{I} = \mathbf{P}_E : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I}$

²Definiendo el tensor de proyección desviador $\mathbf{P}_D = \mathbb{I} - \mathbf{P}_E$, se obtiene: $\mathbf{S} = \mathbf{P}_D : \boldsymbol{\sigma} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$.

asumiendo que en el primer t3rmino la tensi3n media, σ_m , s3lo depende de la traza del tensor de deformaciones ($\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$) a trav3s de la funci3n $\hat{\sigma}_m$.

Una aproximaci3n variacional cl3sica y ampliamente utilizada para el problema cuasi est3tico 5.3, 5.4 con condiciones de borde 5.1 se basa en adoptar como variables primales el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ y la presi3n hidrostática $p(\mathbf{x})$ (definida tambi3n como tensi3n media negativa: $p(\mathbf{x}) = -\sigma_m$). En este tipo particular de formulaci3n, el campo de tensiones se reconstruye simplemente evaluando:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (5.5)$$

donde $p(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ deben satisfacer adem3s:

$$p(\mathbf{x}) = -\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.6)$$

la cual puede considerarse como una restricci3n adicional a nivel del continuo entre los dos campos primarios (\mathbf{u}, p) .

De aqu3 en adelante asumimos una ley material cuya tensi3n media se describe en t3rminos de una relaci3n lineal de $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$, tal como:

$$\hat{\sigma}_m(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \hat{\sigma}_m^{-1}(-p) = -\frac{p}{\kappa} \quad (5.7)$$

siendo κ el m3dulo de compresibilidad volum3trico ($\rightarrow \infty$ si el material es incompresible).

Observaci3n 17 *en particular estudiaremos modelos constitutivos de plasticidad tipo J_2 , discutidos oportunamente en el cap3tulo 2, secci3n 2.4. En este tipo de ley constitutiva es sencillo deducir las ecuaciones 5.7. Consid3rese para ello la cl3sica relaci3n tensi3n deformaci3n para plasticidad:*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad ; \quad \mathbf{C}^e = \lambda (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + 2\mu \mathbb{I}$$

en consecuencia se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\lambda (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) + 2\mu \mathbb{I}] : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

y utilizando la identidad $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$, la expresi3n anterior se escribe:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \kappa (\mathbb{I} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbb{I} + 2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ &= \underbrace{\kappa (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\hat{\sigma}_m} \mathbb{I} + \underbrace{2\mu \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}_{\mathbf{S}(\mathbf{u})} \\ &= -p\mathbb{I} + \mathbf{S}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ideas previas, las ecuaciones variacionales del problema mecánico 5.3, 5.5, 5.6 junto con las condiciones de contorno 5.1-(a) pueden expresarse de la siguiente manera:

- dado $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, fuerzas prescritas por unidad de volumen y superficie respectivamente

- encontrar el campo vectorial $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y el campo escalar $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; $(\mathbf{u}, p) \in (H^1_{(\Omega)} \times L^2_{(\Omega)})$, tal que se verifique:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([p, \mathbf{u}]; [q, \mathbf{w}]) &= -\langle p; \nabla \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}); (\nabla \mathbf{w})^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w} \rangle - \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_\sigma + \langle q; (\frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}) \rangle = 0 \quad (5.8) \\ &\quad \forall \mathbf{w} \in H^1_{0(\Omega)} \quad \wedge \quad \forall q \in L^2_{(\Omega)} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{w} \in H^1_{0(\Omega)}$ y $q \in L^2_{(\Omega)}$ representan variaciones admisibles del campo de desplazamientos y presiones respectivamente. Debe notarse que se ha generalizado la notación $\langle \mathbf{a}; \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\Omega$ para todos los productos duales que intervienen en 5.8. De acuerdo con la nomenclatura estándar, $L^2_{(\Omega)}$ incluye el conjunto de funciones cuadrado integrables en Ω y $H^1_{(\Omega)}$ aquellas funciones cuya primer derivada pertenece a $L^2_{(\Omega)}$. Además $H^1_{0(\Omega)}$ es un subespacio de $H^1_{(\Omega)}$ tales que sus elementos se anulan sobre $\Gamma_{\mathbf{u}}$, es decir sobre la frontera Dirichlet de Ω .

Considérese que (\mathbf{u}^h, p^h) , con $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \subset H^1_{(\Omega^h)}$ y $p^h \in Q^h \subset L^2_{(\Omega^h)}$, representan las aproximaciones por elementos finitos del campo de desplazamientos y presiones respectivamente, siendo \mathcal{V}^h la aproximación a $H^1_{(\Omega^h)}$ ($\mathcal{V}^h \approx H^1_{(\Omega^h)} \Rightarrow \mathcal{V}_0^h \approx H^1_{0(\Omega^h)}$) y Q^h la aproximación de $L^2_{(\Omega^h)}$. El hecho de adoptar funciones de interpolación de igual orden para dichos espacios, implica necesariamente la introducción de términos de estabilización \mathcal{S}_{st} . La forma discreta del principio variacional 5.8 puede formularse entonces como:

- conocido los valores prescritos de $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$
- encontrar los campos $\mathbf{u}^h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $p^h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; $(\mathbf{u}^h, p^h) \in (\mathcal{V}^h \times Q^h)$, tal que se satisfaga:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([p^h, \mathbf{u}^h]; [q^h, \mathbf{w}^h]) &= -\langle p^h; \nabla \cdot \mathbf{w}^h \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}^h); (\nabla \mathbf{w}^h)^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w}^h \rangle - \\ &\quad - \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}^h) d\Gamma_\sigma + \langle q^h; (\frac{p^h}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}^h) \rangle + \quad (5.9) \\ &\quad + \mathcal{S}_{st}([p^h, \mathbf{u}^h]; [q^h, \mathbf{w}^h]) = 0 \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_0^h \quad \wedge \quad \forall q^h \in Q^h \end{aligned}$$

En el contexto de *CFD* (*Computational Fluid Dynamics*) se han propuesto diferentes alternativas para evaluar los términos estabilizantes \mathcal{S}_{st} . Por ejemplo, la estrategia denominada *GLS* (*Galerkin/Least Square Hughes et al. [HFB85]*) es probablemente la más reconocida. Esta misma técnica ha sido extendida a aplicaciones en *Mecánica de Sólidos* por Klass et al. [KMS99], quien utilizó interpolación lineal de igual orden en elasticidad finita incompresible obteniendo resultados satisfactorios.

A continuación se introduce en forma resumida: (i) el esquema *PSPG* (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*), el cual puede ser considerado como como un caso particular del método GLS, (ii) la estrategia *PGP* (*orthogonal sub-grid Pressure Gradient Projection*) [Cod00a, CB00]. El último de estos esquemas fue recientemente extendido al contexto de elasticidad por Chiumenti et al. [CVdSC02a] y utilizado en plasticidad por Chiumenti

et al. [CVdSC02b, CCVdS03] (véase también Valverde [Val02]). Estos estudios han demostrado la capacidad de esta aproximación para resolver problemas donde esquemas alternativos difícilmente funcionan satisfactoriamente y por tal motivo se la ha adoptado como técnica de estabilización a lo largo de este trabajo.

Las dos metodología mencionadas (*PSPG* y *PGP*) consideran el término \mathcal{S}_{st} proporcional a un factor de estabilización τ dependiente de propiedades elásticas del material y del tamaño del elemento finito, por lo tanto su valor cambia de un elemento a otro.

5.2.3. Esquema de estabilización *PSPG*

En esta estrategia el término \mathcal{S}_{st} en la ecuación (5.9) se define mediante:

$$\mathcal{S}_{st}^{PSPG} = - \left\langle \nabla q^h; \tau^{PSPG} \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p^h, \mathbf{u}^h) + \rho \mathbf{b})}_{\mathbf{r}: \text{residuo de la ec. de Cauchy}} \right\rangle_{\Omega^e} \quad \forall q^h \in Q^h \quad (5.10)$$

donde el factor τ^{PSPG} es:

$$\tau^{PSPG} = \alpha \frac{h_e^2}{2\mu} \quad (5.11)$$

siendo α un parámetro de estabilidad positivo, h_e el tamaño característico del elemento finito y μ el módulo de corte para el problema elástico.

Observación 18 *Tezduyar et al. [TMRS92] han incluido un término adicional para el tratamiento de la restricción de incompresibilidad en (5.9).*

Observación 19 *en Klass et al. [KMS99] se ha considerado un término de estabilización similar sin incluir las fuerzas de cuerpo ($\rho \mathbf{b}$) en el término \mathbf{r} de la ecuación 5.10.*

5.2.4. Esquema de estabilización *PGP*

El término de estabilización \mathcal{S}_{st} se define ahora como sigue:

$$\mathcal{S}_{st}^{PGP} = \langle \nabla q^h; \tau^{PGP} (\nabla p^h - \boldsymbol{\Pi}^h) \rangle_{\Omega^e} \quad \forall q^h \in Q^h \quad (5.12)$$

donde $\boldsymbol{\Pi}^h (\in \mathcal{V}^h)$ es la proyección L^2 del gradiente de presión ∇p^h sobre el espacio discreto de aproximación por elementos finitos \mathcal{V}^h (ver figura 5.2):

$$\langle (\nabla p^h - \boldsymbol{\Pi}^h); \boldsymbol{\eta}^h \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}^h \quad (5.13)$$

siendo $\boldsymbol{\eta}^h$ variaciones admisibles del campo gradiente de presión proyectado $\boldsymbol{\Pi}^h$ ($\boldsymbol{\eta}^h \equiv \delta \boldsymbol{\Pi}^h$).

Recuérdese que las funciones en \mathcal{V}^h no toman valores nulos sobre la frontera $\Gamma_{\mathbf{u}}$, de esta forma $\boldsymbol{\Pi}^h$ es un campo vectorial de \mathbb{R}^{ndim} que pertenece al mismo espacio de aproximación que los desplazamientos \mathbf{u}^h . La ecuación 5.13, la cual determina el campo $\boldsymbol{\Pi}^h$, debe agregarse como una restricción adicional a la forma mixta variacional 5.9.

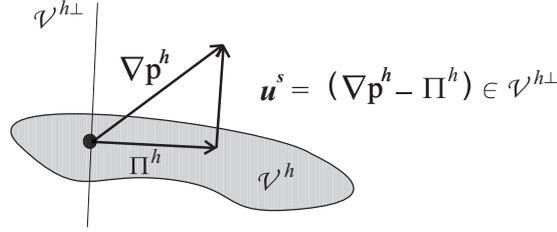


Figura 5.2: Representación gráfica de la proyección L^2 del gradiente de presión discretizado ∇p^h sobre el espacio de aproximación por Elementos Finitos.

El coeficiente de estabilización τ^{PGP} puede computarse a nivel de cada elemento finito como función de su tamaño característico y módulo de corte:

$$\tau^{PGP} = c \frac{h_e^2}{2\mu^*} \quad (5.14)$$

donde $c \approx \mathcal{O}(1)$ es un coeficiente escalar adimensional constante (Codina [Cod00a] utilizó un valor $c = 4$ en aplicaciones de mecánica de fluidos). Siguiendo a Chiumenti et al. [CVdSC02b], se adopta un módulo de corte secante μ^* para la evaluación final de τ^{PGP} en problemas de plasticidad J_2 .

Observación 20 *se recomienda consultar el anexo B, donde se ha desarrollado una interpretación conceptual de la estabilización mediante sub escalas, en el contexto de sub escalas ortogonales, con el objeto de justificar la aparición del término adicional (estabilizante) τ^{PGP} en las ecuaciones clásicas de balance.*

5.3. Implementación numérica del esquema estabilizado PGP

En esta sección, se describe la implementación numérica utilizando el término de estabilización correspondiente al esquema PGP . Para ello se introducen las aproximaciones de los campos discretos en la formulación variacional 5.9, incorporando además la ecuación de proyección 5.13 como una restricción adicional a satisfacer.

5.3.1. Definición de los campos discretos

Consideremos que los espacios Q y \mathcal{V} pueden aproximarse con funciones de interpolación de igual orden (en particular aproximación lineal por tramos del tipo C^0). El problema mecánico (5.3, 5.5, 5.6, 5.1-(a)) se describe entonces en términos de una formulación variacional de tres campos, de la siguiente manera:

- asumiendo que se conoce $\mathbf{b} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$ y $\mathbf{t}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$
- determinar $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$, $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{\Pi} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim}$; $(\mathbf{u}, p, \mathbf{\Pi}) \in (\mathcal{V} \times Q \times \mathcal{V})$, tal que se verifique simultáneamente:

$$-\langle p; \nabla \cdot \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}); (\nabla \mathbf{w})^{sym} \rangle - \langle \rho \mathbf{b}; \mathbf{w} \rangle = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{w}) d\Gamma_\sigma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \quad (5.15)$$

$$\langle q; \left(\frac{p}{\kappa} + \nabla \cdot \mathbf{u}\right) \rangle + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \langle \nabla q; \tau^{PGP}(\nabla p - \mathbf{\Pi}) \rangle_{\Omega^e} = 0 \quad \forall q \in Q \quad (5.16)$$

$$\langle (\nabla p - \mathbf{\Pi}); \boldsymbol{\eta} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (5.17)$$

Observación 21 por cuestiones de claridad de lectura, se ha suprimido el supraíndice h que hacía referencia a campos discretos, ya que de aquí en adelante no hay posibilidad de confusión.

Observación 22 debe notarse que la aproximación discreta del campo $\mathbf{\Pi}$ utiliza el mismo espacio de interpolación que \mathbf{u} .

Introduciendo notación matricial de uso común en el contexto del MEF, los campos interpolados se expresan como:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^e(t) \quad ; \quad \mathbf{w}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{w}}^e \quad (5.18)$$

$$p^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{p}^e(t) \quad ; \quad q^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p^e(\mathbf{x}) \hat{q}^e \quad (5.19)$$

$$\mathbf{\Pi}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{\Pi}}^e(t) \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u^e(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\eta}}^e \quad (5.20)$$

donde \mathbf{N}_u^e y \mathbf{N}_p^e representan los arreglos de funciones de interpolación para los grados de libertad de desplazamiento y presión definidos a nivel del elemento respectivamente, $(\hat{\bullet})$ se refiere a los valores nodales de la variable (\bullet) y el supraíndice e hace referencia al elemento finito en estudio. Teniendo en cuenta 5.18 y 5.19 se tiene:

$$(\nabla \mathbf{N}_u^e)^{sym} = \mathbf{B}^e \quad (5.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_u^e = \mathbb{I}^T \mathbf{B}^e \quad (5.22)$$

$$\nabla \mathbf{N}_p^e = \mathbf{D}^e \quad (5.23)$$

en donde \mathbf{B}^e simboliza el clásico operador deformación-desplazamiento e \mathbb{I} es la representación, en formato matricial, del tensor identidad de segundo orden ($\mathbb{I} = [1, 1, 0]^T$ para 2D, $\mathbb{I} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$ para 3D, asumiendo que en la notación vectorial de tensores las componentes de la deformación se escriben: $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}^T$ en 2D y $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}^T$ en 3D).

La versión algorítmica del sistema de ecuaciones (5.15)-(5.17) puede escribirse convenientemente:

$$\begin{cases} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^e(\hat{\mathbf{u}}^e) d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{\Pi}} = 0 \\ \mathbf{H} \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{M}_u \hat{\mathbf{\Pi}} = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

siendo \mathbf{A} el operador de ensamble estándar de elementos finitos. Para poner en evidencia el carácter simétrico del sistema, se ha cambiado el signo de la ecuación 5.24-(b) y la expresión 5.24-(c) se ha escalado por τ^{PGP} . A partir de 5.24-(a) surge la definición del vector de fuerzas $\mathbf{F}_u^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}_u^{(ext)} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{b} \, d\Omega^e + \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{t}^* \, d\Gamma_\sigma^e \right] \quad (5.25)$$

además las matrices \mathbf{G}_0 , \mathbf{M}_p , \mathbf{M}_u , \mathbf{L} y \mathbf{H} se computan mediante:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbb{I} \mathbf{N}_p^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_p^{eT} \mathbf{N}_p^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{N}_u^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{D}^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{D}^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.29)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^{eT} \tau^{PGP} \mathbf{D}^e \, d\Omega^e \right] \quad (5.30)$$

donde el supraíndice 0, en 5.26, considera la condición de borde Dirichlet homogénea sobre el espacio de variaciones admisibles de desplazamiento \mathcal{V}_0 . Debe notarse que, en la presente formulación, aun al considerar interpolaciones de igual orden, existen diferencias entre el espacio de variaciones admisibles de \mathbf{u} y \mathbb{II} debido a la falta de condiciones de borde sobre este último campo ($\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0$; $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$).

5.3.2. Evaluación del residuo

El sistema no lineal de ecuaciones algebraicas 5.24, el cual depende del (pseudo) tiempo $t \in [0, T]$, puede resolverse para cada paso de análisis mediante un procedimiento iterativo de Newton-Raphson. En este caso, el alto coste computacional que representa la introducción del nuevo campo vectorial \mathbb{II} , hace que tal esquema no sea competitivo si lo comparamos con estrategias alternativas de estabilización. Por este motivo, siguiendo los trabajos de Codina [Cod00a] y Chiumenti et al. [CVdSC02a], se plantea un tratamiento simplificado para lograr una mayor eficiencia numérica. Considérese para ello que el campo gradiente de presión proyectado \mathbb{II} no varía significativamente entre el paso (i) y el

paso $(i + 1)$, luego es posible resolver un sistema de ecuaciones alternativo de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^{e(i+1)} d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} = \mathbf{F}_u^{(ext)(i+1)} & (a) \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L}^{(i+1)} \right] \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} = -\mathbf{H}^T \hat{\Pi}^{(i)} & (b) \end{cases} \quad (5.31)$$

donde $\hat{\Pi}^{(i)}$ se evalúa considerando 5.24-(c) una vez que el procedimiento de Newton-Raphson no lineal ha convergido para las variables de desplazamiento y presión en el paso de carga (i) . A nivel global es posible expresar:

$$\hat{\Pi}^{(i)} = \mathbf{M}_u^{-1} \mathbf{H}^{(i)} \hat{\mathbf{p}}^{(i)} \quad (5.32)$$

En estas circunstancias, el término derecho en la expresión 5.31-(b) puede considerarse como un vector de cargas conocido para esta ecuación, mientras que la evaluación de $\hat{\Pi}^{(i)}$, a partir de 5.32 al final de cada paso (i) , requiere un costo computacional despreciable (similar a una estrategia estándar de suavizado de variables), principalmente si la matriz de masa \mathbf{M}_u , como es usual, se construye en forma aglutinada (lumped o diagonal).

El sistema de ecuaciones 5.31 puede reescribirse de una forma más compacta:

$$\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F}^{(ext)} \quad (5.33)$$

en términos del vector de fuerza interna generalizada $\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p)$:

$$\mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \mathbf{F}_p^{(int)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{S}^{e(i+1)} d\Omega^e \right] - \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} \\ -\mathbf{G}_0^T \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L}^{(i+1)} \right] \hat{\mathbf{p}}^{(i+1)} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

y del vector fuerza externa generalizada $\mathbf{F}^{(ext)}$:

$$\mathbf{F}^{(ext)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ \mathbf{F}_p^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^{(ext)} \\ -\mathbf{H}^T \hat{\Pi}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las definiciones 5.34 y 5.35 el residuo $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p)$ del modelo numérico mixto-estabilizado se evalúa mediante:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{u}, p) - \mathbf{F}^{(ext)} \quad (5.36)$$

5.3.3. Tensor constitutivo tangente consistente

La utilización de un esquema iterativo implícito del tipo Newton-Raphson completo, el cual asegura velocidad de convergencia cuadrática para la resolución de 5.33, requiere el continuo cómputo de la matriz tangente. Considérese para ello la siguiente definición del vector de variables independientes generalizadas:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}, p]^T \quad (5.37)$$

En este contexto de análisis, el Jacobiano $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ del sistema puede evaluarse a partir de la variación de primer orden del residuo con respecto al conjunto de variables independientes $\mathbf{X} = [\mathbf{u}, p]^T$:

$$\delta \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X})} \delta \mathbf{X} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X})} \delta \mathbf{X} = \delta \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X}) \quad (5.38)$$

o bien en forma extendida:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{F}_u^{(int)} \\ \delta \mathbf{F}_p^{(int)} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}^{(int)}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}} \\ \delta \hat{p} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{X}} \quad (5.39)$$

definiendo cada submatriz \mathbf{K}_{ij} en (5.39) de la forma:

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^e T dev(\mathbf{C}) \mathbf{B}^e d_{\Omega^e} \right] \quad (5.40)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \mathbf{K}_{pu}^T = -\mathbf{G}_0 \quad (5.41)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = - \left[\frac{1}{\kappa} \mathbf{M}_p + \mathbf{L} \right] \quad (5.42)$$

donde $dev(\mathbf{C})$ es la componente desviadora del tensor constitutivo tangente algorítmico³ evaluado en el elemento finito a partir del modelo J_2 .

5.4. Ejemplos de aplicación

A continuación se evalúa la performance numérica del modelo mixto estabilizado PGP , resolviendo casos bidimensionales y tridimensionales. Estos resultados se comparan con soluciones obtenidas con elementos finitos estándar de Galerkin (aquí denominados STD) y con una formulación mixta sin estabilización ($MSTD$).

En el primer test se presenta una estimación de la tasa de convergencia en los campos \mathbf{u} y p del esquema PGP a medida que se refina la malla, comparándola con distintas formulaciones de elementos, en régimen compresible e incompresible.

En el segundo ejemplo numérico (elasticidad incompresible) se realiza un estudio paramétrico en términos del coeficiente de estabilización c y se demuestra una completa analogía entre el modelo PGP y una estrategia de estabilización del tipo $PSPG$. Este ejemplo involucra una gran cantidad de grados de libertad. Por este motivo el mismo se ha resuelto en un entorno paralelo de cálculo utilizando diferentes estrategias iterativas de solución y distintos preconditionadores para resolver el sistema final de ecuaciones. La descripción de este aspecto distintivo del ejemplo no se incluye en esta sección sino que se detalla en el apéndice C.

³Entendemos por componente desviadora de un tensor de cuarto orden a la siguiente proyección: $dev(\mathbf{C}) = \mathbf{P}_D : \mathbf{C}$ donde, como ya se definió, se tiene $\mathbf{P}_D = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I})$.

Las subsecciones 5.4.3, 5.4.4, 5.4.5 están dedicadas a la solución de problemas en plasticidad. En particular, estamos especialmente interesados en evaluar la capacidad que posee del modelo mixto estabilizado *PGP* para capturar la carga límite, el mecanismo de falla en forma de bandas de corte y la sensibilidad u objetividad en malla (independencia de orientación) en la respuesta post-crítica del material. Esta última propiedad es una de las características más importantes que se espera de un elemento finito pensado para obtener una correcta representación del fenómeno de localización de deformaciones y predicción satisfactoria de los modos de falla.

5.4.1. Análisis de convergencia

Se analizan en este apartado las propiedades de convergencia del triángulo estabilizado *PGP* en régimen de elasticidad compresible e incompresible. Para este fin, consideramos un problema que posee solución analítica, el cual consiste en una viga en voladizo sometida a un modo de deformación por flexión. La solución exacta para el caso de tensión o deformación plana puede encontrarse en cualquier libro clásico de teoría de elasticidad. En particular, hemos tomado este ejemplo de Belytschko et al. [BB91] donde también se utiliza este test para validar modelos numéricos ante restricciones de incompresibilidad.

En la figura 5.3-(a) se observa el modelo físico y la geometría del problema. La solución analítica, en términos del campo de desplazamientos $\mathbf{u} = [u_x, u_y]$, viene expresada de la forma:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{Fy}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu})(y^2 - \frac{1}{4}D^2) \right] \\ u_y(x, y) &= -\frac{F}{6EI} \left[3\bar{\nu}y^2(L - x) + \frac{1}{4}(4 + 5\bar{\nu})D^2x + (3L - x)x^2 \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde F es la carga resultante tangencial por unidad de longitud, $I = D^3/12$ es una medida de la rigidez flexional. Considerando el caso de deformación plana se tiene que: $\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}$, siendo E y ν el módulo de Young y la relación de Poisson respectivamente.

La condición de borde en tracciones a imponer en los extremos de la viga debe ser compatible con la solución analítica del campo tensional derivado a partir del campo de desplazamientos 5.43. En $x = 0$, se tendrá:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0, y) &= -\frac{Fy}{I}L & (a) \\ \tau_{xy}(y) &= \frac{F}{2I} \left[\frac{1}{4}D^2 - y^2 \right] & (b) \end{aligned} \quad (5.44)$$

mientras que en $x = L$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$ y las tensiones de corte τ_{xy} , como no dependen de la posición x , están dadas nuevamente por la ecuación 5.44-(b).

Las condiciones de borde cinemáticas y mecánicas pueden observarse en la figura 5.3-(b) para la malla más gruesa utilizada. Si se imponen las restricciones adecuadas de manera de conservar la simetría que presenta el problema, sólo es necesario modelar la mitad (superior) de la viga.

El análisis de convergencia aquí presentado se realiza en términos de medidas del error en desplazamientos y presiones (precisamente las variables independientes del modelo

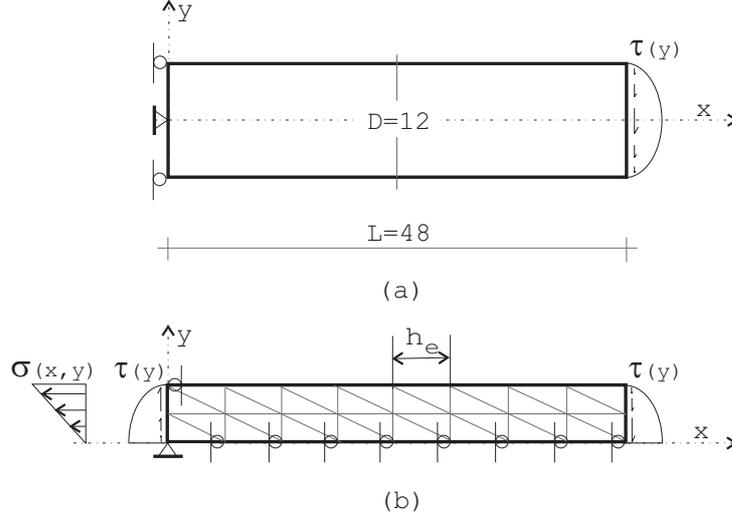


Figura 5.3: Análisis de convergencia del esquema PGP . Test en modo flexión de viga en cantilever: (a) Modelo físico y geometría de la estructura. (b) Modelo numérico y condiciones de contorno.

mixto). Tales magnitudes se evalúan según normas definidas en el espacio de funciones cuadrado integrables L^2 , de la forma:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{L^2} = \|(\mathbf{u}_{(EX)} - \mathbf{u}_{(PGP)})\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u}_{(EX)} - \mathbf{u}_{(PGP)})^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

$$\|\mathbf{e}_p\|_{L^2} = \|(p_{(EX)} - p_{(PGP)})\|_{L^2} = \left[\int_{\Omega} (p_{(EX)} - p_{(PGP)})^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.46)$$

donde $(\bullet)_{(EX)}$ y $(\bullet)_{(PGP)}$ representan la solución exacta y numérica obtenida mediante el modelo mixto estabilizado, respectivamente.

En particular, se estudian dos situaciones dependientes del valor numérico del coeficiente de Poisson (caso compresible $\nu = 0,25$ y caso incompresible $\nu = 0,49999$). En la figura 5.4 y 5.5 se observan las curvas de convergencia de los triángulos: estándar (STD), mixto sin estabilización ($MSTD$) y mixto estabilizado (PGP , $c = 1$) como función del tamaño característico del elemento h_e .

Como era previsible, debe notarse que en la situación compresible las tres formulaciones de elementos finitos muestran velocidad de convergencia similar, tanto para el campo de desplazamiento como para el de presiones. En este caso, el esquema mixto y en particular el mixto estabilizado, presentan claras desventajas desde el punto de vista del coste computacional. Sin embargo, si analizamos ahora el desempeño del elemento PGP en régimen incompresible, se obtiene una clara ventaja en relación a otros modelos. La tasa de convergencia resultante es de aproximadamente 1,7 (en desplazamientos y presiones), similar al caso compresible. Esto implica que la restricción cinemática de incompresibilidad no afecta sustancialmente la velocidad de convergencia en el modelo mixto-estabilizado, como sí sucede para las restantes formulaciones de elementos.

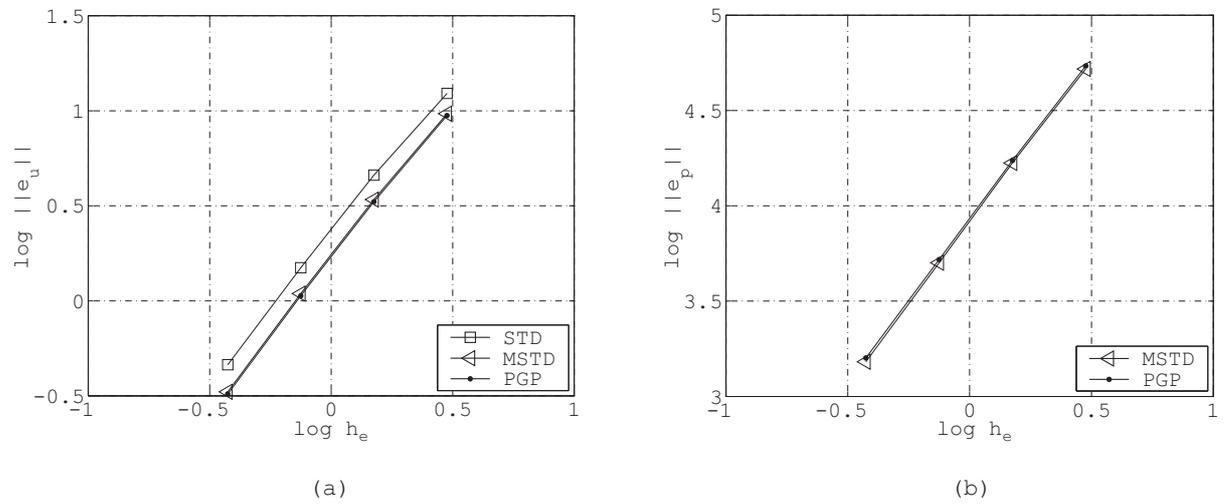


Figura 5.4: Análisis de convergencia del esquema *PGP*. Caso de elasticidad compresible $\nu = 0,25$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.

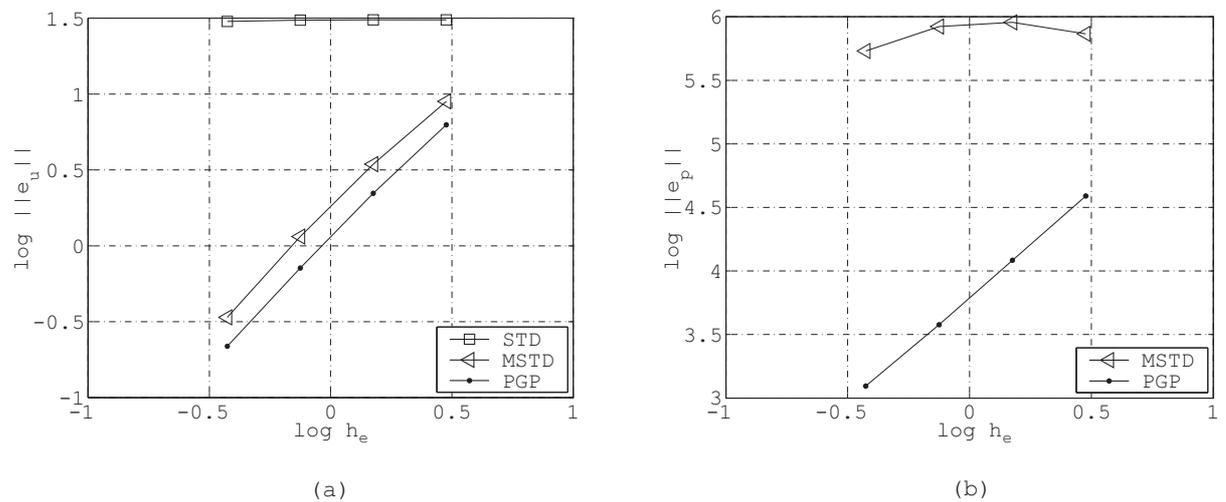


Figura 5.5: Análisis de convergencia del esquema *PGP*. Caso de elasticidad incompresible $\nu = 0,49999$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.

5.4.2. Elasticidad incompresible

En este ejemplo se evalúa la respuesta ante régimen de cuasi incompresibilidad elástica en un test de compresión dominante. El problema propuesto consiste en un bloque cúbico de $140 \times 140 \times 100$ (unidades de longitud expresadas en milímetros, ver figura 5.6) el cual se encuentra sometido a las siguientes condiciones de contorno: en la superficie inferior están restringidos todos los desplazamientos, la cara superior se asume vinculada a una placa suficientemente rígida capaz de imponer un desplazamiento vertical uniforme ($\delta y = 7[mm]$) mientras que el movimiento horizontal se encuentra impedido, los nodos ubicados sobre las caras laterales pueden desplazarse libremente. En la simulación numérica se ha utilizado un módulo de Young $E = 2999800 [MPa]$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,4999$, para inducir comportamiento de material incompresible.

En la figura 5.6 se muestran dos mallas no estructuradas de aproximadamente 56000 (figura 5.6-(a)) y 90000 (figura 5.6-(b)) elementos tetraédricos.

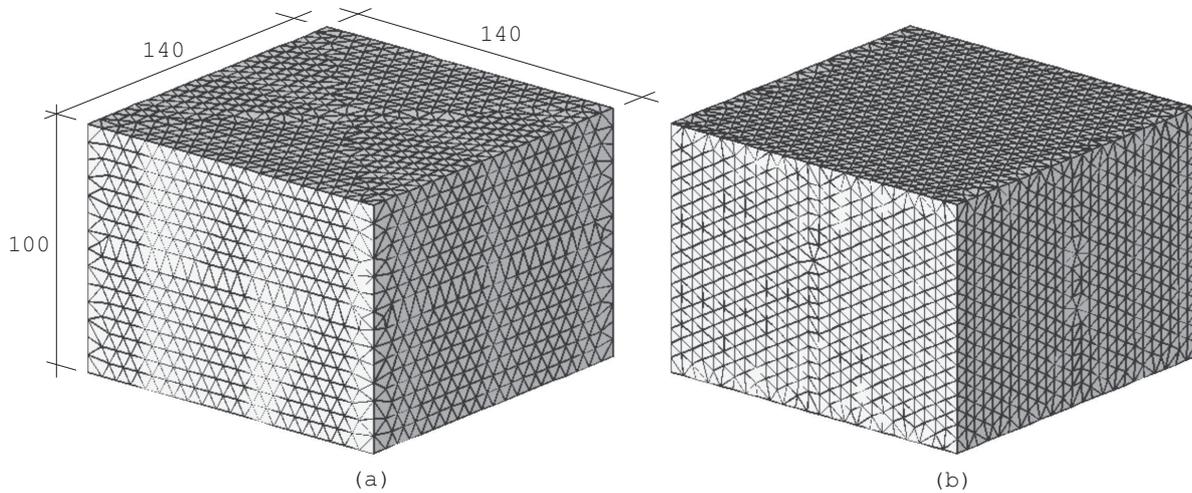


Figura 5.6: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Niveles de discretización del modelo numérico: (a) 56000 tetraedros (b) 90000 tetraedros.

Al intentar resolver el problema asumiendo un nivel de estabilización despreciable ($c \approx 0$, ver ecuación 5.14) se obtienen severos efectos de bloqueo volumétrico que se evidencian al observar los mapas de tensión media de la figura 5.7, para ambas configuraciones de mallas. Recordamos que esta situación representa la respuesta mecánica de un modelo mixto inestable, aquí denominado (*MSTD*)

El comportamiento oscilante de la componente esférica de la tensión disminuye drásticamente cuando se activan los términos de estabilización \mathcal{S}_{st}^{PGP} . De esta forma, considerando un coeficiente $c = 1$, en la figura 5.8 puede observarse que el modelo *PGP* captura en forma correcta la distribución de tensión hidrostática.

La transición desde una solución inestable hacia una solución estable, en un rango de valores del coeficiente de estabilización c , queda en evidencia en la figura 5.9. Allí se ha graficado la variación de la tensión media a lo largo del segmento de línea interno al cubo \overline{AB} , demostrándose además cómo los modos espúreos de oscilación de la presión pueden evitarse adoptando un adecuado nivel de estabilización.

Dado que no solamente estamos interesados en un análisis cualitativo de los resultados,

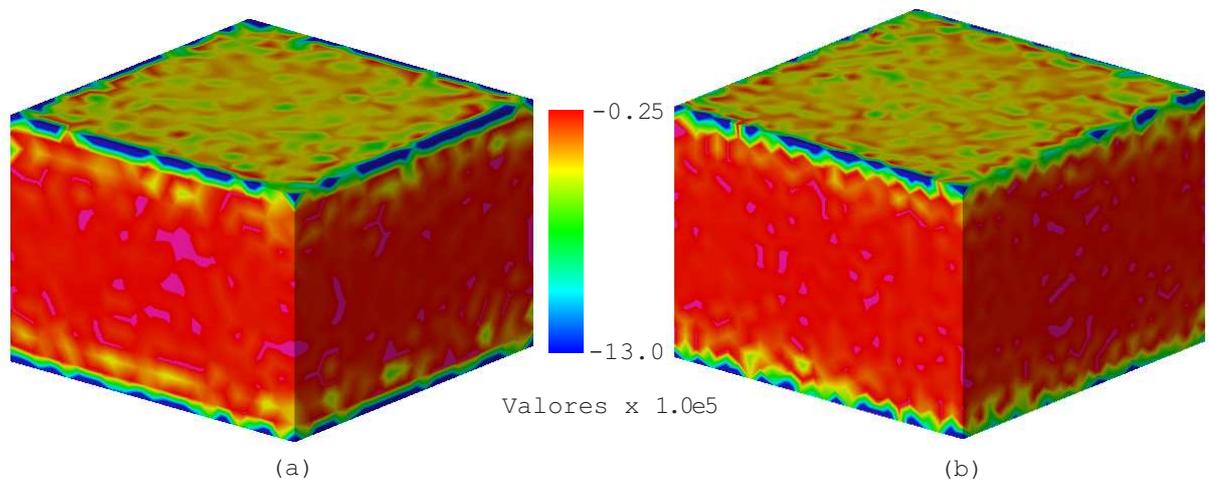


Figura 5.7: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta sin estabilización *MSTD*: (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.

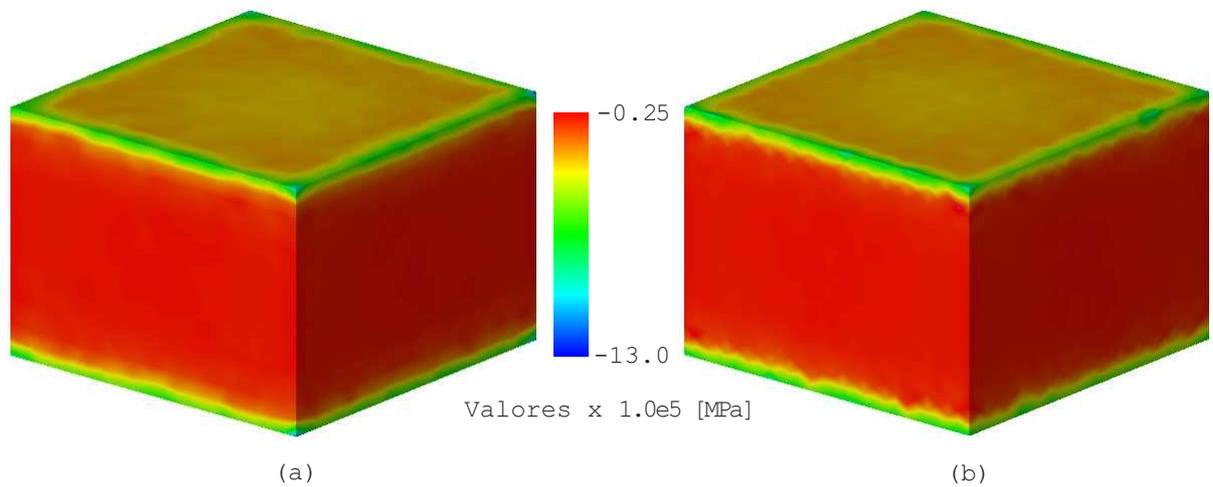


Figura 5.8: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta estabilizada *PGP*: (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.

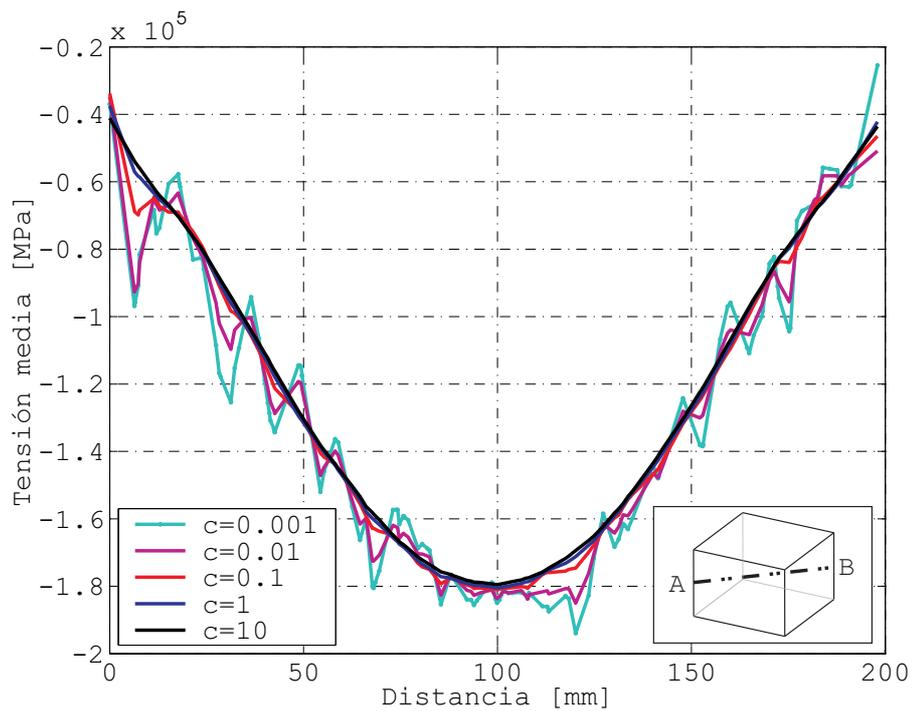


Figura 5.9: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Formulación *PGP* con diferentes valores del coeficiente de estabilización c .

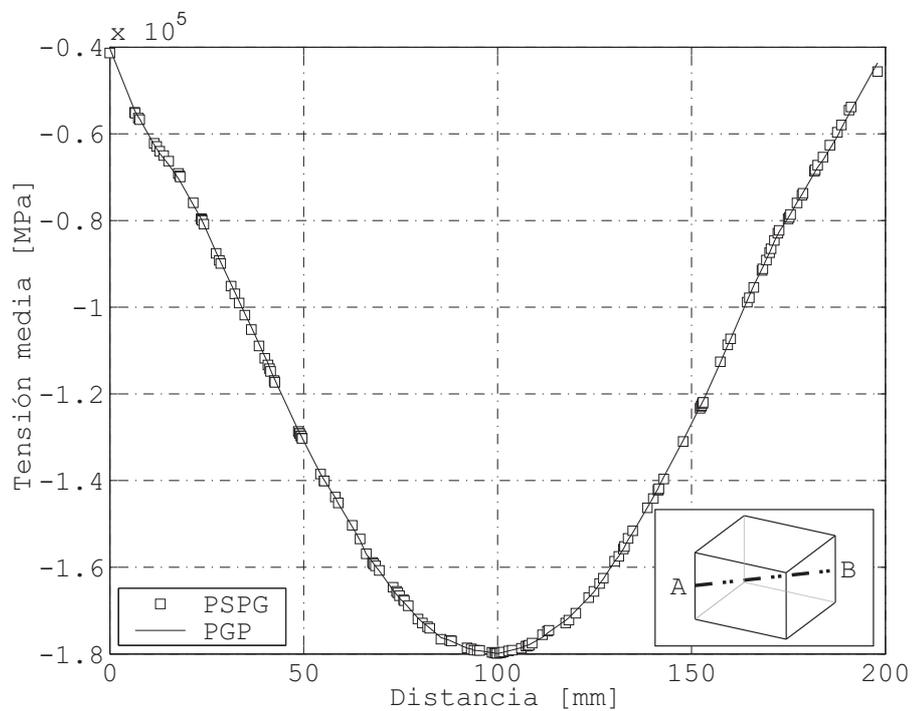


Figura 5.10: Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Comparación numérica de dos procedimientos de estabilización: *PSPG* vs *PGP*

a continuación se presenta una comparación numérica en términos de la tensión media σ_m , entre el modelo presente y una técnica de estabilización bien conocida, verificada y extensamente utilizada en el contexto de *CFD*, nos referimos en particular al esquema *PSPG* (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*).

De acuerdo con las expresiones 5.11 y 5.14, se han utilizado los siguientes factores de estabilización en la simulación:

$$\tau^{PSPG} = \frac{h_e^2}{12\mu} \quad ; \quad \tau^{PGP} = \frac{2h_e^2}{\mu} \quad (5.47)$$

La figura 5.10 muestra la comparación entre las curvas de tensión media a lo largo del segmento de línea interno \overline{AB} para el esquema *PSPG* y *PGP*. Debe notarse que ambas soluciones resultan prácticamente idénticas.

5.4.3. Test bidimensional de Prandtl

El objetivo básico de esta aplicación numérica, que corresponde a la versión bidimensional del test de Prandtl en deformación plana, es evaluar la sensibilidad u objetividad de la solución con respecto a la orientación de la malla de elementos finitos, particularmente en lo referente a la determinación de la máxima carga y obtención del mecanismo de colapso. El problema se describe como un semi espacio material cargado verticalmente por medio de una placa suficientemente rígida. Por cuestiones de practicidad, en la simulación numérica se ha limitado el dominio de estudio a un modelo discreto rectangular como se observa en la figura 5.11 (dimensiones en milímetros).

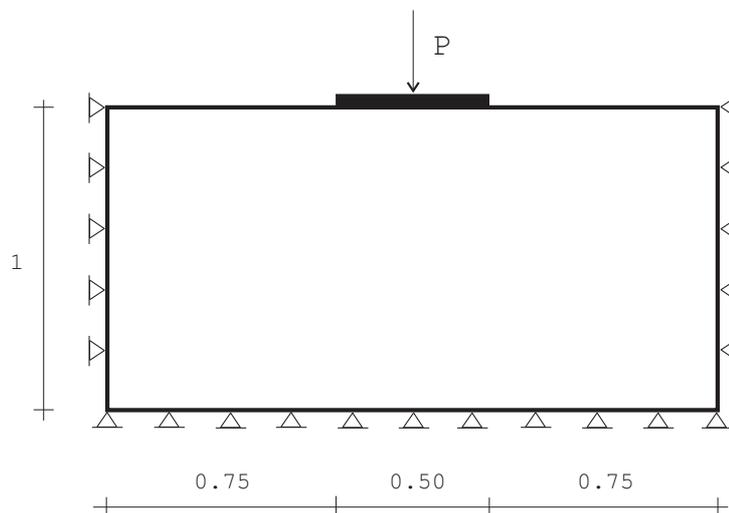


Figura 5.11: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Geometría y condiciones de contorno (unidad de longitud: milímetros).

El mecanismo de falla (no es único) y la correspondiente carga límite estructural (única), considerando un modelo material elasto-plástico perfecto J_2 ha sido determinado analíticamente (véase por ejemplo Kachanov [Kac71], pág. 219). En este sentido, la

solución en carga pico es:

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_y} = \frac{2 + \pi}{\sqrt{3}} \quad (5.48)$$

donde σ_N es la tensión neta bajo la zona de transferencia de carga y σ_y la tensión de fluencia del material. En el caso presente, se ha impuesto como restricción cinemática adicional que la placa rígida se desplace verticalmente sin rotación, con lo cual la unicidad en la determinación del mecanismo de falla queda garantizada.

La figura 5.12 muestra dos modelos discretos. La malla no estructurada 5.12-(a) se ha generado intencionalmente para obtener una distribución simétrica de nodos y elementos. La configuración estructurada 5.12-(b), revela direcciones predominantes d , en particular d_1 coincide con una de las bandas de deslizamiento del mecanismo de falla predicho por la solución analítica. Ambas mallas poseen aproximadamente 1800 elementos triangulares. La simulación numérica se ha realizado teniendo en cuenta un material que responde a un modelo constitutivo elástico-perfectamente plástico de Von Mises caracterizado por las propiedades mecánicas que se detallan a continuación: módulo de elasticidad $E = 1,0 [MPa]$, relación de Poisson $\nu = 0,499$ (nótese que se considera una situación de cuasi incompresibilidad desde el régimen elástico), tensión de fluencia $\sigma_y = 0,01 [MPa]$.

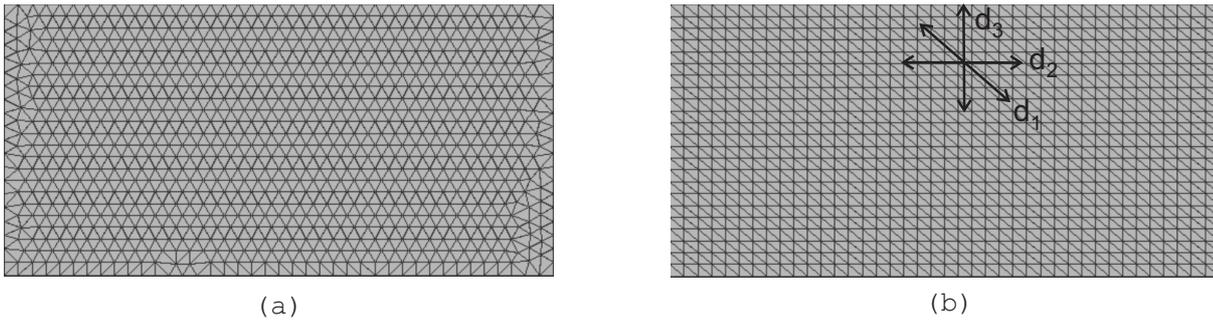


Figura 5.12: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Configuraciones de malla: (a) Malla no estructurada. (b) Malla estructurada.

La malla no estructurada se ha resuelto utilizando el triángulo mixto estabilizado con el procedimiento *PGP* ($c = 1$) y también con un elemento triangular mixto sin estabilización *MSTD* ($c \approx 0$). En la figura 5.13 se observan mapas de tensión media, al momento de alcanzar el máximo desplazamiento impuesto ($\delta_y = 0,10 [mm]$). Nuevamente la formulación mixta estándar muestra una pobre performance evidenciando severas oscilaciones en la componente volumétrica del campo tensional, mientras que la formulación *PGP*, en cambio, origina soluciones suaves.

A continuación, analizamos la capacidad del modelo *PGP* para capturar el mecanismo de colapso estructural, estudiando además cómo influye la orientación geométrica de los elementos en la respuesta final. La figura 5.14 muestra mapas de deformación plástica equivalente una vez que el flujo inelástico se ha desarrollado completamente. Puede observarse claramente que la malla no estructurada de triángulos *PGP* predice un patrón simétrico de bandas de deslizamiento, en total correspondencia con la solución analítica del problema, figura 5.14-(a)). Sin embargo, en el caso de malla estructurada (no simétrica) la respuesta en términos del campo de deformaciones plásticas no parece conservar

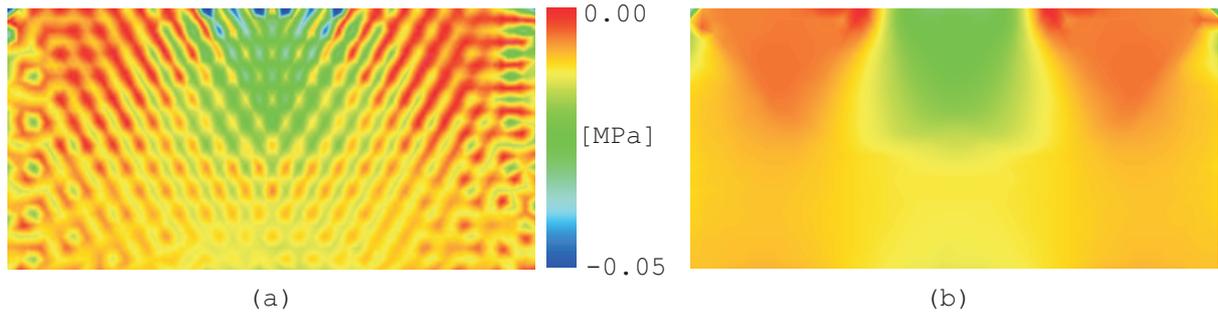


Figura 5.13: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapas de tensión media: (a) Formulación *MSTD*. (b) Formulación *PGP*.

estrictamente dicha simetría, ver figura 5.14-(b)). Esta situación es mucho más crítica aún para los elementos estándar *STD* (formulación irreducible en desplazamientos), donde el bloqueo cinemático por incompresibilidad resulta notorio, como queda evidenciado a partir de la figura 5.14-(c).

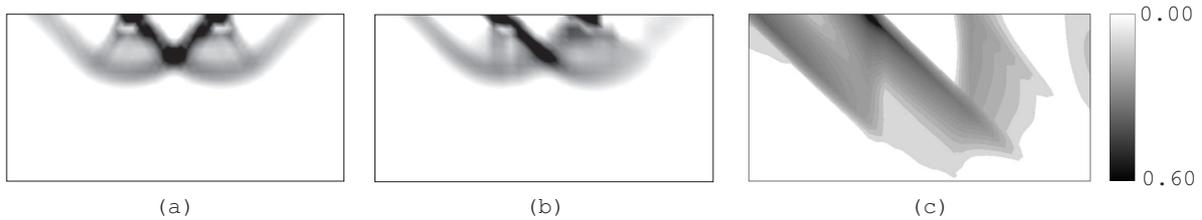


Figura 5.14: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapa de deformación plástica equivalente: (a) Formulación *PGP*, malla no estructurada (simétrica). (b) Formulación *PGP*, malla estructurada (no simétrica). (c) Formulación *STD*, malla estructurada (no simétrica).

El mismo comportamiento en relación a la carencia de simetría en los resultados puede observarse analizando el campo primario \mathbf{u} . La figura 5.15 muestra curvas de igual desplazamiento para el esquema *PGP* obtenidas con la malla estructurada (no simétrica). Durante el régimen elástico 5.15-(a), aun considerando incompresibilidad elástica, el campo de desplazamientos resultante es aproximadamente simétrico. No obstante, adviértase que una vez iniciado el proceso de concentración de deformaciones plásticas, nuevamente se pierde esta característica en la respuesta, ver figura 5.15-(b). Un estudio similar en el elemento *STD* demuestra que esta pérdida de simetría se produce siempre que se intente modelar problemas con deformaciones isócoras predominantes, independientemente si existe o no flujo plástico. Podemos concluir entonces que este fenómeno de índole numérico, es causado por la limitación bien conocida que presentan los elementos finitos símplices de bajo orden para capturar algunos tipos particulares de restricciones cinemáticas, tales como: (i) incompresibilidad y (ii) localización de deformaciones. El elemento *STD* falla en ambas situaciones. Como se deduce de este ejemplo, la estrategia *PGP* logra salvar eficientemente la primera de ellas, sin embargo, aún se observa un comportamiento patológico dependiente de la orientación de malla para modelar problemas con deformaciones plásticas altamente localizadas.

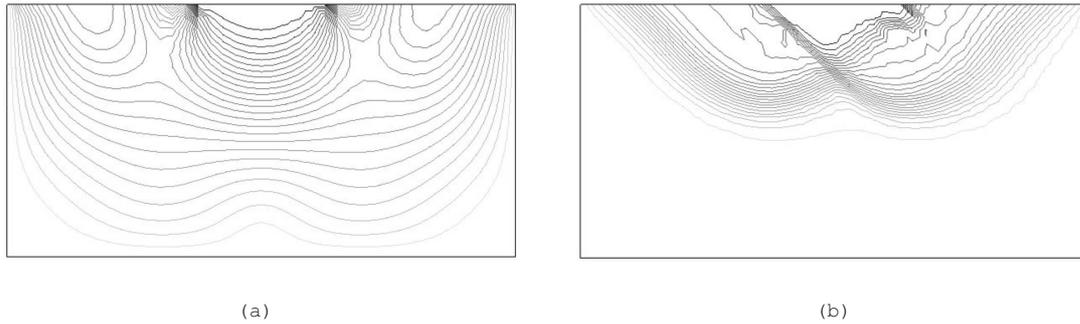


Figura 5.15: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Contornos de igual desplazamiento: (a) Formulación *PGP* en régimen elástico, malla estructurada. (b) Formulación *PGP* en régimen plástico, malla estructurada.

En la figura 5.16 se comparan las curvas carga total sobre la placa versus descenso de la misma, para las dos mallas en estudio y considerando diferentes alternativas: triángulo estándar *STD*, formulación mixta *MSTD* y esquema mixto estabilizado *PGP*.

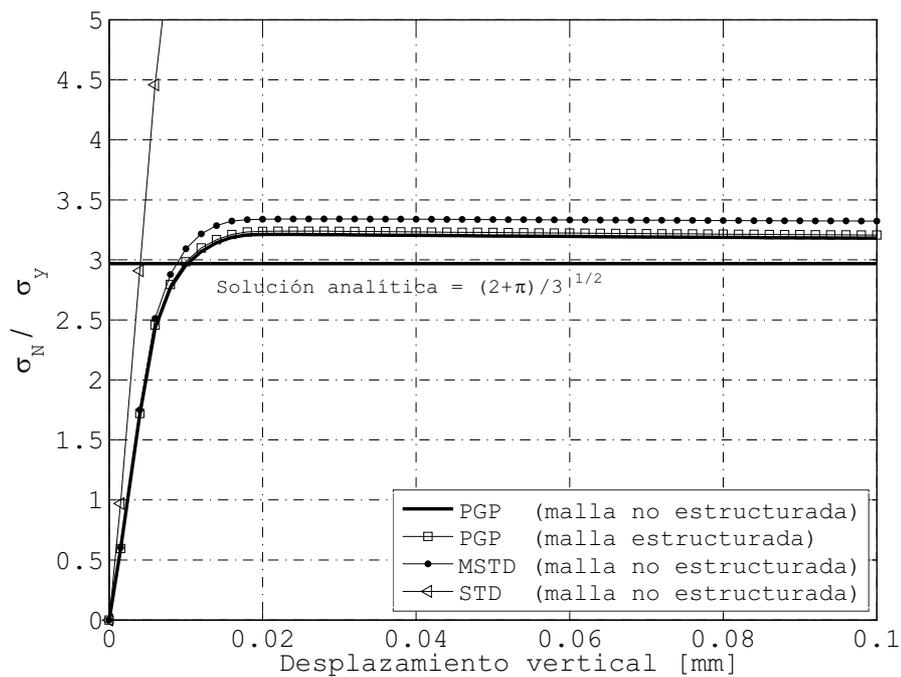


Figura 5.16: Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Curva carga desplazamiento.

Como se esperaba, el elemento clásico de Galerkin muestra una respuesta estructural sin carga pico, consecuencia directa del bloqueo cinemático. Por el contrario, para las otras dos formulaciones *MSTD* y *PGP*, se obtiene una carga límite bien definida. En este problema en particular, la predicción de la carga límite no parece estar influenciada por la direccionalidad de la malla, sin embargo esta conclusión no puede generalizarse. Se observa también una razonable concordancia con la solución analítica. Aunque no se muestra en este ejemplo, se ha verificado que para un mayor ajuste entre las soluciones numéricas y la

solución analítica, se requiere refinar la malla y ampliar el dominio de análisis, imponiendo las condiciones de contorno del problema teórico en forma más realista.

Finalmente queremos hacer notar un aspecto referente a la eficiencia numérica. El computo del campo vectorial $\mathbf{\Pi}$, cuando se utiliza el procedimiento descrito en 5.31 y 5.32, revela un costo computacional despreciable en comparación con otras partes del algoritmo ($< 5\%$ que el tiempo requerido por el solver del sistema de ecuaciones).

5.4.4. Cilindro 3D con entalla

Este ejemplo numérico está dedicado al estudio del elemento tetraédrico estabilizado *PGP* en régimen avanzado de deformaciones plásticas. El test consiste en un cilindro con entalla sometido a un estado de tracción axial producto de la aplicación de desplazamientos incrementales. Las proporciones geométricas y el modelo discreto (compuesto de aproximadamente 7800 elementos) utilizado en la simulación pueden observarse en la figura 5.17. Debido a condiciones de simetría sólo se modela 1/8 de la barra. El material responde a una ley constitutiva de plasticidad perfecta, descrito en términos de los siguientes parámetros mecánicos: módulo de Young $E = 3 \times 10^3 [MPa]$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y tensión de fluencia $\sigma_y = 50 [MPa]$.

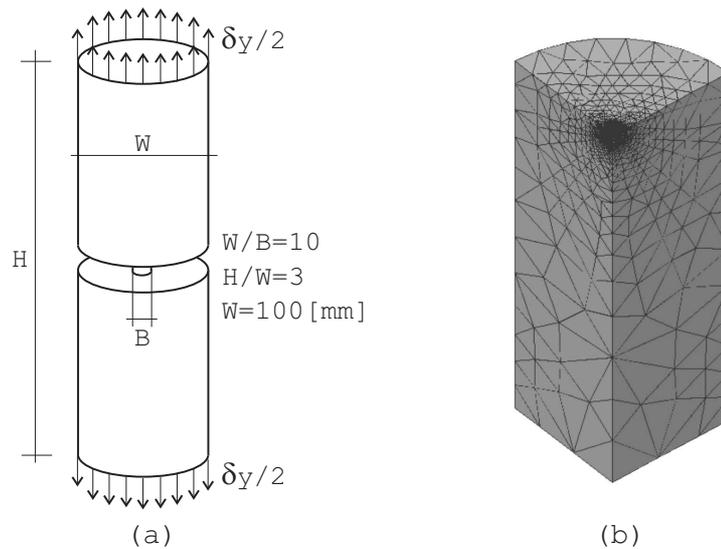


Figura 5.17: Cilindro 3D con entalla: (a) Geometría del problema. (b) Modelo discreto.

En la figura 5.18 se observa la curva tensión neta normalizada (σ_N/σ_y) versus el desplazamiento impuesto normalizado ($E\delta_y/(W\sigma_y)$) para dos esquemas de elementos finitos. Nuevamente la formulación estándar irreducible en desplazamientos (*STD*) falla en el intento de capturar la carga límite. La estrategia *PGP*, en cambio, exhibe una resistencia última estructural bien definida. La determinación de la carga pico en este ejemplo es equivalente al test de punzonamiento, si embargo el autor desconoce una solución analítica cuando se tiene simetría de revolución juntamente con un modelo de tipo Von Mises.

El campo de tensión media en la zona próxima a la entalla y en correspondencia con el máximo desplazamiento impuesto, puede verse en la figura 5.19. En este caso se consideran dos situaciones en función del parámetro c . Adoptando $c \approx 0,04$ el efecto estabilizante

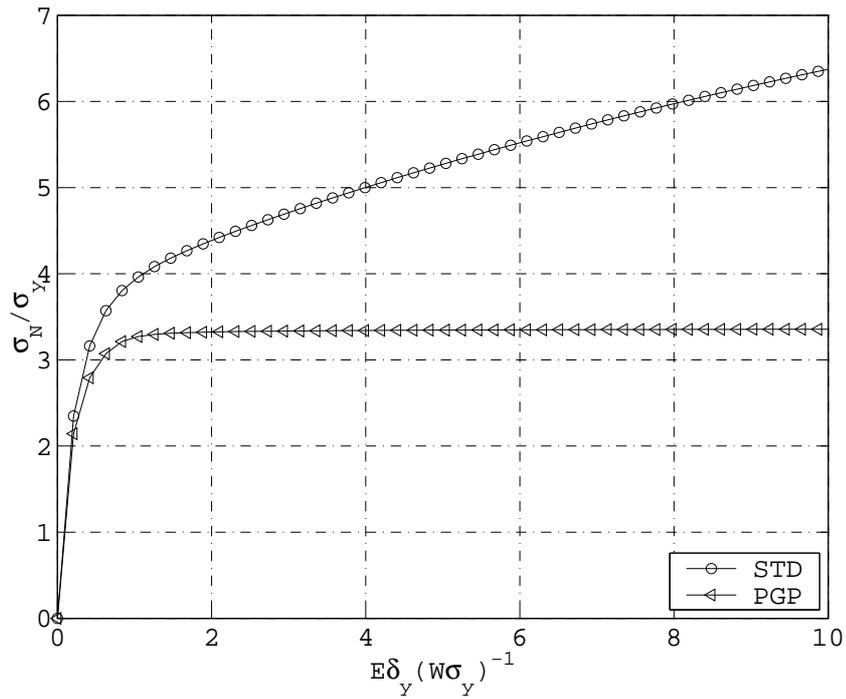


Figura 5.18: Cilindro 3D con entalla. Curva carga desplazamiento.

resulta prácticamente despreciable induciendo modos espúreos oscilantes en la respuesta, mientras que un factor $c \approx \mathcal{O}(1)$, en particular $c = 4$, impone un nivel de estabilización satisfactorio.

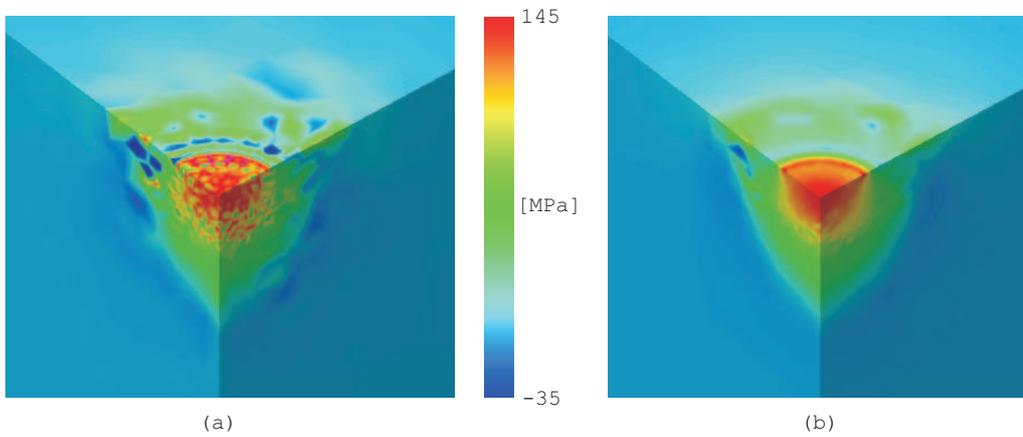


Figura 5.19: Cilindro 3D con entalla. Mapas de tensión media para la formulación *PGP*: (a) Factor de estabilización $c = 0,04$. (b) Factor de estabilización $c = 4$.

5.4.5. Problema de localización de deformaciones

En esta sección analizamos un prisma de sección cuadrangular sometido a un estado de compresión predominante, asumiendo además restricción de deformación plana. Se adopta un modelo elasto plástico J_2 equipado con una ley de ablandamiento por deformación de carácter isótropo y lineal. Bajo estas condiciones, y después de alcanzar la condición crítica de inestabilidad material, la evidencia experimental indica el desarrollo de una zona con acumulación de deformaciones irreversibles, ver figura 5.20-(a) (inclinación aproximada de 45°). El test propuesto persigue como objetivo fundamental estudiar la habilidad del elemento triangular PGP para capturar este modo típico de falla.

Este ejemplo numérico también ha sido usado previamente por varios investigadores a principios de la década del 90, para probar sus formulaciones de elementos finitos en el contexto de localización por ablandamiento material.

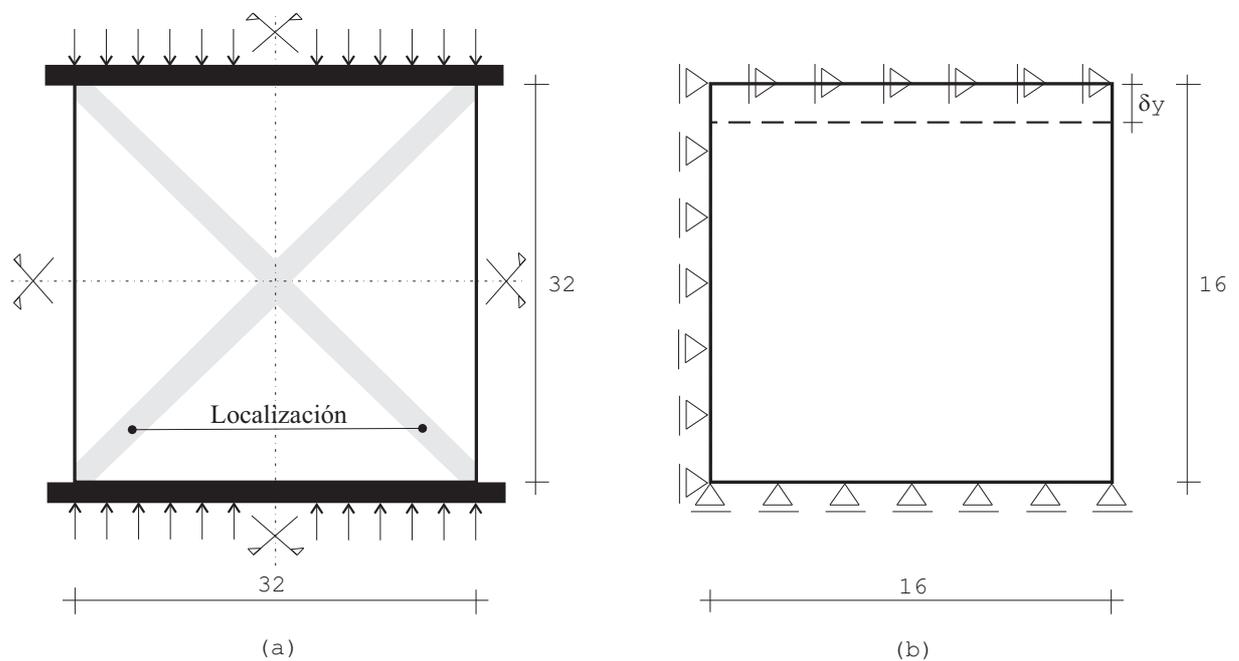


Figura 5.20: Problema de localización de deformaciones (dimensiones en milímetros): (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.

Debe aclararse que el modelo constitutivo no se encuentra regularizado en cuanto a la dependencia con el tamaño de los elementos⁴, en consecuencia, la energía de fractura bajo la curva carga-desplazamiento cambiará a medida que se refine la malla. Sin embargo, nuestro interés en este apartado es analizar si existe objetividad de la respuesta numérica con la *direccionalidad* de los elementos más que con su *tamaño característico*. Se espera que, usando diferentes mallas de elementos de similar medida, los resultados obtenidos sean comparables aun si varía su orientación relativa. Este hecho marcaría un buen indicio en relación al comportamiento cinemático del modelo.

La figura 5.20-(a) muestra la geometría del problema (dimensiones en milímetros). Imponiendo las condiciones de contorno adecuadas, la simulación numérica puede restringirse a sólo un cuarto del bloque, véase figura 5.20-(b).

⁴La regularización constitutiva se abordará en el capítulo próximo.

Los parámetros mecánicos adoptados para el modelado son los siguientes: módulo de Young $E = 3 \times 10^4 [MPa]$, relación de Poisson $\nu = 0,3$, tensión de fluencia $\sigma_y = 36 [MPa]$, módulo de ablandamiento material $H = -1,8 \times 10^3 [MPa]$. Dado que el problema es inicialmente homogéneo, debe introducirse una pequeña perturbación para materializar el punto de inicio de localización.

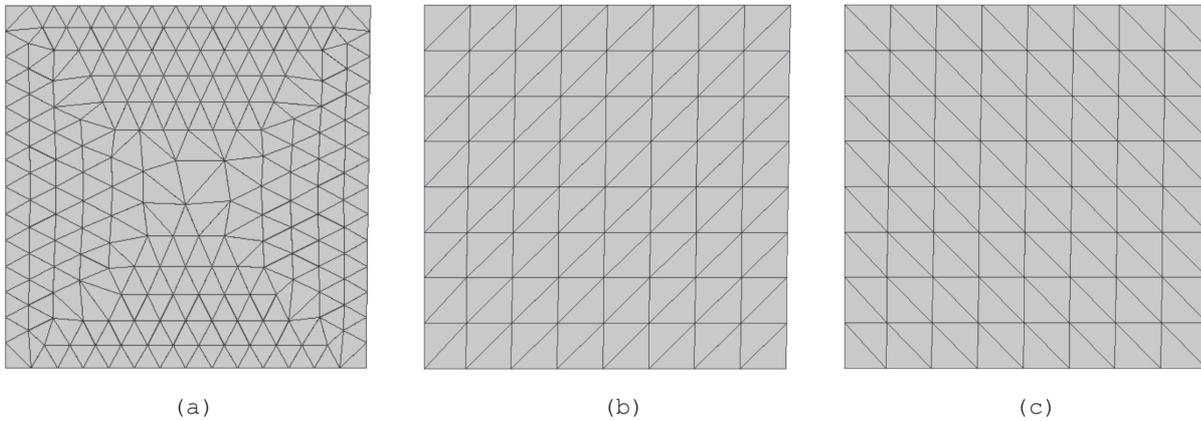


Figura 5.21: Problema de localización de deformaciones. Mallas utilizadas en la simulación: (a) 375 elementos. (b) 128 elementos. (c) 128 elementos.

Hemos de considerar tres mallas de triángulos mixtos estabilizados PGP ($c = 4$). La primera de ellas, Malla (a), corresponde a una distribución arbitraria de 375 elementos. Las dos restantes son arreglos estructurados de triángulos siguiendo la dirección de falla (Malla (b)), o bien ortogonal a la misma (Malla (c)), ambas contienen 128 elementos, figura 5.21.

La performance numérica del elemento PGP para este test en particular, puede evaluarse comparando los mapas de deformación plástica equivalente (ver figura 5.22) y la curva de respuesta carga total versus desplazamiento vertical (δ_y) (véase figura 5.23) para las Mallas (b) y (c).

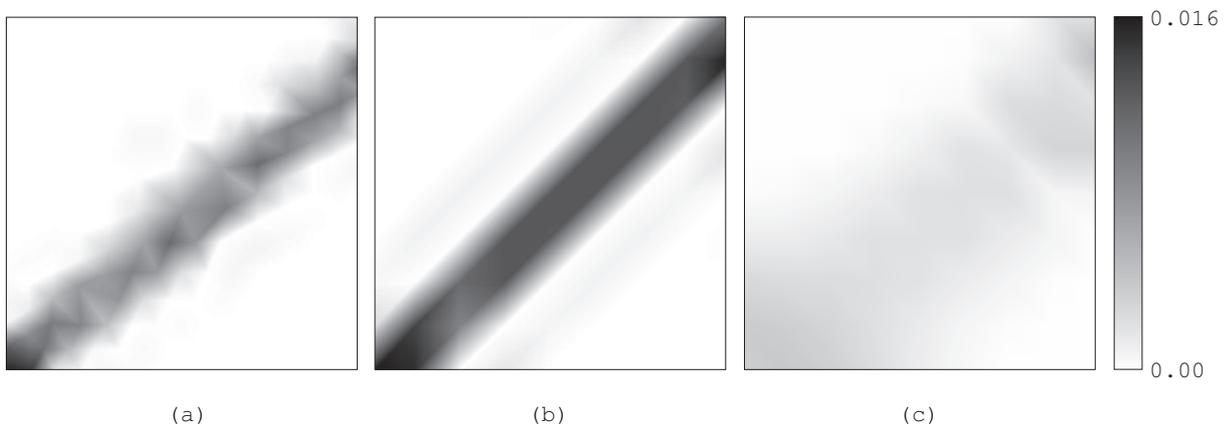


Figura 5.22: Problema de localización de deformaciones. Mapas de deformación plástica equivalente para las distintas mallas de la figura 5.21

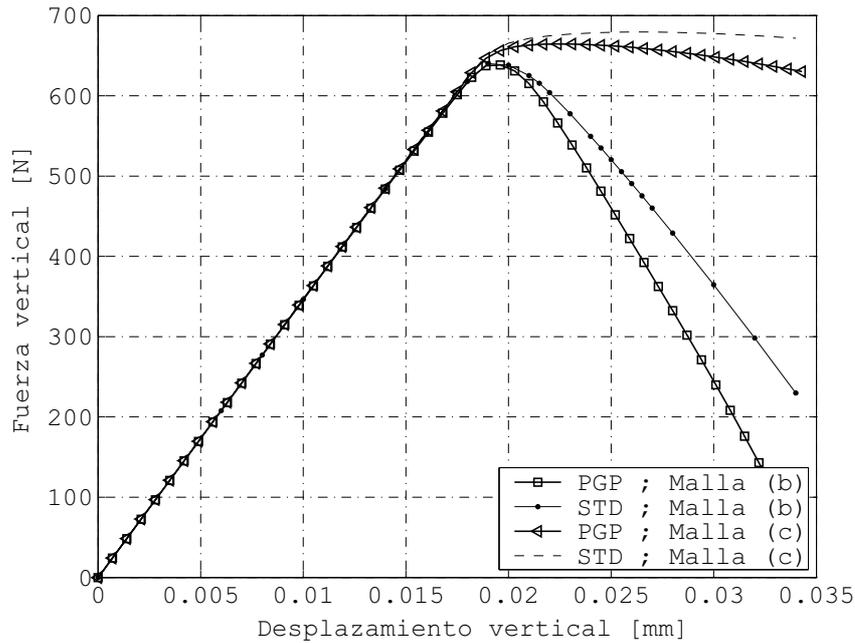


Figura 5.23: Problema de localización de deformaciones. Curva carga total versus descenso prescrito δ_y .

Observación 23 *la solución para la Malla (a) no es relevante en términos de la gráfica carga-desplazamiento debido a que el tamaño característico del elemento finito es sensiblemente distinto.*

Se puede observar que ambas respuestas (Malla (b) y (c)) son claramente diferentes. Este ejemplo muestra un comportamiento similar a aquel observado la sección 5.4.3, aunque mucho más notorio ahora debido a la presencia de ablandamiento. Si bien es cierto que estas dos situaciones representan condiciones extremas, ya que en general para mallas de direccionalidad arbitraria se deberá esperar un comportamiento como el que se muestra en la figura 5.22-(a), es evidente que existe una falta de objetividad en la presente formulación fundamentalmente cuando se pretenden modelar modos de falla del tipo bandas de corte.

5.5. Comentarios

A través del estudio numérico del esquema mixto estabilizado *PGP* abordado, se pueden extraer algunas observaciones importantes:

- una de las principales ventajas de la metodología es que permite formular elementos finitos simples de bajo orden.
- el costo computacional se corresponde al de un esquema mixto estándar, dado que es posible desacoplar eficientemente el campo vectorial del gradiente de presión proyectado Π , sin que ello implique un deterioro significativo de precisión en los resultados.

- el modelo presenta un notable comportamiento cualitativo en situación de incompresibilidad elástica, observándose además una tasa de convergencia aceptable a medida que se refina la malla.
- el régimen de cuasi incompresibilidad inducido por predominio de deformaciones plásticas isocóricas también se resuelve en forma satisfactoria.
- el buen desempeño en tales situaciones que presenta el triángulo estabilizado PGP , y principalmente el tetraedro, hace aceptable su utilización para resolver problemas prácticos, a pesar del costo computacional extra que se asume al utilizar formulaciones mixtas.
- con respecto a la simulación del fenómeno de localización de deformaciones, que es nuestro especial interés, debe decirse que, si bien se obtiene un comportamiento mejorado con respecto al elemento clásico, se observa cierta direccionalidad en la respuesta inducida por la orientación de la malla. Este hecho atenta desfavorablemente al momento de intentar modelar mecanismos de colapso tipo bandas de corte en situaciones generales. En el problema de localización de deformaciones, véase sección 5.4.5, queda en evidencia que el elemento PGP para ciertas orientaciones, conserva excesiva rigidez fomentando disipación de la deformación plástica en lugar de concentración. Este motivo fundamenta la formulación de un modelo más completo, el cual se presenta y desarrolla en el capítulo siguiente.