

**DESARROLLOS EN MECANICA
COMPUTACIONAL DE FALLA MATERIAL.
APLICACION A MODELOS DE
PLASTICIDAD Y DAÑO.**

Autor: Pablo Javier Sánchez.

Tesis remitida a la Comisión de Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA Y CIENCIAS HIDRICAS
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
Mención Mecánica Computacional
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2006

Declaración legal del autor

La presente tesis ha sido remitida ante la comisión de Postgrado de la *Universidad Nacional del Litoral (UNL)* como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de *Doctor en Ingeniería - Mención Mecánica Computacional*. Una copia de la misma permanecerá depositada en la biblioteca de la *Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)*; su consulta queda supeditada a la normativa legal vigente por el reglamento de la mencionada biblioteca.

Para fines educativos y de investigación, no se requiere autorización especial alguna en lo concerniente a reproducción, copia, distribución o citas de la presente tesis.

Cualquier sugerencia o comentario, ya sea de contenido conceptual como de implementación algorítmica, sobre los tópicos desarrollados y discutidos en este trabajo de investigación, será altamente apreciada.

Pablo Javier Sánchez.

Agradecimientos

Esta tesis ha sido financiada por el *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)* en el marco del programa de Becas Doctorales Internas, durante el período 2001 – 2005.

La misma se ha realizado en el *Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC)* del *Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)*, dependiente del (*CONICET*) y de la *Universidad Nacional del Litoral (UNL)*, bajo la dirección del Ing. Civil Victorio Sonzogni, a quien agradezco profundamente la confianza que ha depositado en mi, su continuo apoyo y predisposición al trabajo.

Quiero expresar mi agradecimiento al excelente grupo de trabajo del *CIMEC*, a todos y cada uno de sus integrantes, de quienes he recibido siempre un consejo oportuno y palabras de aliento. Durante el desarrollo de esta tesis he compartido un verdadero ambiente de investigación científica, compañerismo, amistad y un sin número de experiencias enriquecedoras tanto a nivel profesional como personal.

Tuve además la gran fortuna de conocer y trabajar con el Dr. Alfredo Huespe. Durante su estancia en Argentina, a distancia vía internet o en mi corta estadía por Barcelona, Alfredo ha contribuido en gran medida en el planteo y resolución de los temas desarrollados en este informe.

Al profesor Javier Oliver y todo su grupo de investigación en la *UPC*, que por su formación científica de excelencia y calidad humana me ha permitido aprender, avanzar y finalizar este trabajo, mi más sincero agradecimiento.

Por último, pero no por ello menos importante, quiero agradecer a mi madre a quien todo se lo debo, a mi novia por su apoyo incondicional, a toda mi familia y amigos por estar siempre a mi lado.

Resumen

En este trabajo de investigación se estudian y desarrollan formulaciones de elementos finitos para la simulación numérica del fenómeno de *localización de deformaciones* inducido por el comportamiento constitutivo. Se analizan y plantean estrategias capaces de capturar las características más importantes del problema, incluyendo en este modelado el desarrollo de *discontinuidades* en el sólido (fisuras, fracturas, bandas de corte o de deslizamiento, según el contexto) las cuales se propagan en un medio inicialmente continuo, como consecuencia última del proceso macroscópico de degradación material.

Los conceptos teóricos aquí desarrollados se fundamentan en las siguientes hipótesis básicas: *i)* régimen quasi estático isotérmico, *ii)* pequeñas deformaciones, desplazamientos y rotaciones, *iii)* material homogéneo e isótropo dotado de ecuaciones constitutivas susceptibles de presentar inestabilidad material por la presencia de ablandamiento por deformación.

El problema de falla se encara desde diferentes puntos de vista. En primera instancia, se estudian estrategias no locales formuladas, alternativamente, en términos de un modelo de gradientes implícito (anexo A). Luego de reconocer algunas limitaciones en estos esquemas de regularización, al menos desde el punto de vista práctico ingenieril, en el contenido de la tesis se introduce la aproximación al problema mediante los denominados modelos cohesivos basados en elementos finitos con discontinuidades embebidas. En particular adoptamos como estrategia principal en este trabajo la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*), ver capítulo 3.

Se presenta además, un extenso y comparativo análisis sobre las dos familias de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas potencialmente más eficaces para simular fractura frágil, tomando como base un modelo de daño isótropo. Tras realizar una eficiente implementación de ambas tecnologías de elementos, a partir de este estudio (capítulo 4) se obtienen conclusiones rigurosas con respecto a tópicos de fundamental importancia en el análisis de falla y que en la actualidad no están suficientemente claras, a saber: robustez, velocidad de convergencia, exactitud y costo computacional.

Otro aporte novedoso, en el contexto teórico de la *CSDA*, es la formulación matemática e implementación de un nuevo elemento finito para el modelado de bandas de corte en plasticidad isocórica (materiales gobernados por una ley de plasticidad de Von Mises), véase capítulo 6. El elemento propuesto se basa en acoplar consistentemente una formulación mixta estabilizada de base (para evitar el bloqueo volumétrico en la etapa pre-bifurcación, típico en modelos J_2) con la regularización constitutiva y enriquecimiento cinemático que aporta la aproximación por discontinuidades fuertes utilizada.

Previamente, en el capítulo 5, se realiza un riguroso estudio sobre el desempeño numérico del esquema de estabilización utilizado, aquí denominado *PGP*, especialmente direccionado a evaluar su desempeño para la simulación del fenómeno de localización de deformaciones. El mismo está formulado bajo el concepto de sub-escalas ortogonales, véase apéndice B. Como aporte adicional, en el apéndice C, mostramos además la performance numérica de su implementación en un entorno de cálculo distribuido.

Finalmente, y a manera de validación, se muestran diversos ejemplos numéricos que representan verdaderos desafíos desde el punto de vista de la simulación computacional, incluyendo casos 3D, mostrando la performance de las estrategias utilizadas y desarrolladas en esta tesis.

Abstract

In this research work, finite element formulations for the numerical simulation of *strain localization* phenomena induced by the constitutive behavior are studied and developed. Some efficient strategies to capture the main features of the problem are analyzed and formulated. In addition, this modelling considers the possibility of reproducing *discontinuities* in the body (like fractures, shear or slip bands, according to the context) which propagate throughout an initially continuum medium as the ultimate consequence of macroscopic material degradation process.

The theoretical concepts here developed are based on the following hypothesis: *i*) isothermal quasi static regime, *ii*) small deformations, displacements and rotations, *iii*) isotropic homogeneous material model equipped with constitutive equations which can present material instability because of the presence of strain softening.

First, the strain localization is approached by means of nonlocal strategies formulated, alternatively, in terms of an implicit gradient model (see appendix A). After recognizing some limitations in these regularization schemes, at least from the practical engineering point of view, the approach to the problem by means of the so called cohesive models based on finite elements with embedded discontinuities is introduced in the thesis. Particularly, the *Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA)* has been adopted as the main strategy of this thesis, see chapter 3.

Taking into account isotropic continuum damage models to simulate fragile fracture, an extensive and comparative analysis referred to the two potentially more effective families of finite elements with embedded strong discontinuities (at the present time), is presented in chapter 4. After making an efficient implementation of both technologies of elements, rigorous conclusions with respect to fundamental topics in failure analysis are obtained from this study, such as: robustness, convergence rates, precision of the response and computational cost.

In this theoretical context (*CSDA*), the mathematical formulation and numerical implementation of a new finite element to capture shear bands in isochoric plasticity (material that can be modeled by Von Mises criterion) is presented (see chapter 6). The proposed element is based on a consistent coupling of a mixed stabilized formulation (to avoid the volumetric locking in the pre-bifurcation stage, typical in J_2 model) jointly with the constitutive regularization and kinematical enrichment provided by the strong discontinuity approach (*CSDA*) used in this work.

Previously, a rigorous study about the numerical behavior of adopted stabilization scheme, which is based on the orthogonal sub-grid-scale concept (here referenced *PGP*), is performed in chapter 5. As an additional contribution, the numerical performance of its parallel implementation is also reported in Appendix C.

In order to demonstrate the performance of the strategies used and developed in this thesis, several numerical examples which represent true challenges from the computational point of view are reported, including three dimensional cases and problems involving the propagation of multiple cracks.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Descripción fenomenológica	4
1.3. Metodologías actuales de análisis	5
1.3.1. Mecánica de fractura clásica.	8
1.3.2. Modelos del continuo clásico.	9
1.3.3. Modelos del continuo enriquecido	11
1.3.4. Modelos con discontinuidades embebidas	13
1.4. Objetivos	15
1.5. Hipótesis	17
1.6. Contenidos	17
2. Localización de deformaciones	21
2.1. Introducción	21
2.2. Nomenclatura básica	22
2.3. Bifurcación material	24
2.3.1. Ecuaciones de compatibilidad cinemática	24
2.3.2. Condiciones de bifurcación	26
2.4. Modelo de plasticidad J_2	29
2.4.1. Ecuaciones básicas	29
2.4.2. Tensor Constitutivo Incremental	31
2.5. Modelo de daño escalar	31
2.5.1. Ecuaciones básicas	31
2.5.2. Tensor Constitutivo Incremental	34
2.6. Modelo de daño sólo tracción	35
2.7. Análisis de bifurcación discontinua	37
2.7.1. Módulo de ablandamiento crítico y ángulo de bifurcación	38
3. Aproximación por discontinuidades fuertes del continuo	41
3.1. Introducción	41
3.2. Modelo conceptual de la <i>CSDA</i>	42
3.2.1. Descripción cinemática con discontinuidades fuertes	43
3.2.2. Ecuaciones de gobierno	44
3.2.3. Regularización del modelo constitutivo	46
3.3. Aspectos de implementación de la <i>CSDA</i>	49
3.3.1. Cinemática regularizada	49

3.3.2.	Interpretación de la cinemática suavizada	50
3.4.	Análisis de discontinuidad fuerte	52
3.4.1.	Condición de discontinuidad fuerte en daño	52
3.4.2.	Modelo constitutivo discreto (tracción-salto) inducido	54
4.	Elementos con enriquecimiento nodal y elemental para fractura frágil.	57
4.1.	Motivación	57
4.2.	Formulación del problema	59
4.2.1.	Enriquecimiento de tipo <i>X-FEM</i>	60
4.2.2.	Enriquecimiento de tipo <i>E-FEM</i>	61
4.3.	Escenario de comparación	64
4.3.1.	Modelo constitutivo: ley cohesiva tracción-salto proyectada	64
4.3.2.	Implementación por elementos finitos	64
4.3.3.	Propagación de discontinuidades en el medio	66
4.3.4.	Robustez. Esquema de integración implícito-explicito	71
4.4.	Ejemplos numéricos	72
4.4.1.	Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales.	72
4.4.2.	Viga de cuatro puntos en modo flexión.	81
4.4.3.	Problema de múltiples fisuras. Material compuesto.	89
4.5.	Discusión	91
5.	Estabilización en plasticidad J_2 con ablandamiento.	93
5.1.	Introducción	94
5.2.	Formulación mixta estabilizada en mecánica de sólidos	95
5.2.1.	El problema numérico de la incompresibilidad	95
5.2.2.	Formulación variacional	96
5.2.3.	Esquema de estabilización <i>PSPG</i>	99
5.2.4.	Esquema de estabilización <i>PGP</i>	99
5.3.	Implementación numérica del esquema estabilizado <i>PGP</i>	100
5.3.1.	Definición de los campos discretos	100
5.3.2.	Evaluación del residuo	102
5.3.3.	Tensor constitutivo tangente consistente	103
5.4.	Ejemplos de aplicación	104
5.4.1.	Análisis de convergencia	105
5.4.2.	Elasticidad incompresible	108
5.4.3.	Test bidimensional de Prandtl	111
5.4.4.	Cilindro 3D con entalla	115
5.4.5.	Problema de localización de deformaciones	117
5.5.	Comentarios	119
6.	Elemento finito para modelar bandas de corte en plasticidad isocórica	121
6.1.	Introducción	122
6.2.	Ecuaciones de gobierno para sólidos con bandas de corte	123
6.3.	Análisis de discontinuidad fuerte	124
6.3.1.	Condición de discontinuidad fuerte	124
6.3.2.	Ley discreta cohesiva inducida	128

6.4. Formulación variacional mixta estabilizada incorporando discontinuidades fuertes embebidas.	131
6.4.1. Problema mixto discontinuo	132
6.4.2. Discretización y estabilización	134
6.5. Implementación numérica	136
6.5.1. Aproximación del campo de desplazamientos y deformaciones	137
6.5.2. Interpolación para la presión y gradiente de presión proyectado	138
6.5.3. Ecuaciones discretas finales. Cálculo del residuo	139
6.5.4. Forma lineal. Matriz tangente consistente	141
6.6. Verificación numérica del modelo	142
6.6.1. Problema de estabilidad de talud	143
6.6.2. Panel bidimensional con entalla	155
7. Conclusiones	163
7.1. Resumen y discusión	163
7.2. Aportes originales	168
7.3. Posibles líneas de investigación a futuro	169
A. Modelo de daño con teoría de gradientes implícito	171
A.1. Introducción	171
A.2. Modelo de daño regularizado	173
A.3. Formulación del modelo con teoría de gradientes implícito	174
A.4. Implementación numérica	176
A.4.1. Discretización espacial	176
A.4.2. Retorno a la superficie de daño	177
A.4.3. Módulo tangente algorítmico	177
A.5. Resultados numéricos	179
A.5.1. Test de tracción	179
A.5.2. Viga de tres puntos	182
A.6. Discusión	184
B. Estabilización mediante sub-escalas ortogonales	187
B.1. Método de sub escalas	187
B.2. Método de sub escalas ortogonales	192
C. Esquema PGP. Implementación en un entorno paralelo.	195
C.1. Tópicos de implementación en paralelo	195
C.2. Solución del sistema de ecuaciones	197
C.3. Test de elasticidad incompresible	199
D. Aplicación de la CSDA al análisis de vulnerabilidad estructural.	203
D.1. Introducción	203
D.2. Ejemplos numéricos	204
D.2.1. Viga de 4 puntos. Caso 2D	205
D.2.2. Presa de Scalere	207

Índice de figuras

1.1. Fisuras en elementos de hormigón.	3
1.2. Falla masiva debido a inestabilidad en taludes o terraplenes.	3
1.3. Esquema de formación de fractura en un medio inicialmente continuo: (a) Proceso elástico reversible. (b)-(c)-(d) Mecanismos disipativos y proceso de localización. (e)-(f) Desarrollo de una superficie de falla, discontinuidad o fisura.	6
1.4. Falta de objetividad en la respuesta estructural para modelos no regularizados: (a) Niveles de discretización en función del tamaño característico del elemento h_e . (b) Curvas carga-desplazamiento evidenciando energía de fractura decreciente.	7
2.1. Configuración de referencia. Conjunto de variables mecánicas y cinemáticas asociadas a un punto material \boldsymbol{x}	23
2.2. Dominio material Ω subdividido por la superficie \mathcal{S} a través de la cual un campo arbitrario puede presentar discontinuidades en sus derivadas.	24
2.3. Leyes de ablandamiento para el modelo de daño escalar representadas en el espacio de variables internas ($r - q$): (a) Lineal. (b) Exponencial.	33
3.1. Definición del problema mecánico exhibiendo discontinuidades fuertes.	43
3.2. Descripción cinemática compatible con discontinuidades en el campo de desplazamientos al tiempo $t + \Delta t$. Configuración inicial y final.	44
3.3. Descripción de la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada.	50
3.4. Mecanismo de fallo inducido por la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada: (a)-(d) Proceso de formación de fractura. (e) Curva tensión deformación del punto \mathcal{P} . (f) Variación del factor de penalidad $h(t)$ en función del tiempo.	51
4.1. Enriquecimiento nodal y elemental. Soporte de los modos discontinuos: (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	58
4.2. Descripción cinemática de discontinuidades fuertes.	60
4.3. Interpolación del campo de desplazamientos para la formulación $E-FEM$. Caso particular de triángulo con interpolación lineal: (a) Grados de libertad del elemento. (b) Función $\varphi^e(\boldsymbol{x})$. (c) Función escalón $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{x})$. (d) Función salto unitario $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^e(\boldsymbol{x})$	63
4.4. Definición de cuadraturas de integración: (a) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación $E-FEM$. (b) Reglas para triángulos y tetraedros lineales correspondientes a la formulación $X-FEM$	66

4.5. Representación esquemática del algoritmo global de trazado de discontinuidad: (a) Primer elemento raíz r_1 y primera fisura activa \mathcal{S}_1 . (b) Desarrollo de una nueva fisura activa \mathcal{S}_2	68
4.6. Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $E-FEM$	69
4.7. Secuencia de activación de los nodos asociados a los grados de libertad de saltos en desplazamientos β para la formulación $X-FEM$	70
4.8. Viga doble cantilever. Test con cargas diagonales: (a) Geometría y condiciones de contorno. (b) Historia de carga. (c) Configuración deformada. . .	73
4.9. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	74
4.10. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	75
4.11. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4 . . .	76
4.12. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMOD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	76
4.13. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	78
4.14. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales: (a) Configuración deformada. (b) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad.	79
4.15. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	79
4.16. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Fuerza \mathbf{F}_1 vs. $CMOD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	80
4.17. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMOD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	80
4.18. Viga de cuatro puntos con simple entalla. Geometría y condiciones de contorno (dimensiones en milímetros).	81
4.19. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ y trayectoria de discontinuidad obtenida con la formulación $E-FEM$ y $X-FEM$	82
4.20. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$. .	83

4.21. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	83
4.22. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMSD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	84
4.23. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Secuencia de mallas de elementos finitos $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$	85
4.24. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Modo de falla: (a) Elementos atravesados por la trayectoria de discontinuidad. (b) Configuración deformada.	86
4.25. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Curvas de equilibrio (fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio): (a) Formulación $E-FEM$. (b) Formulación $X-FEM$	87
4.26. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Fuerza \mathbf{P} vs. $CMSD$ promedio. Comparación de soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ para cada malla de la secuencia: (a) Malla M_1 . (b) Malla M_2 . (c) Malla M_3 . (d) Malla M_4	87
4.27. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Diagramas de convergencia en escala logarítmica: (a) Error relativo $\ e_{CMSD}\ _{L^2}$ vs. tamaño característico del elemento h_e . (b) Error relativo $\ e^{efem-xfem}\ _{L^2}$ de la diferencia entre las soluciones $E-FEM$ y $X-FEM$ vs. tamaño característico del elemento h_e	88
4.28. Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Número total de elementos 23245, $h_e \sim 26$ [mm]: (a) Geometría y condiciones de contorno del modelo idealizado. (b) Conjunto variable de elementos que capturan las fisuras verticales.	89
4.29. Placa de hormigón reforzado. Problema de propagación múltiple de fisuras. Tiempos, medido en segundos de CPU, para distintas partes del proceso de cálculo: (a) Cómputo y ensamble del residuo. (b) Cómputo y ensamble de la matriz de rigidez. (c) Resolución del sistema de ecuaciones. (d) Tiempo Total.	90
5.1. Nomenclatura básica para la definición del problema mecánico.	96
5.2. Representación gráfica de la proyección L^2 del gradiente de presión discretizado ∇p^h sobre el espacio de aproximación por Elementos Finitos.	100
5.3. Análisis de convergencia del esquema PGP . Test en modo flexión de viga en cantilever: (a) Modelo físico y geometría de la estructura. (b) Modelo numérico y condiciones de contorno.	106
5.4. Análisis de convergencia del esquema PGP . Caso de elasticidad compresible $\nu = 0,25$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.	107
5.5. Análisis de convergencia del esquema PGP . Caso de elasticidad incompresible $\nu = 0,49999$: (a) Convergencia en desplazamientos. (b) Convergencia en presiones.	107

5.6.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Niveles de discretización del modelo numérico: (a) 56000 tetraedros (b) 90000 tetraedros.	108
5.7.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta sin estabilización <i>MSTD</i> : (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.	109
5.8.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Mapas de tensión media σ_m para la formulación mixta estabilizada <i>PGP</i> : (a) Modelo con 56000 elementos. (b) Modelo con 90000 elementos.	109
5.9.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Formulación <i>PGP</i> con diferentes valores del coeficiente de estabilización c	110
5.10.	Test de incompresibilidad en un bloque elástico. Curvas de variación de la tensión media σ_m en el segmento de línea interno \overline{AB} . Comparación numérica de dos procedimientos de estabilización: <i>PSPG</i> vs <i>PGP</i>	110
5.11.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Geometría y condiciones de contorno (unidad de longitud: milímetros).	111
5.12.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Configuraciones de malla: (a) Malla no estructurada. (b) Malla estructurada.	112
5.13.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapas de tensión media: (a) Formulación <i>MSTD</i> . (b) Formulación <i>PGP</i>	113
5.14.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Mapa de deformación plástica equivalente: (a) Formulación <i>PGP</i> , malla no estructurada (simétrica). (b) Formulación <i>PGP</i> , malla estructurada (no simétrica). (c) Formulación <i>STD</i> , malla estructurada (no simétrica).	113
5.15.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Contornos de igual desplazamiento: (a) Formulación <i>PGP</i> en régimen elástico, malla estructurada. (b) Formulación <i>PGP</i> en régimen plástico, malla estructurada.	114
5.16.	Test bidimensional de Prandtl en deformación plana. Curva carga desplazamiento.	114
5.17.	Cilindro 3D con entalla: (a) Geometría del problema. (b) Modelo discreto.	115
5.18.	Cilindro 3D con entalla. Curva carga desplazamiento.	116
5.19.	Cilindro 3D con entalla. Mapas de tensión media para la formulación <i>PGP</i> : (a) Factor de estabilización $c = 0,04$. (b) Factor de estabilización $c = 4$	116
5.20.	Problema de localización de deformaciones (dimensiones en milímetros): (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.	117
5.21.	Problema de localización de deformaciones. Mallas utilizadas en la simulación: (a) 375 elementos. (b) 128 elementos. (c) 128 elementos.	118
5.22.	Problema de localización de deformaciones. Mapas de deformación plástica equivalente para las distintas mallas de la figura 5.21	118
5.23.	Problema de localización de deformaciones. Curva carga total versus descenso prescrito δ_y	119
6.1.	Definición de un problema mecánico exhibiendo un modo de falla caracterizado por la presencia de bandas de corte.	124
6.2.	Estructura del tensor de tensiones σ_S sobre la superficie de deslizamiento S , una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte.	129

6.3. Aspectos de implementación: (a) Esquema alternativo de integración numérica. (b) Aproximación del campo de presiones p^e en la zona regular ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) y singular (\mathcal{S}) del elemento finito.	138
6.4. Problema de estabilidad de talud. Geometría y condiciones de contorno.	144
6.5. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de mallas de elementos triangulares: (a) Malla M1: 285 elementos, $h_e \approx 1 [m]$. (b) Malla M2: 969 elementos, $h_e \approx 0,50 [m]$. (c) Malla M3: 3541 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$	145
6.6. Problema de estabilidad de talud. Malla M4, de cuadriláteros: 1865 elementos, $h_e \approx 0,25 [m]$	146
6.7. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.	147
6.8. Problema de estabilidad de talud. Elementos atravesados por la superficie de fallo para el máximo desplazamiento impuesto ($\delta \mathbf{u} = 0,20 [m]$). Formulación $PGPSD-N$: (a) Malla M1. (b) Malla M2. (c) Malla M3.	148
6.9. Problema de estabilidad de talud. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M3.	149
6.10. Problema de estabilidad de talud. Respuesta en desplazamientos para el modelo $PGPSD-N$, Malla M3: (a) Mapa de la medida L^2 de \mathbf{u} . (b) Curvas de nivel. (c) Campo de vectores.	150
6.11. Problema de estabilidad de talud. Comparación entre la estrategia PGP y $PGPSD-N$: (a) Formulación PGP , geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (b) Formulación $PGPSD-N$, geometría deformada a nivel del punto C en la curva de respuesta. (c) Curva de equilibrio carga vs. desplazamiento del punto A, para ambos esquemas numéricos.	151
6.12. Problema de estabilidad de talud. Curva de equilibrio carga versus desplazamiento del punto A: (a) Convergencia en malla del modelo $PGPSD-N$. (b) Comparación de varias formulaciones de elementos, Malla M3.	153
6.13. Problema de estabilidad de talud. Tasa de convergencia de la formulación $PGPSD-N$ comparada con el elemento $STDSD-N$: (a) Medida L^2 de la energía disipada. (b) Carga límite estructural.	154
6.14. Problema de placa con entalla. Geometría y condiciones de borde: (a) Modelo físico. (b) Modelo numérico.	156
6.15. Problema de placa con entalla. Discretizaciones de elementos finitos utilizadas en la simulación: (a) Malla M1: $h_e \approx 4 [mm]$, 1300 elementos. (b) Malla M2: $h_e \approx 2 [mm]$, 5252 elementos.	156
6.16. Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos atravesados por la superficie de fallo conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	158
6.17. Problema de placa con entalla. Secuencia de configuraciones deformadas. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	159
6.18. Problema de placa con entalla. Secuencia de elementos con comportamiento disipativo plástico conforme avanza el proceso de localización. Formulación $PGPSD-N$, Malla M2.	160

6.19. Problema de placa con entalla. Curvas de equilibrio carga versus desplazamiento para diversas formulaciones de elementos	161
A.1. Idealización del proceso de degradación material en términos de la variable de daño: $d \in [0, 1]$. Dominio de promediación ξ para incorporar no localidad	172
A.2. Test de tracción uniaxial. Geometría del modelo.	180
A.3. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curva carga desplazamiento para distintas mallas.	180
A.4. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento lineal. Curvas de evolución: (a) Variable de daño d . (b) Deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\epsilon$	181
A.5. Test de tracción uniaxial. Ley de ablandamiento exponencial: (a) Curva de respuesta carga desplazamiento. (b) Curva de evolución de la variable de daño.	181
A.6. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Geometría y condiciones de contorno del modelo.	182
A.7. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Carga P vs. Desplazamiento $CMOD$. Comparación de respuesta entre dos formulaciones alternativas y una envolvente experimental.	183
A.8. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Malla de elementos finitos utilizada en la configuración deformada (≈ 2770 elementos).	183
A.9. Flexión de viga entallada con fuerzas en tres puntos. Mapa de la variable de daño d para un estado avanzado de degradación.	184
B.1. Representación esquemática del método de sub escalas en el espacio $\mathcal{V}^h - \mathcal{V}_0^s$	189
C.1. Performance en paralelo para solvers directos e iterativos: (a) Tiempo de CPU para distintas estrategias de solución. (b) Consumo de memoria RAM para distintas estrategias de solución.	198
C.2. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Mallas de elementos finitos: (a) 56000 elementos tetraédricos (b) 90000 elementos tetraédricos.	199
C.3. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 56000 elementos.	200
C.4. Modelo PGP , performance en paralelo. Ejemplo de bloque elástico incompresible. Convergencia del solver lineal, test con 90000 elementos.	200
D.1. Viga de 4 puntos: (a) Descripción geométrica del modelo. (b) Trayectoria de fisura obtenida experimentalmente.	205
D.2. Viga de 4 puntos. Curvas de respuesta carga P vs. desplazamiento $CMSD$: (a) Comparación entre la solución numérica vía $CSDA$ y la envolvente experimental. (b) Curvas de equilibrio para todos los casos analizados.	206
D.3. Viga de 4 puntos. Resultados para los 1000 casos analizados: (a) Variación de la carga límite según el problema considerado. (b) Variación del desplazamiento $CMSD$, en correspondencia con la carga límite, según el problema considerado.	206
D.4. Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Vista superior. (b) Perspectiva inferior	208

D.5. Presa de Scalere. Geometría del modelo numérico: (a) Perspectiva aguas arriba. (b) Perspectiva aguas abajo.	208
D.6. Presa de Scalere. Esquema simplificado para la aplicación de la presión hidrostática. Evolución del factor de carga.	209
D.7. Presa de Scalere. Curva de equilibrio: Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal del nodo P.	211
D.8. Presa de Scalere. Contornos de igual desplazamiento.	212
D.9. Presa de Scalere. Geometría en la configuración deformada.	212
D.10. Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.	213
D.11. Presa de Scalere. Trayectorias de fisuras primarias.	213

Índice de cuadros

2.1. Expresiones analíticas cerradas para determinar el módulo de ablandamiento crítico (H^{crit}) y el ángulo de bifurcación (θ^{crit}) en los modelos de plasticidad y daño utilizados.	40
3.1. Modelo conceptual de la Aproximación mediante Discontinuidades Fuertes del Continuo (<i>CSDA</i>).	47
3.2. Modelo conceptual de la Aproximación mediante un Modelo Discreto Cohesivo Estándar.	48
3.3. Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar.	52
3.4. Ecuaciones básicas del modelo de daño proyectado sobre la interface \mathcal{S}	56
4.1. Nomenclatura y definiciones a considerar para el análisis de eficiencia computacional.	72
4.2. Viga doble cantilever, caso 2D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	77
4.3. Viga doble cantilever, caso 3D. Test con cargas diagonales. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	81
4.4. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 2D. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	84
4.5. Viga de cuatro puntos con simple entalla, caso 3D. Costo computacional relativo (<i>RCC: X-FEM/E-FEM</i>).	88
6.1. Ecuaciones básicas para el modelo de plasticidad J_2	125
6.2. Ley cohesiva discreta proyectada.	131
6.3. Formulaciones de elementos finitos para modelar bandas de deslizamiento.	143
6.4. Problema de estabilidad de talud. Costo computacional relativo entre la formulación <i>PGPSD</i> y la estrategia <i>BBARSD</i>	155
A.1. Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar regularizado en términos una medida de deformación equivalente no local $\tilde{\tau}_\epsilon$	174
A.2. Algoritmo de retorno a la superficie de daño para la formulación con gradientes implícito.	178
C.1. Modelo <i>PGP</i> , performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia <i>ISSD-Jacobi</i> . Test con 56000 elementos	201
C.2. Modelo <i>PGP</i> , performance en paralelo. Tiempos medidos en segundos de CPU, referidos a la estrategia <i>ISSD-Jacobi</i> . Test con 90000 elementos	201

D.1. Viga de cuatro puntos. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del material.	205
D.2. Viga de cuatro puntos. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material. . . .	207
D.3. Presa de Scalere. Valores promedio y rango admisible de variación para los parámetros del hormigón.	210
D.4. Presa de Scalere. Parámetros materiales para la roca de fundación.	210
D.5. Presa de Scalere. Conjunto de datos y resultados obtenidos para 10 combinaciones, tomadas arbitrariamente, de parámetros del material.	211

Capítulo 1

Introducción

Se entiende por *Mecánica de Falla Material (MFM)*¹ al modelado de materiales que pueden experimentar procesos inelásticos irreversibles de plasticidad y/o daño, modos de intensa deformación en zonas de reducidas dimensiones y como consecuencia final el desarrollo gradual de fisuras, fracturas o bandas de deslizamiento libres de tensión. Desde el punto de vista de la *Mecánica del Continuo* la falla está asociada al fenómeno de *Localización de Deformaciones* inducido por inestabilidades a nivel material.

La descripción de este complejo mecanismo de degradación no es para nada una tarea trivial e involucra desde una correcta concepción física del fenómeno hasta la formulación de modelos teóricos y numéricos rigurosos. Entre los factores más influyentes que intervienen en tal mecanismo pueden mencionarse: caracterización constitutiva del material, planteo de estrategias generales y robustas de solución, consistencia termodinámica, acoplamiento de problemas de distinta escala (degradación a nivel micro estructural ↔ descripción macroscópica), etc. Además, la naturaleza intrínseca del fenómeno induce (en estado límite) discontinuidades en las variables de estado y severas complicaciones desde el punto de vista matemático en los modelos resultantes, los cuales predicen soluciones singulares. Por estas razones, se torna evidente que un estudio serio y profundo del problema sólo puede abordarse a través de aproximaciones numéricas adecuadas, representando uno de los desafíos actuales en el contexto de la mecánica computacional.

Durante las últimas décadas, debido al avance en tecnología de procesadores y al desarrollo de paradigmas robustos de programación, se ha trabajado intensamente en la obtención de esquemas numéricos capaces de simular el proceso de falla, como queda demostrado a partir de la gran cantidad de publicaciones científicas especializadas. Los avances en este sentido son muy alentadores. Sin embargo, aún en la actualidad, existen limitaciones importantes en los modelos propuestos que motivan el constante planteo de nuevas líneas de investigación, con el objeto de capturar en detalle los aspectos más relevantes del problema.

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo primordial la obtención de herramientas eficientes de simulación en esta rama específica de la ingeniería de materiales, utilizando para ello la aproximación por el método de los elementos finitos.

¹En el contexto del análisis mecánico de sólidos existe otro posible escenario de colapso. El mismo resulta compatible con la existencia de configuraciones geométricas que reducen significativamente la capacidad portante de la estructura. A este tipo particular de situación se la denomina comúnmente *Falla Geométrica*. El alcance de este trabajo se restringe sólo a la falla de carácter material.

El resto de este capítulo se organiza como sigue: en la sección 1.1 se hace una rápida referencia a los motivos y aplicaciones prácticas que han impulsado este estudio, en la sección 1.2 se introduce una descripción fenomenológica simplificada del proceso de degradación y generación de fallas en un medio continuo. Una revisión de las estrategias actuales de análisis se presenta en la sección 1.3; los objetivos e hipótesis principales de este trabajo se resumen en los apartados 1.4 y 1.5 respectivamente. Finalmente, en la sección 1.6 se menciona la estructura global y organización básica de esta tesis.

1.1. Motivación

El análisis del estado mecánico de los materiales deformables hasta el completo agotamiento de su capacidad resistente es un tema de reconocida importancia en ciencias, tecnología e ingeniería. Los desarrollos y resultados obtenidos en este área poseen aplicación directa a problemas prácticos reales brindando un conocimiento más preciso de la resistencia límite de las estructuras, hecho que se traduce en diseños más confiables y económicos.

En el contexto de las estructuras civiles, su estudio permite predecir los posibles modos de falla, estimar la carga última asociada a dicho mecanismo, evaluar el grado de seguridad real como así también la reserva de resistencia y/o ductilidad en régimen post-crítico de los sistemas estructurales, factores de suma importancia en la etapa de cálculo y verificación.

Las estructuras de hormigón, extensamente utilizadas desde hace ya varios años, son particularmente susceptibles a experimentar colapso frágil y fisuración, ver algunos ejemplos en la figura 1.1. Esta situación no sólo se presenta bajo cargas externas de servicio, sino también en edades tempranas durante el proceso de endurecimiento debido al fenómeno de pérdida de humedad por difusión y reacción con el cemento. Los cambios volumétricos debido a efectos térmicos (agentes climáticos, calor de hidratación liberado por fragüe) representan también un posible motivo de micro fracturas que requieren un control adecuado, principalmente en estructuras de hormigón de gran volumen.

La mecánica de falla permite también abordar el estudio de problemas geotécnicos complejos en los cuales, bajo ciertas condiciones críticas, pueden originarse verdaderas superficies de colapso o deslizamiento con consecuencias, muchas veces, de tipo catastróficas. El análisis de la estabilidad de taludes y terraplenes artificiales construidos en base a materiales sueltos (suelos y rocas), deslizamientos en laderas naturales, aludes de tierra o nieve, representan casos típicos de este tipo de problemas que se caracterizan por un desplazamiento masivo del material, ver figura 1.2.

Otra aplicación interesante de la *MFM*, en el contexto de las ciencias del terreno, es el computo de la capacidad de carga última de las fundaciones. En este sentido, la estrategia más reconocida y utilizada en mecánica de suelos moderna para lograr estimaciones satisfactorias, se basa en la obtención del mecanismo de colapso probable, el cual está estrechamente relacionado con las características geométricas, físico-mecánicas y de carga del sistema suelo-estructura de fundación. La carga límite asociada a dicho mecanismo de falla, afectada por un adecuado coeficiente de seguridad, permite al ingeniero el diseño y adopción de las dimensiones definitivas de las obras de fundación. En la literatura clásica [TPM96] existen soluciones semi-analíticas sólo para problemas ideales obtenidas asumiendo hipótesis simplificadas y que muchas veces no se amoldan a situaciones prác-



Figura 1.1: Fisuras en elementos de hormigón.



Figura 1.2: Falla masiva debido a inestabilidad en taludes o terraplenes.

ticas reales, evidenciando de esta forma la necesidad de modelos más elaborados capaces de describir adecuadamente el fenómeno.

Existen además innumerables aplicaciones prácticas a nivel industrial en donde la mecánica de fractura adquiere un carácter especialmente importante. Varias tecnologías actuales de fabricación involucran el moldeo o manipulación de materiales los cuales pueden, en alguna etapa, estar sometidos a condiciones críticas próximas a su límite de resistencia. Con el único propósito de nombrar sólo algunas de ellas, se pueden mencionar: conformado, embutido, estampado, colada continua, tratamientos térmicos, forjado, soldaduras, etc. La posibilidad de contar con modelos capaces de evaluar la degradación macroscópica que sufre el material y al mismo tiempo la susceptibilidad a fisuración frente a variaciones en los parámetros que controlan el proceso, permite introducir reducciones en los costos de producción y paralelamente mejoras sustanciales en la calidad del producto final.

El estudio de la mecánica de falla presenta a su vez importantes desafíos conceptuales desde el punto de vista físico, matemático y computacional. En general se requiere el planteo de elaboradas formulaciones teóricas a nivel de las ecuaciones del continuo para salvar las falencias propias de los modelos clásicos, como así también esquemas numéricos robustos y consistentes. Estas condiciones son indispensables para obtener algoritmos convergentes y de razonable relación precisión-costo de cálculo, frente al comportamiento altamente no lineal que reviste el problema.

Las consideraciones hechas en los párrafos anteriores surgen como una motivación para abordar el estudio de falla en materiales que aquí se presenta.

1.2. Descripción fenomenológica

Experimentalmente se ha observado que el mecanismo de colapso en materiales de uso tecnológico tales como hormigones, suelos, metales, cerámicos, polímeros, etc, está precedido por un proceso disipativo no lineal caracterizado por la concentración de deformaciones en bandas de espesor muy pequeño en comparación con las dimensiones globales de la estructura. En ellas se concentran procesos irreversibles de degradación y disipación de energía (daño, plasticidad) mientras que el resto del sólido experimenta descarga elástica.

La aparición de este mecanismo de *localización de deformaciones* implica directa o indirectamente el *inicio* del proceso de falla material, de allí la importancia de disponer de modelos numéricos capaces de simular eficientemente el fenómeno.

Las bandas con deformaciones altamente localizadas pueden manifestarse bajo diversas formas. Como ejemplos clásicos podemos mencionar las bandas de corte en metales dúctiles (estacionarias), superficies de deslizamiento en problemas geotécnicos, fisuración en estructuras construidas a base de morteros cementicios o en problemas de mecánica de rocas, entre otros. Si bien la naturaleza es diferente para cada situación en particular, todos ellos pueden conceptualmente clasificarse como problemas de *localización de deformaciones*, y en este contexto general deberá entenderse el fenómeno de falla a los fines del presente estudio.

El proceso de localización produce o activa defectos potenciales en la estructura a nivel micro mecánico que, dependiendo del tipo de material, se manifiestan de manera distinta. En metales por ejemplo es típica la formación de micro poros o vacíos (*voids*) que reducen

el volumen efectivo del medio. Por el contrario en materiales cuasi frágiles el daño y el desarrollo de micro fisuras es el proceso dominante. La coalescencia o interconexión de tales defectos en el seno del continuo origina mecanismos macroscópicos de degradación los cuales inducen, a nivel estructural, una relación constitutiva con ablandamiento (disminución del estado tensional ante continuos incrementos de deformaciones). Materiales que exhiben este comportamiento se denominan *localmente inestables* (Hill [Hil58]).

La idea de asociar la *localización de deformaciones* al comportamiento constitutivo se fundamenta en que la misma se manifiesta súbitamente y puede tener lugar aun para estados homogéneos de tensión, con lo cual su existencia deberá estar en íntima relación con la presencia de inestabilidades a nivel de las leyes de evolución material.

En la figura 1.3 se esquematiza el proceso idealizado de formación de discontinuidad. Conforme evoluciona el estado de sollicitación mecánico, se hace evidente el mecanismo típico precursor de la falla material, el cual se caracteriza por una reducción gradual del ancho de banda de localización b_w hasta que la misma colapsa en una superficie de falla \mathcal{S} , modificándose sustancialmente la cinemática del problema.

En vista de la descripción anterior pueden reconocerse dos mecanismos bien diferenciados. El primero de ellos corresponde al proceso inelástico responsable del inicio de la degradación en una porción reducida pero finita del dominio de análisis (figura 1.3-(b)-(c)-(d)) para el cual la mecánica del continuo, a través de modelos constitutivos regularizados, logra aproximaciones relativamente satisfactorias. El cambio brusco en la cinemática representa el otro proceso fundamental, gobernado por la generación de verdaderos planos de discontinuidad (libres de tensión) que en rigor debieran considerarse como una nueva frontera del problema (ver figura 1.3-(e)-(f)). Para capturar eficientemente este último fenómeno, siempre dentro del contexto del método de elementos finitos, se requieren sofisticadas técnicas de remallado o bien tecnologías de elementos que incorporen explícitamente la discontinuidad real que se produce en el sólido.

1.3. Metodologías actuales de análisis

La mecánica de medios continuos clásica (*local*) describe el proceso de localización como la acumulación de mecanismos disipativos entre dos superficies próximas, entre las cuales se verifica una discontinuidad en el campo de deformaciones (*discontinuidad débil*) [RR75, Ric76]

Definición 1 en el contexto del presente trabajo se entiende por “Discontinuidad Débil” una descripción cinemática compatible con la existencia de discontinuidades en alguna componente del campo de deformaciones a partir de un instante de tiempo específico (t_B); matemáticamente²: $\exists \llbracket \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rrbracket_{ij} \neq 0$ para $t \geq t_B$. El campo de desplazamiento permanece continuo, es decir $\llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rrbracket = \mathbf{0} \forall t \in [0, T]$.

Este modo de bifurcación (aquí denominado *bifurcación discontinua*) es compatible con la singularidad del tensor acústico y como consecuencia se produce un cambio en el carácter matemático de la ecuación diferencial de equilibrio incremental. En problemas

²Sea Ω el dominio de análisis y \mathcal{S} una interface ($\mathcal{S} \subset \Omega$) que divide a Ω en dos subconjuntos Ω^+ y Ω^- . El operador salto a través de \mathcal{S} se define mediante: $\llbracket (\bullet) \rrbracket = (\bullet)|_{(\mathbf{x} \in \Omega^+)} - (\bullet)|_{(\mathbf{x} \in \Omega^-)}$, entendiendo a $\mathbf{x} \in \Omega^+$ como un punto infinitamente próximo a \mathcal{S} (igual razonamiento se aplica para $\mathbf{x} \in \Omega^-$)

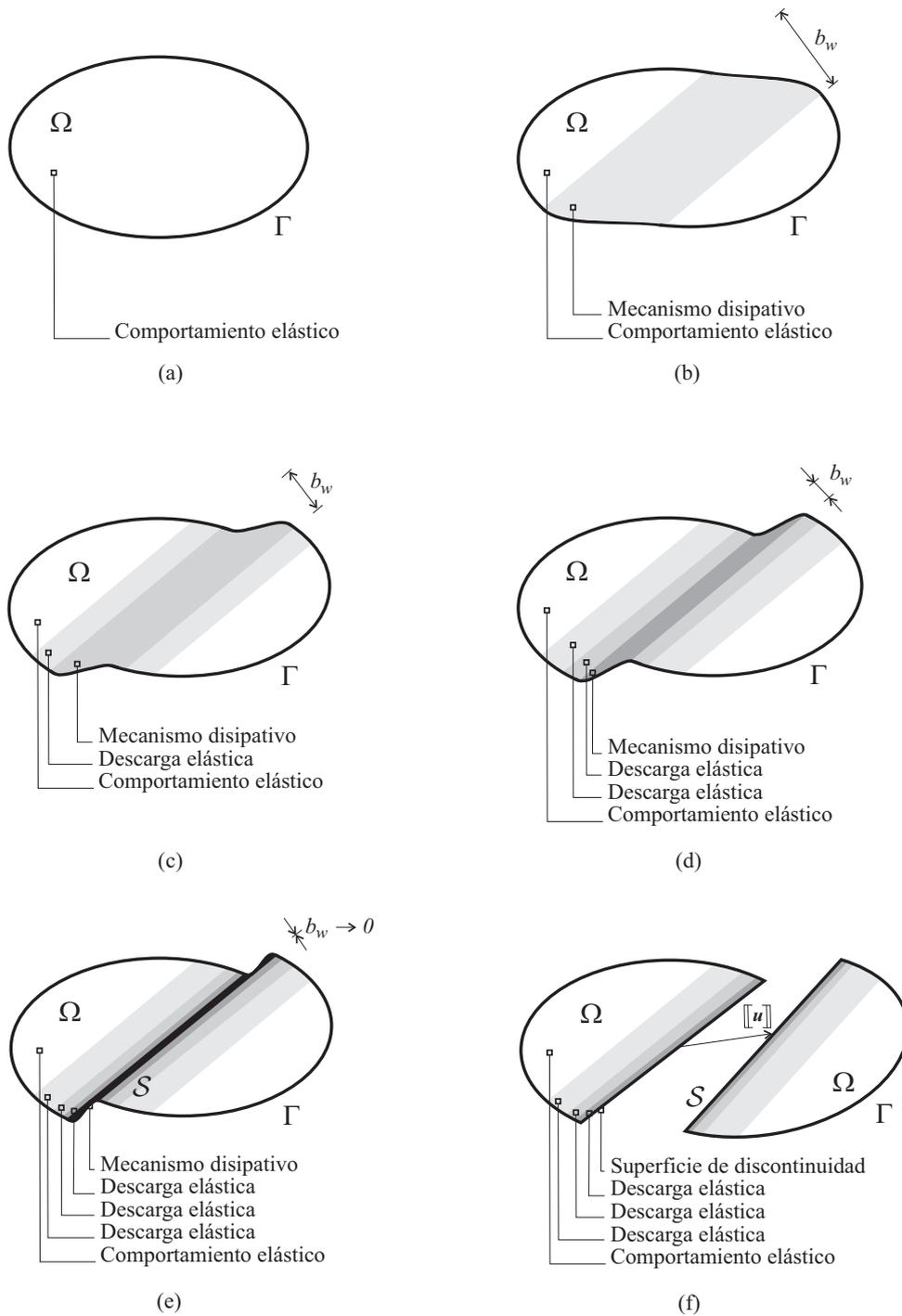


Figura 1.3: Esquema de formación de fractura en un medio inicialmente continuo: (a) Proceso elástico reversible. (b)-(c)-(d) Mecanismos disipativos y proceso de localización. (e)-(f) Desarrollo de una superficie de falla, discontinuidad o fisura.

estacionarios se pierde la elipticidad del sistema de ecuaciones que gobierna el problema para transformarse en un sistema hiperbólico. Bajo condiciones de carga dinámica sucede lo inverso. En estas circunstancias, el problema matemático queda mal planteado y propiedades altamente favorables tales como estabilidad, existencia y unicidad de solución no quedan garantizadas. En el contexto de materiales con leyes de evolución independientes de la velocidad de deformación (invíscidos), esta situación crítica puede presentarse en modelos constitutivos bajo régimen de ablandamiento o reglas de flujo no asociativas [Hil58, RR75, Ric76, OR91].

Como no existe restricción interna alguna que limite el ancho de banda de localización, la solución termodinámicamente más estable corresponde a aquella que muestra un espesor nulo (superficie de fractura) [Baz76]. La localización se produce entonces en un volumen infinitamente pequeño y, por ende, la falla material se lleva a cabo sin disipación de energía. Esta inconsistencia, subyacente en el modelo continuo estándar, se traduce al espacio discreto de aproximación por elementos finitos. En este caso, la simulación muestra una energía de fractura finita³ pero decreciente a medida que se refina la malla, dado que el espesor de la banda de localización coincide con el tamaño del elemento finito h_e , véase figura 1.4.

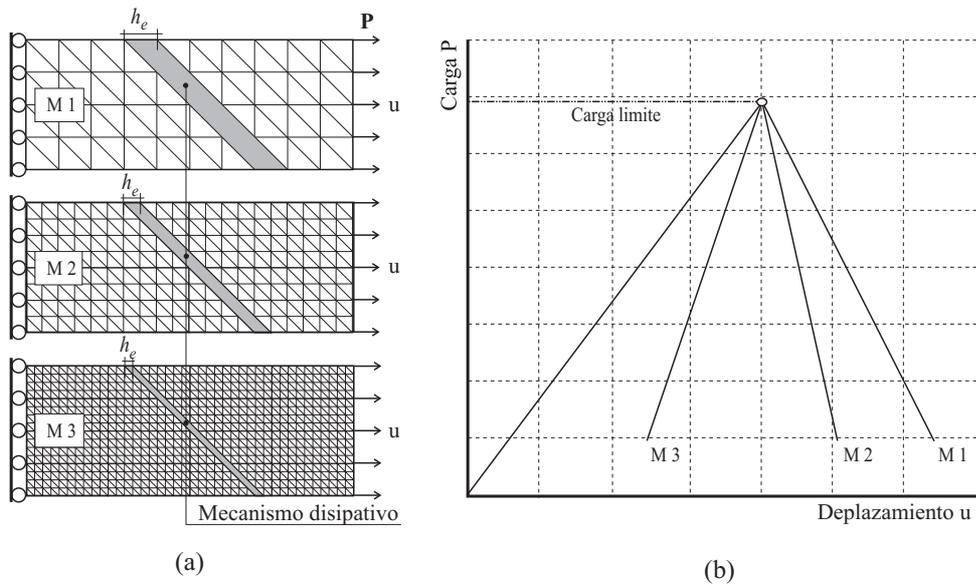


Figura 1.4: Falta de objetividad en la respuesta estructural para modelos no regularizados: (a) Niveles de discretización en función del tamaño característico del elemento h_e . (b) Curvas carga-desplazamiento evidenciando energía de fractura decreciente.

En el límite, cuando el tamaño del elemento tiende a cero, la solución numérica predice una zona de localización que colapsa en una superficie y energía de fractura nula. La aproximación continua y discreta son consistentes pero ambas carecen de significado físico. El modelo numérico además tiene implícita una restricción cinemática dependiente del tipo de interpolación utilizada. Por lo general, y para la forma más elemental de aproximación basada en desplazamiento lineal por tramos, discontinuidades en el campo

³El concepto de energía de fractura, aquí utilizado, se corresponde con la definición clásica dada en la mecánica de fractura.

de deformaciones sólo son posibles a través de las interfaces de los elementos con lo cual se obtiene una fuerte dependencia en relación a tamaño y orientación de malla.

Para remediar el comportamiento irreal que describen aquellos modelos susceptibles de presentar localización de deformaciones, durante los últimos años se han propuesto diversas metodologías de análisis. En el presente, las estrategias utilizadas para el modelado de falla pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista, teniendo en cuenta para tal efecto la descripción cinemática (regularidad del campo de desplazamientos), el comportamiento constitutivo o bien la implementación numérica del modelo. Como puede evidenciarse, cada uno de estos tópicos están íntimamente relacionados y la formulación de un esquema de cálculo robusto deberá combinarlos en forma consistente. A continuación se propone una posible clasificación generalizada de los modelos de falla material que contempla en forma conjunta los aspectos mencionados anteriormente:

- *Mecánica de fractura clásica.*
- *Modelos del continuo clásico.*
- *Modelos del continuo enriquecido.*
- *Modelos con discontinuidades embebidas.*

Una completa y minuciosa descripción de cada modelo de aproximación escapa a los objetivos de este trabajo. Sin embargo, a manera de introducción, se presenta una breve discusión sobre los mismos. Debe tenerse en cuenta además que para ciertas situaciones particulares los límites entre cada formulación no quedan bien definidos, consecuentemente, en la literatura específica, pueden encontrarse formas alternativas de clasificación.

1.3.1. Mecánica de fractura clásica.

Las primeras aproximaciones al problema de fractura en materiales se han formulado como una extensión natural de la teoría clásica de elasticidad. En esta línea, Inglis [Ing13] estudió la concentración de tensiones en una placa infinita con un orificio de tipo elíptico simulando la presencia de una discontinuidad en el medio. Desde el punto de vista cinemático, esta estrategia considera discontinuidades en el campo de desplazamiento libres de tensión lo cual induce, necesariamente, una singularidad del campo tensional en la punta de la fisura. Por este motivo, con el paso del tiempo se han propuesto conceptos más elaborados basados en magnitudes integrales (integral-J o integral de Rice) como criterio para predecir las condiciones críticas en la cuales se produce la falla material por desarrollo de fisuras.

Este tipo de aproximación, también conocida como *Mecánica de Fractura Lineal Elástica (Linear Elastic Fracture Mechanics LEFM)*, es aplicable a situaciones en las cuales la *Zona de Proceso de Fractura (FPZ [BP98])* es despreciable con respecto a las dimensiones características del problema en estudio. En general, exceptuando casos de grandes estructuras de materiales cuasi frágiles, se hace necesario considerar en el análisis, el tamaño *finito* de la zona de proceso de fractura, al menos en la dirección de la discontinuidad, dado que gran parte de la energía se disipa de manera irreversible en dicha región, previamente al desarrollo de la discontinuidad o fisura. Este hecho pone en evidencia una desventaja intrínseca asociada a esta metodología de cálculo.

Posteriormente se generalizaron las ideas subyacentes de la *LEFM* para abordar el análisis de materiales que muestran una falla de tipo dúctil, a través de lo que se denominó la *Mecánica de Fractura No Lineal (Non-Linear Fracture Mechanics NLFM)* [KP85].

Un concepto importante para rescatar en el contexto de la *Mecánica de Fractura Clásica*, es la llamada *Energía de Fractura (G_f)*, que representa la cantidad de energía necesaria para generar una superficie de discontinuidad de área unitaria. Irwin [Irw57, Irw58] expresa este valor en términos de los *Factores de Intensidad de Tensión* y propone para el estudio de propagación los conocidos *Modos de Fractura*. En particular para el *Modo I* (modo exclusivo de apertura), se considera la energía de fractura específica $G_f = G_{ModoI}$ como una propiedad material, resultando además un parámetro extensamente utilizado para caracterizar el comportamiento constitutivo post-crítico en otros tipos de aproximaciones.

1.3.2. Modelos del continuo clásico.

Los modelos basados en la mecánica de daño continuo [Kac58, Kac86] marcaron una nueva plataforma conceptual para el estudio de la falla en materiales. Mediante la introducción de ablandamiento por deformación en las leyes constitutivas, se hizo posible modelar procesos de degradación y falla sin abandonar el marco formal matemático de la *Mecánica de Medios Continuos Clásica*. Inicialmente, esta estrategia de aproximación resultó particularmente atractiva para formulaciones numéricas, ya que tales modelos pueden implementarse en programas existentes de elementos finitos sin mayores inconvenientes, tomando ventaja de todos los desarrollos y algoritmos ya disponibles en estos códigos. Además posee la característica fundamental de considerar los dos comportamientos mecánicos, el continuo y la fractura, en un único formalismo teórico.

Desde un punto de vista físico, estos modelos consideran a los procesos disipativos responsables de la degradación como la acumulación de micro defectos o fisuras uniformemente distribuidas en una banda de tamaño finito, que en el contexto numérico del *MEF*⁴ corresponde al tamaño característico del elemento h_e . Esta idealización del fenómeno induce una descripción cinemática caracterizada por una banda de localización en la cual ciertas componentes del campo de deformaciones pueden presentar discontinuidades $[[\boldsymbol{\varepsilon}]] \neq \mathbf{0}$ (*discontinuidad débil*). Por hipótesis el campo de desplazamientos permanece continuo ($[[\mathbf{u}]] = \mathbf{0}$).

Con el paso del tiempo (y como se mencionó al inicio de la sección 1.3), estudios de estabilidad y bifurcación del campo tensional [Hil62, RR75, Ric76] demostraron que dichos modelos, tal y como originalmente fueron concebidos, estaban dotados de problemas subyacentes a nivel de las ecuaciones del continuo y, consecuentemente, presentan falta de objetividad en la respuesta con respecto a la discretización espacial a nivel numérico.

Para salvar estas deficiencias se han propuesto diversas estrategias. La aproximación de *Fisura Distribuida o Difusa (Smearred Crack Approach)* [Ras68] y el modelo de Banda de Fisura (Crack Band model) [BO83, RPKB85] pueden mencionarse entre éstas.

En este contexto de análisis, la filosofía consiste en regularizar el comportamiento bajo régimen de ablandamiento, utilizando para ello el concepto de *Energía de Fractura (G_f)* como un parámetro intrínseco del material⁵. El ancho de la banda de localización

⁴*MEF*: Método de Elementos Finitos.

⁵Aunque en la actualidad aún existen ciertas controversias con respecto a la evaluación experimental

b_w puede entonces estimarse de manera tal que la energía disipada en el proceso de falla sea la correcta. Una posibilidad, explorada por Bažant [Baz76], consiste en predefinir el tamaño de la malla de elementos finitos en correspondencia con dicho valor estimado de la banda de localización⁶. Como en general la trayectoria de la fisura es desconocida *a priori*, se hace necesario generar una malla de elementos que posea densidad constante en todo el dominio de análisis. Evidentemente, esta situación impone severas restricciones al modelo discreto que se traducen en un costo computacional elevado e innecesario. Una solución parcial frente a este inconveniente la aportan los modelos con bandas de ablandamiento embebidas (*Embedded Softening Band Models*) [BFE88, Slu97].

Otra estrategia de regularización, muy utilizada en la práctica, se basa en ajustar el módulo de ablandamiento H en función del tamaño característico (h_e) sólo para aquellos elementos en estado post-crítico [PM81, BO83]. La idea consiste en modificar parcialmente la relación tensión-deformación para reproducir en forma correcta la energía de fractura del material, independientemente de la densidad de discretización. En este sentido el espesor de la banda de localización deja de tener el significado conceptual de *propiedad material* para pasar a ser un parámetro dependiente del modelo numérico. Tras realizar esta modificación a nivel constitutivo, la disipación energética total y el diagrama carga-desplazamiento converge hacia un valor límite físicamente admisible⁷ a medida que se refina la malla.

Actualmente, para el modelado de materiales frágiles, se reconocen dos tipos de aproximaciones basadas en el concepto de *Fisura Distribuida*, a saber: *Fisura Fija (Fixed-Crack-Model)* y *Fisura Rotante (Rotating-Crack-Model)*.

El modelo de *Fisura Fija* [Ras68] supone que la discontinuidad se desarrolla en forma perpendicular a la dirección principal de tracción una vez superado su valor límite⁸ y que la orientación de la fisura se mantiene invariable a lo largo del análisis. Se introduce además el denominado *Factor de Retención* para el tratamiento de las tensiones de corte a través de la línea de falla [SS73]. R. de Borst et al. propusieron una generalización de este modelo original a múltiples fisuras no ortogonales [dBN85].

Los modelos de *Fisura Rotante* [CRCN80, GA84], como su nombre lo indica, consideran que la dirección de fisura puede variar en el tiempo de acuerdo a las direcciones principales de deformación, conforme evoluciona el estado de carga. El fundamento de esta estrategia es principalmente de índole numérico para mejorar el desempeño de los elementos.

Durante los últimos años, los modelos de *Fisura Distribuida* han sido ampliamente utilizados para modelar la falla en materiales frágiles. Sin embargo, como ha sido observado por Rots [Rot88] y varios otros investigadores, este tipo de formulación posee una desventaja intrínseca comúnmente denominada como bloqueo tensional (*stress locking*). Este efecto se manifiesta por una transferencia espúrea de tensiones a través de una fisura

objetiva de la *Energía de Fractura* G_f , este parámetro material es considerado como una propiedad fundamental para caracterizar el comportamiento en régimen pos-crítico de ablandamiento.

⁶Este hecho se basa en que la simulación numérica de materiales con ablandamiento demuestra que la banda de deformación típicamente localiza en una *única* franja de elementos.

⁷Para el caso más simple de tracción uniaxial este valor límite admisible se corresponde con la solución obtenida mediante un modelo de fisura discreta con la misma energía de fractura G_f

⁸Esta situación asume una superficie de falla de tipo Rankine como criterio para detectar el inicio y dirección de propagación de la fisura. Evidentemente pueden formularse criterios alternativos dependiendo del tipo de material.

completamente desarrollada. En los esquemas de *Fisura Fija* el bloqueo se debe fundamentalmente a tensiones de corte inducidas por una rotación de los ejes principales de deformación una vez generada la discontinuidad⁹. No obstante, también se han reportado soluciones espúreas en lo que respecta al estado tensional aun cuando las direcciones principales de deformación y tensión permanecen alineadas [JZ98a] (como ocurre en los modelos de *Fisura Rotante*). En este caso, el mal desempeño numérico está asociado a una pobre descripción cinemática del campo de desplazamiento alrededor de la fisura. La combinación de una formulación de *Fisura Rotante* juntamente con un modelo de daño escalar, puede resultar efectiva para reducir el mencionado efecto de bloqueo [JZ97, JZ98b].

Otro inconveniente generalmente vinculado a los modelos de daño distribuido es su sensibilidad patológica frente a la orientación de la malla de elementos finitos, que se traduce en el desarrollo de bandas preferenciales de localización (*pathological mesh-induced directional bias*).

1.3.3. Modelos del continuo enriquecido

Dado que el problema de inestabilidad material se presenta ya a nivel del continuo, la forma más natural y conceptualmente simple de solución podría consistir en modificar o redefinir el modelo evitando el cambio de carácter en las ecuaciones diferenciales de gobierno¹⁰. La idea básica es enriquecer el continuo para capturar (a nivel macroscópico) los cambios micro estructurales que se suceden en el material al estar sometido a estados críticos de tensión y lo tornan inestable. Se ha demostrado que una completa regularización del problema de localización de deformaciones puede lograrse dotando a la teoría de *Medios Continuos* de base de una adecuada generalización.

La mayoría de estos métodos están basados en la inclusión explícita de un parámetro de longitud interna l_c que toma en consideración el tamaño y separación de las heterogeneidades que controlan el ancho de localización b_w , es decir se considera ahora la configuración micro estructural material. Estas estrategias introducen términos de interacción espacial en las ecuaciones con el objeto de *regularizar* el comportamiento constitutivo limitando la localización de deformaciones a un volumen de tamaño finito [dBSMP93] y, como consecuencia directa, que la energía disipada durante el proceso de carga adquiera un valor no nulo. Los esquemas *No Locales*, de *Gradientes de Deformación*, el *Modelo Continuo Micropolar de Cosserat* y aquellas formulaciones que consideran efectos de viscosidad pueden mencionarse como las más destacadas.

En los modelos *No Locales* [BBC84, BPC88, TN95] se asume que la ecuación constitutiva no lineal en un punto queda expresada en función de la deformación media en la vecindad del punto¹¹. Este valor medio se calcula a través de integrales ponderadas restringidas a un volumen fijo. Varios investigadores han propuesto como alternativa que la no localidad quede reducida simplemente a la evolución de variables internas [PCB87, BL88].

⁹En otras palabras se sobreestima la rigidez al corte, no permitiendo una completa relajación de tensiones en el sólido cuando la fisura se encuentra completamente desarrollada.

¹⁰En este sentido se pretende regularizar el problema matemático de manera de conservar la elipticidad local, para casos cuasi estáticos.

¹¹La relación tensión deformación no satisface el principio de acción local, de allí el nombre de modelos *No Locales*.

La porción del dominio adecuada en la cual se extiende la integral se hace depender explícitamente del parámetro de longitud interna l_c . Tienen la desventaja que para su implementación se necesita modificar la estructura básica de los códigos existentes, ya que debe conocerse información del entorno de un punto para evaluar una variable no local en dicho punto.

Las formulaciones de gradientes [Aif84b, Aif84a, LB88, dBM92, dBPPS95, PdBBdV96] incorporan al modelo constitutivo términos de gradientes espaciales de alto orden de variables cinemáticas o internas, dependientes del parámetro de longitud intrínseca material. Este enriquecimiento tiene como finalidad suavizar y regularizar la evolución de los mecanismos inelásticos responsables de la degradación. Se ha verificado una analogía directa entre las formulaciones *No Locales* y los modelos de *Gradientes Implícitos* [PGdBB01, PdBBG02], para determinadas funciones de peso. De esta forma, utilizando tales esquemas implícitos se asegura el carácter no local del problema con una ventaja adicional: desde el punto de vista computacional poseen la estructura típica de modelos locales. En estas formulaciones de alto orden generalmente se requiere la resolución de una ecuación adicional a la de equilibrio estándar, la cual puede discretizarse utilizando también interpolación por elementos finitos.

No es necesario recurrir a la mecánica del continuo completamente no local para obtener modelos regularizados. En general sólo es suficiente considerar expansiones en términos de orden superior (en teoría de gradientes) o no localidad (en teorías integrales) para aquellas variables responsables de la evolución del ablandamiento, mientras que las restantes conservan su carácter local. Este tipo particular de formulación conserva consistencia termodinámica [PBF97] y es una de las más utilizadas en la actualidad.

El *Modelo Continuo Micropolar de Cosserat* fue desarrollado a principios de 1900, para problemas de elasticidad. Esta formulación, a diferencia del *Modelo Continuo Clásico*, incorpora rotaciones locales como parámetros independientes adicionales. Una consecuencia directa de esta hipótesis es la pérdida de la estructura simétrica del tensor de tensiones. En los trabajos de Mühlhaus et al. [MV87], Steinmann et al. [SW91], de Borst [dB91, dB93], Etse et al [EN98] se han propuesto generalizaciones y extensiones de esta teoría al contexto de elasto-plasticidad aplicada al análisis de localización de deformaciones.

El uso de modelos dependientes de la velocidad de deformación (*Visco-daño*, *Viscoplasticidad* [Nee88, LP90, SdBm93]), también ha sido utilizado para la obtención de soluciones regularizadas. Si bien estos esquemas no representan formalmente un enriquecimiento del continuo clásico, se los incluye en esta clasificación general por compartir algunas de sus características. En la formulación de estos modelos puede reconocerse la introducción de un parámetro de longitud interna garantizando que el problema matemático permanezca bien planteado aun bajo régimen de ablandamiento y en presencia del fenómeno de localización de deformaciones.

Las estrategias de regularización incluidas en esta sección poseen sólidos fundamentos teóricos y originan soluciones rigurosas, representan verdaderos esquemas *Limitadores de Localización* y aseguran convergencia a una solución físicamente factible conforme se refina la malla. Sin embargo como contrapartida no son capaces de representar explícitamente

discontinuidades en el campo de desplazamientos. Por lo general se necesita alta densidad de elementos en la zona de localización (que no se conoce a priori) para capturar los elevados gradientes de deformación. Típicamente el tamaño de los elementos debe ser inferior al ancho de banda de localización b_w que en la práctica es muy pequeño. A modo de ejemplo, las bandas de corte en suelos granulares tienen un tamaño de 10 a 20 veces la dimensión del grano, para metales dúctiles la superficie de deslizamiento tiene un espesor medido en micrones y las macro fisuras en hormigones son del orden del máximo tamaño del agregado inerte. La cantidad de elementos y el coste computacional luego se torna prohibitivo, aun cuando se utilicen técnicas de remallado [ABS98].

1.3.4. Modelos con discontinuidades embebidas

En vista de las limitaciones que presentan los esquemas regularizados presentados anteriormente, se han propuesto otras alternativas basadas en aspectos más prácticos desde el punto de vista ingenieril. Bajo esta categoría se engloban un conjunto numeroso de metodologías cuya característica principal consiste en que se realiza un tratamiento diferenciado en la zona donde progresa y propaga la fractura (*Fracture Process Zone*) con respecto al resto del sólido.

El fenómeno de localización de deformaciones se modela ahora explícitamente como una interface de discontinuidad en el campo de desplazamiento o deformaciones cuya evolución depende de una ecuación constitutiva discreta con ablandamiento en términos del salto relativo entre los labios de la fisura y el vector tracción \mathcal{T} normal a la misma [Dug60, Bar62]. Hillerborg y otros investigadores propusieron que esta ley discreta no lineal con degradación se relacione con el concepto de energía de fractura, y por lo tanto considerarla como una propiedad intrínseca del material [HMP76, PE92], dando origen de esta forma a un gran número de ecuaciones de tipo tracción-salto. Usualmente, la parte continua, o estable del material, se modela mediante ecuaciones constitutivas clásicas, siendo muy común el uso de elasticidad lineal para materiales frágiles. Dentro de esta categoría pueden mencionarse los denominados modelos cohesivos.

Definición 2 *se entiende por modelo discreto cohesivo al conjunto de ecuaciones que permiten definir unívocamente el comportamiento constitutivo en la interface o zona de localización, tales como: (i) criterio para detectar el instante de activación de la discontinuidad, (ii) dirección de propagación en el sólido, (iii) regla de evolución de las fuerzas cohesivas una vez desarrollada la fisura y (iv) restricciones de equilibrio entre el medio continuo y la interface.*

Esta metodología ha sido aplicada para simular fractura en materiales cuasi frágiles [EGGP02] como así también en falla dúctil [TH92].

La simulación numérica de los modelos discretos puede abordarse desde diferentes aproximaciones: método de elementos finitos (*MEF*), formulaciones de elementos de contorno (*BEM: Boundary Element Method*) [YRC98], integrales de contorno [Pet81] y métodos sin malla (*Element Free Galerkin*) [BOG00] para casos dinámicos, entre otras.

En el contexto de elementos finitos que nos ocupa, el estudio de fractura mediante modelos cohesivos ha seguido básicamente dos estrategias principales.

La primera de ellas se fundamenta en que la fisura se modela a través de las interfaces entre elementos, considerando la discontinuidad como un contorno adicional del medio.

Como en general la trayectoria o camino de fisura no es conocido a priori, se requiere una redefinición de la malla en cada paso de análisis para alinear precisamente las interfaces con la dirección correcta de propagación [Car89, BCV91]. El continuo cambio en la configuración topológica del dominio trae aparejado una serie de inconvenientes que afectan la eficiencia computacional, a saber: la generación de malla requiere de costosas técnicas de suavizado para eliminar elementos mal condicionados, la estructura de memoria para el almacenamiento de matrices y vectores globales se modifica para cada malla, la ubicación de los puntos de integración varía y en consecuencia las variables internas del paso previo deben proyectarse (mapearse) en la nueva configuración, etc. Sin embargo debe decirse que existen problemas particulares en donde la posición de la discontinuidad no es una incógnita del problema y esta estrategia de análisis puede ser de gran utilidad.

La otra alternativa mencionada consiste en enriquecer la cinemática del elemento manteniendo la discretización invariable. El uso de elementos con modos discontinuos embebidos ha representado un gran avance en el modelado de fractura, permitiendo capturar el fenómeno de localización de deformaciones de manera eficiente y a un costo computacional razonable [DnG90, DA91, LS95, KRS91]. La orientación espacial de la discontinuidad se determina en función del propio estado local de tensión con lo cual se obtiene completa independencia con respecto a la configuración de la malla. Las estrategias basadas en esta idea se han presentado bajo diversos nombres pero todas ellas están basadas en el mismo concepto: la explícita incorporación de una discontinuidad en el campo de desplazamientos (*discontinuidad fuerte*) [DnG90, KRS91, SOA93, LS95, AG96, LR96, Oli6a, Oli6b, WS01] o en el campo de deformaciones (*discontinuidad débil*) [OLN87, BFE88, SB98], en el seno del elemento finito. En Jirásek [Jir00] puede encontrarse una discusión detallada y un estudio comparativo de distintas formulaciones.

Definición 3 se entiende por “Discontinuidad Fuerte” una descripción cinemática compatible con la existencia de discontinuidades en alguna componente del campo de desplazamientos a través de una superficie (superficie de falla \mathcal{S}) y a partir de un instante de tiempo específico (t_{SD}); matemáticamente: $\exists \llbracket u(\mathbf{x}, t) \rrbracket_i \neq 0$ para $t \geq t_{SD}$. Luego, el campo de deformaciones consistente adquiere un carácter distribucional sobre \mathcal{S} .

Actualmente, siguiendo la aproximación por discontinuidades fuertes, pueden reconocerse dos familias o grupos bien diferenciados de elementos finitos. En orden cronológico primeramente se han desarrollado elementos enriquecidos con modos discontinuos (*Embedded Elements aquí denominados E-FEM*) [DnG90, DA91, LS95, Oli5a, Oli5b, AG96, Oli6b, OCM97, Oli98, RB99] formulados en el contexto del método de las deformaciones mejoradas (*Enhanced Assumed Strains EAS*) [SR90], donde el salto en desplazamientos se introduce como un modo incompatible de deformación. El enriquecimiento cinemático se representa mediante un grado de libertad interno que puede condensarse estáticamente con lo cual el sistema final de ecuaciones discretas no se ve afectado. Otro modelo recientemente introducido, denominado *X-FEM* (*eXtended Finite Element Method*) [BMUP01, WS01, MB02], se basa en la utilización de funciones de interpolación formuladas bajo el concepto de partición de la unidad. En este esquema, la magnitud del salto queda representada por grados de libertad adicionales en nodos existentes de la malla.

Modelo de discontinuidades fuertes del continuo

La aproximación por discontinuidades fuertes del continuo (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*) [SO94, Oli5a] puede considerarse como una sub categoría de los modelos con discontinuidades embebidas. Esta formulación alternativa permite establecer un vínculo estrecho entre: (i) la mecánica de medios continuos clásica (sección 1.3.2) y (ii) las estrategias que incorporan discontinuidades embebidas (como se detalló anteriormente). Si bien desde sus comienzos estas dos metodologías evolucionaron en forma disjunta, mediante la incorporación de unos pocos ingredientes conceptuales, la *CSDA* hace viable el planteamiento del problema de fractura material en un marco teórico unificado tal que, partiendo de la descripción estándar regular se llega (consistentemente) a modelar interfaces de discontinuidad y mecanismos de degradación y falla.

En este contexto de análisis, se postula que tanto la relación deformación desplazamiento como las ecuaciones constitutivas son las mismas que para los modelos continuos. Luego, dado que se asume posible la presencia de discontinuidades en el campo de desplazamiento, se debe generalizar el espacio cinemático admisible para considerar magnitudes singulares en el tensor de deformación compatible.

Otro aspecto relevante de la formulación, y que merece especial atención, es la regularización subyacente en el modelo constitutivo, condición necesaria para mantener acotado el estado tensional aun para medidas no acotadas de la deformación en la interface. Esto último se logra reinterpretando el módulo de ablandamiento H en un sentido distribucional.

Teniendo en cuenta la generalidad y buenos resultados ya documentados en relación a la resolución de problemas en mecánica de falla mediante la *CSDA*, se ha adoptado tal estrategia numérica como marco teórico para el estudio y formulación de modelos en una parte importante de esta tesis (véase en particular el capítulo 3).

1.4. Objetivos

A lo largo del presente trabajo de investigación se pretende encarar un estudio general del problema de falla en materiales, abarcando principalmente los aspectos teóricos y computacionales más relevantes. Por esta razón, en el contenido del mismo se discuten distintas estrategias numéricas de aproximación como así también la performance de diversas formulaciones de elementos finitos. El estudio no se restringe a un único tipo de material, sino por el contrario se estudian los dos comportamientos constitutivos típicos a través de las leyes más sencillas: plasticidad y daño isótropo.

Basándose en esta filosofía, el listado siguiente puede considerarse como representativo de los objetivos globales de la tesis:

- Obtener un conocimiento teórico generalizado sobre las diferentes estrategias de análisis aplicables a la mecánica de falla en materiales, reconocer ventajas y limitaciones de cada una de ellas.
- Estudio crítico de las formulaciones más reconocidas en la bibliografía con especial énfasis en aspectos algorítmicos para su implementación computacional.

- Estudio del problema de inestabilidad material y bifurcación discontinua causado por leyes de evolución dotadas de ablandamiento por deformación.
- Obtención de herramientas numéricas eficientes para la simulación computacional del proceso completo de degradación material, incluyendo en esta descripción fenómenos de localización de deformaciones, generación de mecanismos de colapso y cómputo de la carga límite asociada.

En particular, se plantean una serie de fines específicos, tendientes a la obtención de resultados y conclusiones originales a partir de estrategias existentes como así también el desarrollo, planteo matemático e implementación de nuevas estrategias numéricas. En este sentido, la línea de investigación que se presenta puede bifurcarse en dos caminos bien definidos:

(i) aplicaciones a modelos de daño para simular la degradación y propagación de fisuras en materiales cuasi-frágiles

(ii) aplicaciones a problemas de plasticidad para el modelado de bandas de deslizamiento en materiales de comportamiento dúctil.

Los objetivos asociados al primer ítem (daño) son los siguientes:

- Desarrollo e implementación de familias de modelos de daño basados en una formulación implícita de gradientes, para la simulación de fractura en hormigones.
- Implementación de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas de soporte elemental (*E-FEM*) en el contexto de la *CSDA*.
- Implementación de elementos finitos con discontinuidades fuertes embebidas de soporte nodal (*X-FEM*) en el contexto de la *CSDA*.
- Aplicación de estos elementos a la resolución de casos 3D y a problemas de propagación de fisuras múltiples.
- Estudio crítico comparativo de las dos tecnologías cinemáticas *E-FEM* y *X-FEM*, abordando aspectos cruciales en la simulación computacional de falla.

Los objetivos vinculados al segundo punto (plasticidad) se presentan a continuación:

- Estudio de problemas de bloqueo por incompresibilidad en plasticidad isocórica bajo régimen de ablandamiento por deformación.
- Estudio e implementación de un esquema de estabilización para aliviar el bloqueo volumétrico en la etapa previa a la bifurcación material.
- Desarrollo, formulación e implementación de un nuevo elemento finito estabilizado y cinemáticamente mejorado basado en la aproximación por discontinuidades fuertes del continuo, para el modelado de bandas de deslizamiento.

1.5. Hipótesis

Los conceptos, desarrollos y modelos discutidos en esta tesis se fundamentan en el contexto teórico de la *Mecánica de Medios Continuos*. La aplicación de los mismos queda restringida a situaciones en las cuales se verifiquen las siguientes hipótesis básicas:

- Régimen cuasi estático e isotérmico.
- Pequeños desplazamientos, deformaciones y rotaciones.
- Material continuo, homogéneo e isótropo.
- Comportamiento material gobernado por modelos invíscidos de plasticidad y daño.
- Material susceptible de presentar inestabilidad a nivel constitutivo inducida por leyes de evolución con ablandamiento por deformación.

1.6. Contenidos

Esta tesis se ha organizado en siete capítulos más cuatro anexos. La disposición de capítulos intenta establecer la línea principal de investigación en un desarrollo lógico. Los apéndices incluyen aportes adicionales a la estructura básica del trabajo, por ende se considera de importancia el contenido de los mismos.

En un principio, el problema de falla material se aborda haciendo uso de esquemas de *Gradientes de alto orden de Deformación*. En este contexto se ha propuesto el desarrollo e implementación de una familia de leyes constitutivas de daño isótropo con teoría de gradientes y en particular se considera una formulación *implícita*, debido a su especial atractivo desde el punto de vista computacional, ver apéndice A. A partir de dicho análisis ([SSH03]) surgen algunas desventajas propias de este tipo de metodologías, también reportadas por numerosos investigadores en publicaciones recientes.

El paso siguiente ha sido investigar estrategias alternativas al problema. Con esta idea en mente se encara el estudio de modelos discretos cohesivos, dotados además de una cinemática enriquecida capaz de simular, en forma objetiva y viable computacionalmente, la falla material mediante la introducción de discontinuidades en el campo de desplazamiento. Este tipo de formulación, denominada tradicionalmente como *Aproximación por Discontinuidades Fuertes*, se ha adoptado como metodología principal frente al fenómeno de localización y fallo, tanto para materiales frágiles como dúctiles, y por tal motivo el cuerpo de la tesis se dedica a su estudio.

Con el objeto de establecer una plataforma teórica básica, en el capítulo siguiente presentamos el problema de localización de deformaciones, planteado en el contexto clásico de la mecánica de medios continuos para leyes constitutivas locales y con ablandamiento por deformación. Se pretenden abordar aquellos aspectos vinculados con la existencia de bifurcación en la solución a nivel de las ecuaciones diferenciales de gobierno. Se detallan además las expresiones constitutivas para los modelos de plasticidad y daño utilizados en

el resto de la tesis, aplicando sobre los mismos el correspondiente análisis de bifurcación discontinua.

El capítulo 3 está dedicado a introducir los conceptos e ingredientes en los cuales se fundamenta la *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo (CSDA)*, adoptada en este trabajo como metodología particular para simular el proceso completo de degradación material. Se describe el modelo conceptual y algunos detalles de importancia relacionados con la implementación numérica del mismo. A partir de este punto, el contenido de la tesis se direcciona específicamente a estudiar aplicaciones y nuevos desarrollos en el contexto de la *CSDA*. Siguiendo esta filosofía, se ha trabajado paralelamente sobre los dos comportamientos materiales típicos: (i) modelado de fractura frágil y (ii) simulación de problemas de falla dúctil.

La implementación de elementos finitos para leyes de daño (fractura frágil) se trata extensamente en el capítulo 4. Presentamos además un exhaustivo y original estudio comparativo ([OHS, SOHS05]) entre las dos formulaciones con modos discontinuos enriquecidos, aquí denominadas *E-FEM* y *X-FEM*, que representan las tecnologías actuales potencialmente más eficaces para problemas de falla cuasi-frágil. Este análisis intenta cubrir los tópicos más relevantes en mecánica de fractura computacional, entre los cuales se mencionan: precisión en la respuesta, exactitud, robustez, convergencia, velocidad de convergencia y costo computacional. Actualmente, existe una marcada falencia en cuanto a la cuantificación de estas medidas que gobiernan la performance algorítmica, y por este motivo se dedica un capítulo completo para tal fin. En este mismo apartado, se discuten también las estrategias numéricas adicionales en la cual se sustenta la implementación computacional de la *CSDA*, como ser: algoritmo de integración temporal, trazado geométrico de discontinuidades en la malla, reglas de integración, etc. El resultado es un esquema global muy robusto.

Esto último (robustez del algoritmo global) queda incluso más en evidencia a partir de los resultados reportados en el apéndice D. Allí se extiende la aplicación de la *CSDA* realizando un análisis paramétrico de probabilidad de falla. Este trabajo forma parte de un proyecto interdisciplinario más ambicioso ([PPL+05]), aún en desarrollo, y representa una de las primeras aplicaciones de la mecánica de fractura material mediante modelos discretos cohesivos, tendiente a la estimación precisa de vulnerabilidad y determinación de índices de integridad en estructuras complejas.

En el contexto del modelado de falla dúctil por discontinuidades fuertes, el desarrollo alcanzado por la tecnología de elementos es ciertamente limitado. Especialmente en lo concerniente a elementos símplices de bajo orden, útiles para la simulación en gran escala (como por ejemplo casos de fisuración múltiple en 3D). Por este motivo, en los capítulos 5 y 6 se avanza en esta línea de investigación. De este modo, abordamos el modelado numérico de mecanismos de falla inducidos por el desarrollo de bandas corte para leyes constitutivas elasto-plásticas de tipo J_2 .

En esta clase de problemas es conocida la falta de precisión que posee la formulación irreducible en desplazamientos, en la etapa previa a la inestabilidad material, y ante la situación de cuasi incompresibilidad generada por el predominio de deformaciones plásticas desviadoras. Por ello, primeramente en el capítulo 5, se introduce un esquema mixto y estabilizado (*PGP*) como alternativa para el tratamiento de la incompresibilidad. En

particular el estudio se direcciona a evaluar la performance de esta metodología para capturar bandas de localización de deformaciones en régimen post-crítico de ablandamiento, [SSH04b, SHS04]. De este capítulo surgen dos anexos: (i) el apéndice B dedicado a brindar una justificación conceptual de la técnica de estabilización adoptada en el marco teórico de multi-escalas (sub-escalas ortogonales) y (ii) el anexo C en donde se describe la implementación de la estrategia mixta estabilizada en un entorno de cálculo distribuido, [SSH04b, SHS04].

Tras reconocer algunas limitaciones en la formulación PGP para modelar modos de colapso de manera objetiva en relación a la direccionalidad de la malla, en el capítulo 6 desarrollamos una nueva familia de elementos finitos (denominada $PGPSD$) que se basa en acoplar consistentemente dicho esquema de estabilización con una cinemática de discontinuidades fuertes embebidas de soporte local, [SSHO06, SSH04a]. Se presentan ejemplos de aplicación que muestran un desempeño satisfactorio del modelo propuesto en cuanto a la respuesta cualitativa. A su vez, desde el punto de vista cuantitativo y a manera de validación, el comportamiento numérico de la estrategia desarrollada se compara con soluciones analíticas y numéricas de referencia.

Finalmente, en el apartado 7, se resumen las conclusiones, se destacan los aportes originales y las propuestas de investigación a futuro que vislumbramos a partir del presente trabajo.

Capítulo 2

Localización de deformaciones

2.1. Introducción

Como se mencionó en el capítulo precedente, el proceso acumulativo de deformaciones en bandas de espesor reducido, fenómeno aquí denominado *Localización de Deformaciones* (*Strain Localization*), es considerado como el factor responsable (*detonante*) a partir del cual se llega a la falla estructural por degradación material y agotamiento de su resistencia.

La existencia de un modo o patrón localizado de deformación está directamente asociado a características intrínsecas de las ecuaciones de gobierno del continuo y en particular a inestabilidades a nivel constitutivo [RR75]. Para poner en evidencia el carácter material de este tipo de inestabilidad debe considerarse que, aun para un estado homogéneo de tensión (y bajo ciertas circunstancias que se discutirán a lo largo de este capítulo), pueden coexistir dos soluciones posibles, ambas compatibles con las ecuaciones que gobiernan el problema y las condiciones de contorno, a saber: (i) la *solución cuasi homogénea en deformaciones* que representa un mapeo directo entre los espacios duales tensión-deformación; (ii) la *solución localizada*, que se caracteriza por la presencia de una región sometida a deformación homogénea asociada a estados tensionales de descarga elástica y otra porción del dominio con deformaciones altamente localizadas y evolución de mecanismos inelásticos. Se concluye de esta forma que existe una *bifurcación en la solución* causada por la descripción macroscópica constitutiva del material. En especial, los modelos locales con ablandamiento por deformación o bien con potenciales no asociativos, son particularmente susceptibles de presentar este tipo de inestabilidad [OR91]. El instante de tiempo para el cual la solución puede no ser única se denominará de aquí en adelante tiempo de bifurcación $t_B \in [0, T]$

Algunas aproximaciones al problema de falla redefinen (enriquecen o generalizan) el modelo continuo estándar para evitar bifurcaciones en la respuesta independientemente del comportamiento constitutivo supuesto, (véase sección 1.3.3); de esta forma el problema matemático permanece siempre bien formulado (en cuanto a unicidad de solución) y las bandas de localización propagan naturalmente a partir de la evolución de ciertas variables regularizadas definidas para ese modelo. En el apéndice A se ha avanzado en esta línea de análisis. Allí se presenta la formulación matemática, implementación computacional y validación numérica de un modelo de daño formulado según la teoría de *Gradientes de Deformación*.

Por el contrario, en aquellos modelos basados en la *Mecánica Local de Medios Con-*

tinuos, el análisis de *bifurcación material* representa uno de los criterios más utilizados para detectar el instante de inicio y dirección de propagación de discontinuidades en el sólido, de allí la importancia de su estudio.

En este capítulo, se presenta como objetivo general el planteo formal matemático del problema de localización de deformaciones a través del análisis clásico de *Bifurcación Discontinua*. El estudio se restringe a deformaciones infinitesimales, para modelos locales, independientes de la velocidad de deformación y en régimen cuasi estático de carga [ROP91, RR80]. En particular se obtendrán las condiciones críticas bajo las cuales las leyes de evolución constitutivas predicen la pérdida de elipticidad y por ende falta de unicidad de la solución a nivel del modelo continuo.

Inicialmente, sección 2.2, se define parte de la nomenclatura básica que se utilizará en el resto de la tesis. En la sección 2.3 se introducen los conceptos clásicos de bifurcación material, detallando su análisis. Seguidamente, apartados 2.4, 2.5 y 2.6, se discuten las ecuaciones básicas de tres modelos constitutivos: plasticidad J_2 , daño escalar estándar, y daño sólo tracción, que sirven como fundamento para desarrollos posteriores. Por último, en la sección 2.7, mencionamos una estrategia que permite obtener soluciones simples al problema de bifurcación material para una amplia gama de leyes constitutivas, el mismo se basa en una interpretación geométrica del estado tensional en el momento incipiente a la singularidad del tensor de localización.

2.2. Nomenclatura básica

Considérese la existencia una configuración de referencia Ω asociada al sólido en estudio. Más específicamente, $\Omega \subset \mathbb{R}^{ndim}$ es un conjunto abierto y acotado con frontera suave Γ , siendo $ndim$ la dimension del espacio. Dado que el presente estudio se restringe al contexto de geometría lineal, es válida la siguiente aproximación: $\Omega \approx \Omega_{(t)}$, donde $\Omega_{(t)}$ es la configuración deformada al instante t . Por este motivo y apelando a cuestiones de simplicidad en la escritura, sólo se utilizará la simbología Ω en todos los desarrollos siguientes. La posición de un punto arbitrario \mathbf{x} ($\mathbf{x} \in \Omega$) queda representado por el vector¹ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{ndim}$, véase Figura 2.1, para el cual se pueden definir funciones o campos tensoriales que brindan información referente al estado mecánico del material. Considérese además un intervalo de tiempo² $[0, T] \in \mathbb{R}_0^+$.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la función campo de desplazamientos ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$) y campo de velocidades³ ($\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$), para una partícula material $\mathbf{x} \in \Omega$ y al tiempo $t \in [0, T]$, pueden conceptualmente pensarse de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.1)$$

¹Nótese que utiliza la misma simbología para denotar un punto material \mathbf{x} en la configuración de referencia ($\mathbf{x} \in \Omega$) y su vector posición \mathbf{x} en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{ndim} ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{ndim}$). Se adopta este criterio debido a la dualidad que existe entre el punto material y su vector posición, con la intención de simplificar la notación.

²Dado que el estudio se restringe a modelos cuasi estáticos invíscidos, la variable tiempo “ t ” deberá considerarse sólo como un parámetro auxiliar para el planteo tradicional “*en tasas*” de las ecuaciones constitutivas.

³Se considera $\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} |_{\mathbf{x}=cte}$, donde $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ es cualquier campo tensorial.

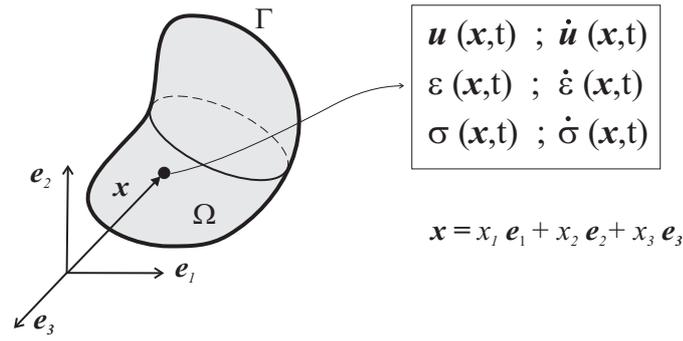


Figura 2.1: Configuración de referencia. Conjunto de variables mecánicas y cinemáticas asociadas a un punto material \mathbf{x} .

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.2)$$

El tensor de deformaciones infinitesimales (y su tasa), compatible con el campo de desplazamientos (2.1), se escribe entonces:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \mathbf{u})^{sym} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] = \frac{1}{2}[\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}] \quad (2.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \frac{1}{2}[\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T] = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}] \quad (2.5)$$

donde \otimes simboliza un producto tensorial (externo), $\mathbb{T}^{(2)}$ y $\mathbb{T}^{(2)sym}$ representan el espacio de tensores de segundo orden y tensores simétricos de segundo orden respectivamente, los cuales están dotados de producto interno⁴:

$$\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} = \xi_{ij} \xi_{ij} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^{(2)} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} &> 0 \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} &= 0 \quad ; \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

y norma euclídea asociada:

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{T}^{(2)} \quad (2.8)$$

además en 2.4-2.5 se ha considerado que el operador $(\bullet)^{sym}$ implica parte simétrica del argumento (\bullet) , y $(\bullet)^T$ transpuesta de (\bullet) , ambos definidos sobre $\mathbb{T}^{(2)}$.

⁴En aquellas expresiones tensoriales con subíndices i, j, \dots , si no se especifica lo contrario, se asume notación indicial o de Einstein.

El tensor de tensiones de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.9)$$

para el caso de leyes constitutivas locales e independientes de la velocidad de deformación, puede obtenerse a partir de la relación incremental:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{R}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \\ &= C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \end{aligned} \quad (2.10)$$

relativo a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbb{R}^{ndim} , donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo tangente de cuarto orden ($\mathbf{C} \in \mathbb{T}^{(4)}$) también denominado operador tangente incremental, en general no simétrico y, para nuestro propósito, independiente de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, como se deduce de 2.10. A su vez, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ representan la tasa del tensor de deformaciones y tensiones respectivamente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{T}^{(2)sym} \quad (2.12)$$

2.3. Bifurcación material

2.3.1. Ecuaciones de compatibilidad cinemática

Sea un campo vectorial arbitrario $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ continuo sobre el dominio Ω , pero cuyas derivadas primeras pueden presentar discontinuidades a través de una superficie \mathcal{S} ($\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ posee continuidad $C^0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$) que divide a Ω en dos conjuntos disjuntos Ω^+ y Ω^- ($\Omega^+ \subset \Omega$; $\Omega^- \subset \Omega$ tal que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \mathcal{S}$ y $\Omega \setminus \mathcal{S} = \Omega^+ \cup \Omega^-$), ver figura 2.2.

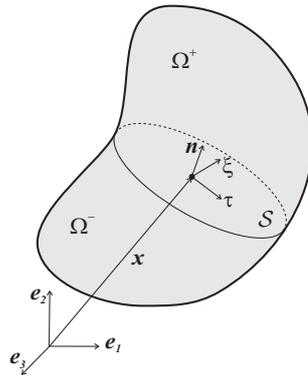


Figura 2.2: Dominio material Ω subdividido por la superficie \mathcal{S} a través de la cual un campo arbitrario puede presentar discontinuidades en sus derivadas.

Sobre cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ se considera un sistema cartesiano ortonormal con base $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}\}$ de \mathbb{R}^{ndim} , véase figura 2.2. En particular, \mathbf{n} es ortogonal a \mathcal{S} en \mathbf{x} mientras que

$\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\xi}$ están contenidos en un plano imaginario tangente a \mathcal{S} en \boldsymbol{x} . Nótese que la definición de Ω^+ está asociada a la dirección positiva del vector \boldsymbol{n} .

Debido a la continuidad del campo $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ en Ω , su derivada direccional respecto a los vectores $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\xi}$ deberá ser uniforme, en consecuencia se puede escribir:

$$\begin{aligned} \llbracket \partial_{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{a} \rrbracket &= \llbracket \nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \llbracket (\boldsymbol{a} \otimes \nabla) \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \\ \llbracket \partial_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{a} \rrbracket &= \llbracket \nabla \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\xi} \rrbracket = \llbracket (\boldsymbol{a} \otimes \nabla) \cdot \boldsymbol{\xi} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde se ha definido el operador salto o discontinuidad de la siguiente forma:

$$\llbracket (\bullet) \rrbracket = (\bullet)|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^+)} - (\bullet)|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^-)} \quad (2.14)$$

siendo $\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\bullet)$ (ó $\partial_{\boldsymbol{\xi}}(\bullet)$) la derivada direccional de (\bullet) en dirección $\boldsymbol{\tau}$ (ó $\boldsymbol{\xi}$), y en general:

$$\partial_{\boldsymbol{p}}(\bullet) = \nabla(\bullet) \cdot \boldsymbol{p} \quad ; \quad \forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.15)$$

Observación 1 con la simbología $\boldsymbol{x} \in \Omega^+$ hacemos referencia a un punto material \boldsymbol{x} perteneciente al dominio Ω^+ infinitamente próximo a \mathcal{S} . Igual razonamiento se aplica a la nomenclatura $\boldsymbol{x} \in \Omega^-$.

De 2.13 se desprende que el salto del gradiente de $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ sólo podrá tener componentes en la dirección normal al plano de discontinuidad:

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{a} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau} + \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{\xi} + \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.16)$$

$$\llbracket \nabla \boldsymbol{a} \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket = \llbracket \boldsymbol{a} \otimes \nabla \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{n} \quad (2.17)$$

donde $\boldsymbol{\beta}$ es un vector definiendo la dirección y magnitud del salto del gradiente.

Considerando ahora que el campo funcional arbitrario supuesto $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t)$ representa el desplazamiento del punto \boldsymbol{x} ($\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$), el salto en tasa de deformaciones compatible, de acuerdo a 2.5, podrá expresarse:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket = \llbracket \nabla \dot{\boldsymbol{u}} \rrbracket^{sym} = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym} = \frac{1}{2} [(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{n} \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}})] \quad (2.18)$$

la cual se conoce clásicamente como ecuación de compatibilidad o restricción cinemática de *Maxwell*.

En términos de la expresión 2.14, otra forma de interpretar 2.18 es la siguiente:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^+)}} - \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}|_{(\boldsymbol{x} \in \Omega^-)}} \quad (2.19)$$

con $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}$ representando la tasa de deformación a un lado y otro de la interface de discontinuidad respectivamente, luego de 2.19 y 2.18 se deduce que el tensor tasa de deformación medido muy próximo a \mathcal{S} se expresa:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}}_{(\nabla \dot{\boldsymbol{u}})^{sym}} + \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym}}_{[\nabla \dot{\boldsymbol{u}}]^{sym}} \quad (2.20)$$

2.3.2. Condiciones de bifurcación

Se pretende en esta sección investigar las razones específicas por la cual la descripción constitutiva macroscópica induce una bifurcación en la respuesta material. Este estudio corresponde a la teoría general de localización de deformaciones tratada extensamente por numerosos investigadores en los últimos años [RR75, Ric76, OR91].

El problema en cuestión puede plantearse de la siguiente forma: dado un material sujeto a un estado (tasa) de tensión homogéneo en Ω para el instante de tiempo t , encontrar las condiciones críticas necesarias para que la tasa de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, en un principio también homogénea, se torne repentinamente no uniforme a través de una superficie \mathcal{S} , mientras que en el resto del sólido ($\Omega \setminus \mathcal{S}$) permanece uniforme, véase figura 2.2. Esta es precisamente la hipótesis introducida en [RR75, Ric76] donde es admisible una discontinuidad en $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ mientras que el campo de velocidad $\dot{\boldsymbol{u}}$ conserva su regularidad (*discontinuidad débil*).

Para formular matemáticamente el problema se deben considerar las condiciones de compatibilidad cinemática discutidas en la sección previa juntamente con la ecuación de equilibrio a través de la banda de localización que establece la continuidad de (la tasa de) tracciones en el instante inminente de la bifurcación t_B . En consecuencia, la inestabilidad material tendrá lugar en un punto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ para $t = t_B \in [0, T]$ si existe algún vector $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$ tal que se verifique simultáneamente:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rrbracket = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \boldsymbol{n})^{sym} \rightarrow \text{restricción cinemática} \quad (2.21)$$

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \rightarrow \text{restricción de equilibrio} \quad (2.22)$$

donde se ha definido además el vector tasa de tracciones $\dot{\boldsymbol{T}}$ mediante:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^+} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}) \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.23)$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^-} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-}) \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.24)$$

y por extensión directa:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{T}}_{\Omega^-} = \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-})}_{\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket} \cdot \boldsymbol{n} \quad (2.25)$$

Si se asume un comportamiento incrementalmente lineal del material (excluyendo la dependencia temporal o viscosidad), la tasa de tensión puede expresarse en términos de la tasa de deformación a través de una relación constitutiva como aquella dada en la ecuación 2.10. La restricción de equilibrio 2.22, se puede entonces reescribir convenientemente de la forma:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{T}} \rrbracket = \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n} = \underbrace{(\boldsymbol{C}_{\Omega^+} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^+})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+}} - \underbrace{(\boldsymbol{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^-})}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-}} \cdot \boldsymbol{n} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

A partir de la ecuación anterior surgen dos situaciones factibles, dependiendo del comportamiento constitutivo a cada lado de la interface \mathcal{S} . En Rice et al. [RR80] se

propone una distinción entre bifurcación continua y discontinua de acuerdo al siguiente criterio:

- *Bifurcación continua*: Comportamiento inelástico de carga tanto en Ω^+ como en Ω^- , esto implica: $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-}$
- *Bifurcación discontinua*: Comportamiento inelástico de carga en (por ejemplo) Ω^+ y comportamiento elástico de descarga (o carga neutra) en Ω^- , es decir: $\mathbf{C}_{\Omega^+} \neq \mathbf{C}_{\Omega^-}$

Bifurcación continua

Esta situación particular representa el primer modo probable de bifurcación donde se asume que todo punto material permanece en régimen de carga inelástica, verificándose en consecuencia $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, luego se puede expresar:

$$\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} : \underbrace{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-})}_{[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]} \quad (2.27)$$

Dado que $\llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \in \mathbb{T}^{(2)sym}$ y $\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket \in \mathbb{T}^{(2)sym}$, luego $\mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ posee al menos simetría menor⁵ en el espacio de tensores de cuarto orden $\mathbb{T}^{(4)}$, es decir:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijlk} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Introduciendo 2.27 en la ecuación de equilibrio de tracciones 2.26, teniendo en cuenta 2.18 y 2.28, surge naturalmente la igualdad siguiente:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

o bien:

$$\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) \in \mathbb{T}^{(2)}$ es el tensor de localización valuado en un punto $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$ infinitamente próximo a \mathcal{S} , y se define como:

$$\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{ndim} \quad (2.31)$$

Para que existan soluciones no triviales ($\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$) del sistema de ecuaciones 2.30, se requiere que el tensor de localización resulte singular:

$$\det(\mathbf{Q}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{n})) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.32)$$

para al menos una dirección no trivial \mathbf{n} , es decir la condición de bifurcación está asociada con las propiedades espectrales de $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$.

La ecuación 2.32 debe interpretarse como condición *necesaria* para que en un punto material $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$ (que tiende a \mathcal{S}) el campo tasa de deformación pueda resultar discontinuo ($\llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket \neq \mathbf{0}$ lo que implica $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$) a través de la superficie \mathcal{S} cuya normal es \mathbf{n} . Debe

⁵La simetría mayor de un tensor constitutivo \mathbf{C} definida mediante: $C_{ijkl} = C_{klij}$ está directamente relacionada con la asociatividad del potencial inelástico.

destacarse sin embargo que la singularidad de $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ no representa una condición *suficiente* para que se desarrolle un modo global de bifurcación material, ya que las condiciones de sustentación o de borde pueden evitar este fenómeno.

Bifurcación discontinua

Otro posible modo de bifurcación se corresponde con un comportamiento diferente del material a ambos lados de \mathcal{S} . Esta pérdida de continuidad en la respuesta constitutiva se debe a que, por ejemplo, el material en Ω^- no permanece en régimen de carga inelástica, de hecho se asume que descarga en forma elástica (o carga neutra). La bifurcación discontinua se caracteriza entonces mediante una desigualdad de la forma $\mathbf{C}_{\Omega^+} \neq \mathbf{C}_{\Omega^-}$, en consecuencia puede escribirse:

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega^+} : \overbrace{(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} + \llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket)}^{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^+}} - \mathbf{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} \\ &= \mathbf{C}_{\Omega^+} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}) - \mathbf{C}_{\Omega^-} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde además $\mathbf{C}_{\Omega^-} \equiv \mathbf{C}_{\Omega^-}^e$, siendo $\mathbf{C}_{\Omega^-}^e$ el tensor constitutivo elástico valuado en $\mathbf{x} \in \Omega^-$.

Introduciendo 2.33 en la condición de equilibrio de tracciones 2.26 se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}_{\Omega^+} - \mathbf{C}_{\Omega^-}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_{\Omega^+} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{C} \rrbracket : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.34)$$

y luego:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{Q}_{\Omega^+}^{-1} \cdot \{\mathbf{n} \cdot \llbracket \mathbf{C} \rrbracket : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega^-}\} \quad (2.35)$$

para lo cual se ha definido $\llbracket \mathbf{C} \rrbracket = \mathbf{C}_{\Omega^+} - \mathbf{C}_{\Omega^-}$ como el salto de cada componente del tensor constitutivo a ambos lados de la discontinuidad.

Las condiciones necesarias para la aparición un modo de bifurcación discontinuo han sido extensamente investigadas en los últimos años, véase por ejemplo los trabajos publicados de Rice & Rudnicki 1980 [RR80] y Ottosen & Runesson 1991 [OR91], entre otros. A partir de estos estudios se extraen conclusiones importantes. Tal vez la más trascendente es que el modo continuo puede considerarse como una situación límite (y de hecho la más desfavorable) de bifurcación discontinua. En vista de este resultado la bifurcación en régimen de carga plástica-carga plástica ocurre antes que la situación carga plástica-descarga elástica, luego la singularidad del tensor $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ (ecuación 2.32), también conocida como condición de localización o criterio de localización de Rice, será finalmente la condición crítica a verificar para detectar bifurcaciones en la respuesta material.

Como referencia a futuro, a continuación se introducen las ecuaciones básicas de los modelos constitutivos que se utilizarán en los capítulos más avanzados: (i) plasticidad J_2 estándar, (ii) daño escalar isótropo y (iii) una versión particular de la ley de daño tal que la degradación se produce sólo bajo tensiones de tracción. Luego se presenta la estrategia numérica que utilizamos en este trabajo para el correspondiente estudio de localización de deformaciones formulada en el contexto clásico del análisis de *Bifurcación Material*.

2.4. Modelo de plasticidad J_2

En esta sección, se resumen las ecuaciones que conforman el modelo constitutivo isotropo de plasticidad de Von Mises (J_2) independiente de la velocidad de deformación y con especial énfasis en su formato asociativo, véase Simo & Hughes [SH98], Runesson [Run98]. Los fundamentos físicos, conceptuales y termodinámicos del presente modelo pueden consultarse en la bibliografía clásica [Hil50, Lub90, LC90] donde se trata el tema en mayor profundidad.

2.4.1. Ecuaciones básicas

En primera instancia, se asume como es común en el contexto de pequeñas deformaciones, la descomposición aditiva del tensor de deformaciones totales:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

el cual está compuesto por una parte elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ (reversible) y una plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ (no reversible).

La respuesta elástica del modelo puede obtenerse a partir de la definición de un potencial de densidad de energía libre ψ , también conocido como potencial de Helmholtz:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \psi^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi^p(\alpha) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \frac{1}{2} \alpha H \alpha \quad (2.37)$$

donde ψ^e representa la componente reversible de la energía total expresada como una función cuadrática de las deformaciones elásticas⁶ y ψ^p aquella fracción irreversible dependiente de variables internas α , definidas para el modelo.

El tensor de tensiones puede considerarse como una variable termodinámicamente conjugada a la deformación elástica a través del potencial ψ , con lo cual queda establecida una relación constitutiva (y su forma incremental) válida durante el régimen elástico del material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (2.38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (2.39)$$

donde \mathbf{C}^e representa el tensor elástico isotropo de cuarto orden:

$$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{II} \quad (2.40)$$

definido en términos de las constantes de Lamé, λ y μ , del tensor identidad de segundo orden $\mathbb{I} = \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$ y del tensor identidad simétrico de cuarto orden $\mathbb{II} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$. Nótese que δ_{ij} simboliza el operador de Kronecker tal que: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Como se deduce de 2.40, \mathbf{C}^e es definido positivo y presenta simetría mayor y menor.

⁶Esta forma cuadrática del potencial ψ^e , el cual puede entenderse como la energía de deformación almacenada en el seno del material, responde al contexto teórico de los modelos *Hiperelásticos*.

Para el caso del modelo isótropo en estudio, la función escalar de fluencia ϕ , formulada en el espacio de tensiones, se expresa como función del propio estado tensional $\boldsymbol{\sigma}$ y de una única variable interna escalar tipo tensión q :

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - (\sigma_y - q) \leq 0 \quad (2.41)$$

siendo $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S} : \mathbf{S})}$ una medida del tensor desviador de tensiones \mathbf{S} ($= dev(\boldsymbol{\sigma})$) y σ_y la tensión umbral de fluencia del material que restringe el espacio admisible de variación de q de acuerdo a:

$$q \in (-\infty, \sigma_y] \quad (2.42)$$

La introducción de variables internas en el modelo implica la necesidad de regular su evolución conforme algún criterio específico dependiente del tipo de material. En este sentido se plantea:

$$\dot{q} = -H(\alpha) \dot{\alpha} \rightarrow \text{Ley de endurecimiento/ablandamiento} \quad (2.43)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \gamma \mathbf{M} \rightarrow \text{Regla de flujo} \quad (2.44)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma N \quad (2.45)$$

teniendo en cuenta las siguientes definiciones: γ es el multiplicador plástico que define la magnitud de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ y \mathbf{M} es un tensor gobernando su dirección de evolución, α simboliza una variable interna tipo deformación que representa la deformación plástica equivalente acumulada, $N \geq 0$ es simplemente un factor de proporcionalidad entre $\dot{\alpha}$ y γ , por último $H(\alpha)$ es el módulo de endurecimiento/ablandamiento del material.

En el caso particular de plasticidad asociativa que nos ocupa, \mathbf{M} y N pueden escribirse de la forma:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (2.46)$$

$$N(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} = 1 \quad (2.47)$$

La ecuación 2.46 indica que la dirección de evolución de la deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ es normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones.

La particularidad esencial que caracteriza el proceso disipativo de flujo plástico es la irreversibilidad del mismo. Esta noción se traduce a nivel matemático mediante las condiciones de carga y descarga. De esta manera, y para que el modelo constitutivo quede completamente definido, se introducen a continuación las condiciones complementarias y la restricción de consistencia o persistencia plástica:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.48)$$

$$\gamma \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.49)$$

En el caso de carga plástica, el valor numérico del multiplicador $\gamma > 0$ puede obtenerse a partir de la ecuación de consistencia 2.49 ($\dot{\phi} = 0$):

$$\gamma = \frac{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \quad (2.50)$$

2.4.2. Tensor Constitutivo Incremental

Sustituyendo 2.50 en la relación elástica incremental 2.39, teniendo en cuenta además la definición de regla de flujo 2.44, se obtiene la expresión del tensor elasto-plástico tangente \mathbf{C}^{ep} de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ &= \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + \mathbf{N} \mathbf{H} \mathbf{N}} \quad (2.52)$$

Para el caso de descarga elástica o carga neutra ($\gamma = 0$), la ley constitutiva incremental se expresa directamente como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.53)$$

Luego, considerando entonces las dos posibilidades mencionadas, puede escribirse una relación incremental general del tipo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^{ep} & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga plástica}) \end{cases} \quad (2.54)$$

2.5. Modelo de daño escalar

Se introducen a continuación las ecuaciones básicas que definen la ley de daño continuo utilizada en este trabajo. La misma pertenece a una familia de modelos simples de degradación isótropa como el presentado por Simo et al. [SJ87] y Oliver et al. [OCOL]. Aspectos físicos y termodinámicos de estos modelos pueden consultarse en Lemaitre & Chaboche [LC90].

2.5.1. Ecuaciones básicas

La degradación elástica isótropa puede formularse mediante la introducción de una única variable escalar, también denominada variable de daño $d \in [0, 1]$ [Kac86]. En este contexto, $d = 0$ implica que las propiedades elásticas no han sufrido degradación alguna (material indemne), mientras que $d = 1$ caracteriza la pérdida completa de integridad material.

Una opción posible para definir la función densidad de energía libre de Helmholtz, contemplando la posibilidad de degradación isotropa, es la siguiente:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d) \overbrace{\frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon})}^{\psi^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})} \quad ; \quad d \in [0, 1] \quad (2.55)$$

donde ψ^e representa la energía de deformación elástica almacenada en el material no degradado.

La variable de daño puede a su vez definirse en términos de una variable interna tipo deformación r :

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.56)$$

siendo q una variable tipo tensión termodinámicamente conjugada a r . Se asume que antes de la aplicación de las cargas el material está intacto, es decir no degradado, cumpliéndose necesariamente $d = 0$. Luego, según la definición previa (2.56), los valores iniciales de $r_0 = r|_{(t=0)}$ y $q_0 = q|_{(t=0)}$ deben ser coincidentes. Considérese además que dicho valor inicial es una propiedad intrínseca del material:

$$r_0 = q_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \quad (2.57)$$

dependiente de la tensión última uniaxial σ_y y el módulo de elasticidad longitudinal E .

La expresión 2.55 permite derivar una relación tensión deformación (y su variante incremental) de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.58)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}(r) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.59)$$

Otra alternativa para escribir la relación constitutiva 2.58 es introduciendo el concepto de tensión efectiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.60)$$

donde se advierte que la variable de daño d , relaciona el estado tensional real del sólido $\boldsymbol{\sigma}$ con un estado de tensión ficticio asociado al material no degradado $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

La ley de evolución para la variable interna tipo deformación r simplemente puede plantearse:

$$\dot{r} = \gamma \quad (2.61)$$

con $r \in [r_0, \infty)$ y donde γ representa, en este contexto, el multiplicador o parámetro de consistencia de daño.

La función criterio de degradación $\phi(\boldsymbol{\sigma}, q)$ se plantea de la forma:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q \leq 0 \quad (2.62)$$

donde $\tau_{\boldsymbol{\sigma}}$ representa cierta medida del tensor de tensiones ($\tau_{\boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \wedge \tau_{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$), que, en nuestro caso particular, se define en términos de una métrica asociada al tensor de elasticidad inverso:

$$\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}^{e-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.63)$$

notando además que:

$$\tau_{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d) \|\bar{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\mathbf{C}^{e-1}} = (1-d) \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{e-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (1-d) \tau_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.64)$$

$$= (1-d) \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathbf{C}^e} = (1-d) \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.65)$$

En otras palabras, este modelo permite establecer un criterio de degradación que puede formularse indistintamente en el espacio de tensiones o deformaciones [SJ87]:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = \tau_{\boldsymbol{\varepsilon}} - r \leq 0 \quad (2.66)$$

La evolución de la variable interna tipo tensión $q(r)$, desde su valor inicial $q_0 = r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}}$, queda regulada mediante la ley:

$$\dot{q} = H(r)\dot{r} \quad ; \quad q \in [0, q_0] \quad (2.67)$$

siendo $H(r)$ el módulo de endurecimiento/ablandamiento del continuo, que representa la pendiente de la curva en coordenadas $r - q(r)$, es decir, $H(r) = q(r)' = \frac{dq(r)}{dr}$.

En este sentido, definimos dos familias de leyes de ablandamiento por deformación que se utilizarán a lo largo de esta tesis (véase figura 2.3):

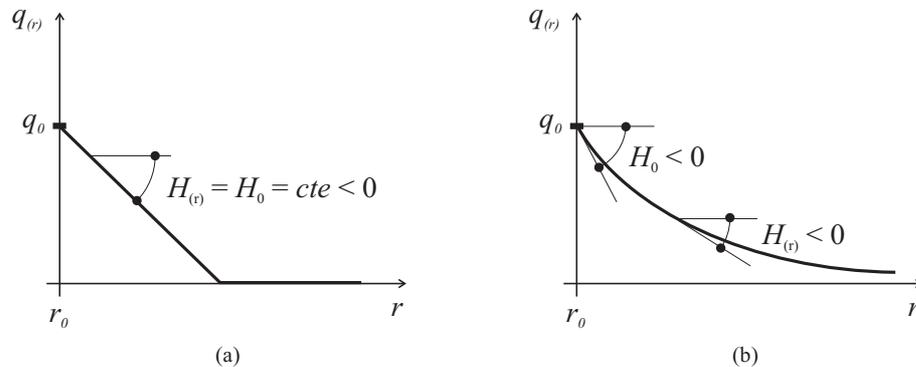


Figura 2.3: Leyes de ablandamiento para el modelo de daño escalar representadas en el espacio de variables internas $(r - q)$: (a) Lineal. (b) Exponencial.

$$H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = H_0 = \text{cte} < 0 \quad \rightarrow \text{Ley de ablandamiento lineal} \quad (2.68)$$

$$H(r) = \frac{dq(r)}{dr} = H_0 e^{\frac{H_0(r-r_0)}{q_0}} < 0 \quad \rightarrow \text{Ley de ablandamiento exponencial} \quad (2.69)$$

donde $H_0 = H|_{r=r_0}$.

Para completar la formulación del modelo es necesario introducir las restricciones unilaterales compatibles con las relaciones de carga-descarga:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.70)$$

garantizando la condición de consistencia o persistencia de daño:

$$\gamma \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.71)$$

Una de las características más interesantes de esta formulación es que la ley de evolución de r , ecuación 2.61, puede integrarse en forma cerrada. Considérese para ello el caso de carga inelástica, es decir $\dot{r} = \gamma > 0$. Luego, por las condiciones complementarias (2.70) se debe satisfacer $\phi = 0$ y de acuerdo a 2.66 se tiene $r = \tau_\epsilon = \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}}$. Además dado el carácter irreversible del proceso, véase ecuaciones 2.70 y 2.71, r crece en magnitud durante carga inelástica y no cambia en régimen elástico o de descarga. De esta forma es posible escribir:

$$r = r|_{t=t} = \max_{\chi \in [0, t]} \{r_0, \tau_\epsilon(\chi)\} \quad (2.72)$$

la cual representa una forma cerrada para evaluar r en términos de las propiedades del material (σ_y, E) y del estado de deformación actual $\boldsymbol{\epsilon}$ a través de la norma $\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\mathbf{C}^e} = \tau_\epsilon$.

Si se considera además que la regla de ablandamiento es conocida, luego todas las ecuaciones del modelo pueden evaluarse.

2.5.2. Tensor Constitutivo Incremental

En este apartado, se pretende encontrar la expresión de un operador constitutivo tangente \mathbf{C} tal que la relación tensión deformación (en tasas) pueda expresarse como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{d}(r) \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.73)$$

En el caso de descarga elástica (o carga neutra), no hay evolución de la variable de daño, con lo cual $\dot{d} = 0$, obteniéndose en consecuencia:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{C} = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e \quad (2.75)$$

Cuando se activan los mecanismos disipativos, las variables internas del modelo evolucionan ($\dot{r} = \gamma > 0 \Rightarrow \dot{d} \neq 0$) y, como se demostró en la sección previa, esto implica $r = \tau_\epsilon$, luego podemos escribir:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_\epsilon = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}}{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\tau_\epsilon} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.76)$$

Teniendo en cuenta la definición de la variable de daño en términos de r y $q(r)$, ecuación 2.56, es fácil demostrar que:

$$\dot{d} = \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \frac{q(r)}{r} \right] = - \left[\frac{\dot{q}(r) r - q(r) \dot{r}}{r^2} \right] = \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^2} \right] \dot{r} \quad (2.77)$$

Reemplazando 2.76 y 2.77 en 2.73 y operando algebraicamente se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1 - d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^2} \right] \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tau_\varepsilon} \overbrace{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}^{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \\ &= \left\{ (1 - d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (2.78)$$

de donde deducimos que el tensor constitutivo incremental para daño y en régimen de carga inelástica viene dado por:

$$\mathbf{C}^d = (1 - d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r) r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.79)$$

La expresión general del operador tangente, considerando los dos comportamientos mecánicos posibles, puede formularse de la siguiente manera:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^d & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga inelástica}) \end{cases} \quad (2.80)$$

2.6. Modelo de daño sólo tracción

Muchos materiales de importancia tecnológica, tales como hormigones y morteros cementicios en general, tienen un comportamiento bien diferenciado ante esfuerzos de compresión o tracción. Se introduce ahora una ley fenomenológica de daño continuo, basado en el modelo descrito anteriormente, donde la evolución de mecanismos disipativos ($\dot{r} > 0$) se permite sólo para tensiones de tracción [OCOL]. Esto se logra definiendo la *contraparte positiva* $\boldsymbol{\sigma}^\oplus$ del tensor de tensiones mediante una simple modificación en la descomposición espectral del mismo:

$$\boldsymbol{\sigma}^\oplus = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (2.81)$$

en donde σ_i y \mathbf{p}_i representan los valores propios y autovectores del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ respectivamente. El símbolo $\langle \bullet \rangle$ es conocido como operador de Macaulay:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{\| \bullet \| + \bullet}{2} \quad (2.82)$$

Podemos entonces definir una función de daño alternativa de la forma:

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{\sigma}^\oplus, q)^\oplus &= \tau_{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}^\oplus - q \leq 0 \\
&= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^\oplus : \mathbf{C}^{e^{-1}} \boldsymbol{\sigma}^\oplus} - q \leq 0 \\
&= (1-d) \sqrt{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}} - q \leq 0 \\
&= \sqrt{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}} - r \leq 0 \\
&= \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus - r \leq 0
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Nótese, una vez más, que el criterio de degradación puede formularse en tensiones totales o efectivas. Razonando de igual forma que en los apartados anteriores, en régimen inelástico de carga se debe verificar $r = \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus$, además considerando que $\mathbf{C}^{e^{-1}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} = \boldsymbol{\varepsilon}$ es posible escribir:

$$\dot{r} = \dot{\tau}_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus = \frac{\partial \tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}{\tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.84}$$

Observación 2 para deducir la ecuación previa se toma en cuenta que $\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon})$ es una función homogénea de grado uno (esto implica que $\chi \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\chi \boldsymbol{\varepsilon})$; $\forall \chi > 0$) con lo cual, según el teorema de Euler, se puede expresar:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.85}$$

Reemplazando 2.84 y 2.77 en la forma incremental 2.73 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1-d(r)) \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^2} \right] \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tau_{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}}^\oplus} \overbrace{\mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}}^{\overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus}} \\
&= \left\{ (1-d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \right\} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

luego el operador tangente para el modelo de daño sólo tracción y para $\dot{d} \neq 0$ se define mediante:

$$\mathbf{C}^d = (1-d(r)) \mathbf{C}^e - \left[\frac{q(r) - H(r)r}{r^3} \right] \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \otimes \overline{\boldsymbol{\sigma}^\oplus} \tag{2.87}$$

Como antes, la situación general considerando carga inelástica o descarga elástica se expresa como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica o carga neutra}) \\ \mathbf{C}^d & \text{si } \gamma > 0 \quad (\text{carga inelástica}) \end{cases} \tag{2.88}$$

Observación 3 a diferencia del modelo de plasticidad J_2 y de la ley de daño escalar isotrópica de las secciones 2.4 y 2.5 respectivamente, en este caso particular el tensor constitutivo tangente resulta no simétrico.

2.7. Análisis de bifurcación discontinua

El estudio de bifurcación discontinua (sección 2.3) busca las restricciones en el estado local de tensión compatibles con la presencia de saltos en el campo (tasa) de deformaciones, resultando una estrategia rigurosa para detectar el inicio y dirección de propagación de discontinuidades en el sólido. En el contexto de los modelos discretos cohesivos, este análisis puede considerarse como un criterio viable para introducir en forma consistente una cinemática con modos mejorados de deformación. Seguidamente, particularizamos el problema para los modelos constitutivos presentados en las secciones 2.4-2.6.

A partir de la ecuación 2.32 se había establecido que una condición necesaria para la aparición de bifurcación en un punto material $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$, muy próximo a \mathcal{S} , es la singularidad del tensor de localización \mathbf{Q} , considerado como una función del vector unitario \mathbf{n} normal a la superficie de discontinuidad y el módulo de ablandamiento H :

$$\det(\mathbf{Q}(\mathbf{n}, H)) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(H) \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.89)$$

Observación 4 *nótese que el planteo se realiza sin especificar en que parte del dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$ se formulan las ecuaciones (Ω^+ ó Ω^-). La situación crítica corresponde al caso carga inelástica-carga inelástica a ambos lados de \mathcal{S} , luego se tiene: $\mathbf{C}_{\Omega^+} = \mathbf{C}_{\Omega^-} = \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, véase sección 2.3.*

Para operar sobre 2.89, consideremos una expresión generalizada del operador constitutivo incremental, como por ejemplo:

$$\mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(H) = \vartheta \mathbf{C}^e - \frac{1}{\xi(H)} \mathbf{P} \otimes \mathbf{R} \quad (2.90)$$

que, como es sencillo de demostrar, incluye las leyes materiales de plasticidad y daño discutidas si se definen en forma adecuada los parámetros escalares ϑ y $\xi(H)$ y los tensores \mathbf{P} y \mathbf{R} , véase la parte superior del cuadro 2.1.

En vista de la ecuación 2.90 el tensor \mathbf{Q} puede escribirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{n}, H) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \\ &= \vartheta \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\xi(H)} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \otimes \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \vartheta \mathbf{Q}^e - \frac{1}{\xi(H)} (\mathbf{p}_n \otimes \mathbf{r}_n) \end{aligned} \quad (2.91)$$

en donde se han definido los vectores $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$, $\mathbf{r}_n = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{Q}^e como el tensor de localización elástico. Dado que \mathbf{Q}^e es simétrico e invertible, la expresión 2.91 puede reformularse de una manera más conveniente:

$$\mathbf{Q} = \vartheta \mathbf{Q}^e [\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}}) \otimes \mathbf{r}_n] \quad (2.92)$$

Aplicando el operador determinante a 2.92 e igualando a cero, llegamos a la siguiente condición:

$$\det(\mathbf{Q}) = \underbrace{\vartheta^{ndim}}_{>0} \underbrace{\det(\mathbf{Q}^e)}_{>0} \det(\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \otimes \mathbf{r}_n) = 0 \quad (2.93)$$

La única posibilidad para que se satisfaga 2.93 es que:

$$\det(\mathbb{I} - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \otimes \mathbf{r}_n) = 1 - \xi(H)^{-1} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n = 0 \quad (2.94)$$

donde debe notarse que por propiedad de la función $\det(\bullet)$ se tiene: $\det(\mathbb{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $\forall \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{ndim}$. Deducimos entonces que el coeficiente $\xi(H)$ debe ser igual a:

$$\xi(H) = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n \quad (2.95)$$

permitiéndonos obtener una expresión analítica de la función $\hat{H}(\mathbf{n})$, representando los valores admisibles del módulo de ablandamiento H que hacen singular el tensor de localización \mathbf{Q} :

- para plasticidad:

$$\xi(H) = \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} + H \quad (\text{véase cuadro 2.1}) \quad (2.96)$$

$$\hat{H}(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n - \mathbf{M} : \mathbf{C}^e : \mathbf{M} \quad (2.97)$$

- para daño:

$$\xi(H) = \frac{r^3}{q - Hr} \quad (\text{véase cuadro 2.1}) \quad (2.98)$$

$$\hat{H}(\mathbf{n}) = \frac{q}{r} \left[1 - \frac{r^2}{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot \mathbf{r}_n} \right] \quad (2.99)$$

2.7.1. Módulo de ablandamiento crítico y ángulo de bifurcación

Asumamos que $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$ (ver ecuaciones 2.97 ó 2.99) representa el conjunto de todas las posibles magnitudes del módulo de ablandamiento que satisfacen la singularidad de \mathbf{Q} o equivalentemente la nulidad de la expresión 2.94, para direcciones unitarias $\hat{\mathbf{n}}$ normales a \mathcal{S} . El problema que se plantea entonces es encontrar un valor particular de $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$, denominado H^{crit} , definido como el máximo de $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$ respecto a variaciones en su argumento $\hat{\mathbf{n}}$. De esta forma se asegura que para $H > H^{crit}$ el material permanece en régimen estable (sin bifurcación). En consecuencia, el módulo crítico de ablandamiento por deformación para un instante dado $t \in [0, T]$ y un punto arbitrario \mathbf{x} surge de un proceso de maximización, que matemáticamente se plantea de la forma:

$$H^{crit} = \max_{\hat{H} \in \mathcal{J}} \{ \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \} \quad \text{sujeto a} \quad \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1 \quad (2.100)$$

siendo \mathcal{J} el conjunto de valores admisibles para $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}})$:

$$\mathcal{J} = \{\hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \in \mathbb{R}; \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \text{ satisface la ecuación 2.97 ó 2.99} \wedge \|\hat{\mathbf{n}}\| = 1\} \quad (2.101)$$

La orientación de la trayectoria de discontinuidad \mathbf{n}^{crit} , compatible con H^{crit} , viene dada por la expresión:

$$\mathbf{n}^{crit} = \arg_{\|\hat{\mathbf{n}}\|=1} \left[\underset{\hat{H} \in \mathcal{J}}{\text{máx}} \{ \hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) \} \right] \quad (2.102)$$

es decir: $\mathbf{n}^{crit} = \hat{\mathbf{n}}$ tal que $\hat{H}(\hat{\mathbf{n}}) = H^{crit}$ y $\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1$

Definición 4 *el instante de tiempo en el cual se verifica por primera vez la condición $H = H^{crit}$ para un punto material arbitrario \mathbf{x} , se denomina tiempo de bifurcación $t_B \in [0, T]$. A partir de dicho instante, el campo tasa de deformaciones puede resultar discontinuo en \mathbf{x} ; matemáticamente: $[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]]_{(\mathbf{x}, t \geq t_B)} \neq \mathbf{0}$.*

En la descripción del fenómeno de falla mediante la aproximación por discontinuidades fuertes embebidas que se postula en esta tesis, el hecho de evaluar las condiciones de bifurcación material representa un ingrediente clave de la formulación dado que, como se verá en el capítulo 3, al verificarse la condición $t \geq t_B$ se incorpora una cinemática con saltos en desplazamientos y, por ende, el modelo constitutivo debe regularizarse de tal manera que el estado tensional resulte acotado aun para medidas singulares de deformación. Por este motivo debemos ser capaces de resolver correctamente 2.100.

Este problema de maximización con restricciones (2.100) fue extensamente estudiado en los últimos años y puede ser resuelto por distintos procedimientos clásicos [WS87]. En Ottosen & Runesson [OR91], por ejemplo, se proponen soluciones analíticas para 3D utilizando multiplicadores de Lagrange. En Ortiz et al. [OLN87], se postula una estrategia numérica de maximización local. No obstante, en problemas grandes, y especialmente en casos 3D, estos métodos pueden resultar costosos desde el punto de vista computacional.

Por tal motivo, adoptamos una forma alternativa equivalente de solución basada en una interpretación gráfica de las condiciones de bifurcación material. Esta estrategia representa una generalización del trabajo de William [Wil00], permitiendo la obtención de fórmulas cerradas y simples de evaluar para una amplia gama de modelos constitutivos, véase [OH04]. Nos limitamos aquí a reescribir las expresiones finales que se obtienen tras aplicar dicho procedimiento, sin pretender el desarrollo del mismo. Para mayor detalle en cuanto a sus fundamentos teóricos se recomienda consultar [OH04] y [Cha03]. Como se verá más adelante estos resultados son de utilidad para el planteamiento de los algoritmos de trazado de discontinuidades en el modelo discretizado por elementos finitos.

En este contexto de análisis, la dirección crítica \mathbf{n}^{crit} puede evaluarse en términos del ángulo θ^{crit} , de la forma:

$$\mathbf{n}^{crit} = \cos(\theta^{crit}) \mathbf{X}_1 + \sin(\theta^{crit}) \mathbf{X}_3 \quad (2.103)$$

Definición 5 *entendemos por ángulo crítico de bifurcación θ^{crit} a aquel que forma la normal \mathbf{n} con la primer dirección principal \mathbf{X}_1 de \mathbf{X} , véase cuadro 2.1.*

En el cuadro siguiente, se resumen las expresiones que permiten determinar H^{crit} y θ^{crit} para los modelos constitutivos en estudio.

	Plasticidad J_2	Daño estándar	Daño sólo tracción
ϑ	1	$(1 - d)$	
$\xi(H)$	$M : C^e : M + H$	$\left[\frac{r^3}{q - H r} \right]$	
P	$C^e : M$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\sigma}^\oplus$
R	$M : C^e$	$\bar{\sigma}$	
X	$signo(C^e : M) \sqrt{C^e : M \cdot M : C^e}$	$signo(\bar{\sigma}) \sqrt{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}$	$signo(\bar{\sigma}^\oplus) \sqrt{\bar{\sigma}^\oplus \cdot \bar{\sigma}^\oplus}$
X_i	$\underbrace{\{X_1 \geq X_2 \geq X_3\}}_{\text{autovalores de } X}$		
X_i	$\underbrace{\{X_1; X_2; X_3\}}_{\text{autovectores de } X}$		
H^{crit}	$Z^{crit} + \frac{\nu}{E} (X_1 + X_2 + X_3)^2 - \frac{1+\nu}{E} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$	$(1 - d) - \frac{r^2}{Z^{crit}}$	
Z^{crit}	$\frac{1+\nu}{E} [(1 - \nu) (X_1 + X_3)^2 - 2 X_1 X_3]$	$\frac{1+\nu}{(1-d)E} [(1 - \nu) (X_1 + X_3)^2 - 2 X_1 X_3]$	
$\tan^2(\theta^{crit})$	$0 \leq -\frac{X_3 - [\nu/(1-\nu)] X_1}{X_1 - [\nu/(1-\nu)] X_3}$		

Cuadro 2.1: Expresiones analíticas cerradas para determinar el módulo de ablandamiento crítico (H^{crit}) y el ángulo de bifurcación (θ^{crit}) en los modelos de plasticidad y daño utilizados.

Capítulo 3

Aproximación por discontinuidades fuertes del continuo

Es un hecho bien aceptado que la falla en materiales se describe como la acumulación gradual de procesos disipativos en zonas localizadas los cuales pueden, eventualmente, generar mecanismos macroscópicos observables en forma de superficies de discontinuidad en el medio [BP98]. Dependiendo del contexto, estas interfaces reciben diversos nombres: fisuras, fracturas, bandas de corte o de deslizamiento. Teniendo en cuenta tal evidencia física, la formulación de modelos que consideren discontinuidades en el campo de desplazamiento parece una elección natural.

Por otro lado, y desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos locales, se ha visto que el fenómeno de localización se asocia con la existencia de una región en donde el campo tasa de deformaciones se torna discontinuo (discontinuidad débil). Debido a la ausencia de una longitud interna característica, y como caso límite, la banda de localización colapsa en una superficie originando un salto en desplazamientos. Nuevamente, aproximaciones que introduzcan discontinuidades fuertes surgen como adecuadas para representar este fenómeno singular.

3.1. Introducción

En el trabajo de Simo et al. [SOA93] se mostró que bajo ciertas circunstancias, un modelo discreto cohesivo puede interpretarse como la situación límite de un modelo continuo, al considerar la localización de deformaciones mediante la incorporación de discontinuidades fuertes. En ese último caso, para que las ecuaciones de gobierno conserven consistencia física y matemática, el inverso del módulo de ablandamiento debe considerarse en un sentido distribucional. Una consecuencia de esta aproximación es que la disipación mecánica, que en los modelos clásicos de continuo es proporcional al volumen, no es nula aun cuando se desarrolla en una zona de medida nula (superficie de falla). El proceso disipativo que tiene lugar en la interface puede caracterizarse en términos de propiedades del material, como por ejemplo la energía de fractura G_f .

Siguiendo tal filosofía, en Oliver [Oli00] se demostró además que, en régimen de discontinuidad fuerte, la ecuación constitutiva del continuo (tensión-deformación) origina, natural y consistentemente, una ley discreta (tracción-salto) proyectada en la interface.

Estas ideas marcaron un enfoque alternativo y viable para resolver el problema de falla, postulando que es posible obtener una ecuación que gobierne la evolución en la zona de progreso de fractura combinando una cinemática singular con un modelo constitutivo del continuo. De esta forma se evita tener que seleccionar una ley cohesiva independiente del material no degradado, y por ende algo arbitraria si se quiere, para controlar la apertura de la discontinuidad.

La metodología descrita anteriormente representa el modelo conceptual que hemos adoptado en parte importante de la presente disertación, y se la denomina *Aproximación por Discontinuidades Fuertes del Continuo* (*Continuum Strong Discontinuity Approach CSDA*), dado que puede formularse íntegramente en formato clásico de medios continuos, tanto desde el punto de vista de la descripción cinemática como del comportamiento constitutivo material.

El objetivo que se busca en este apartado es discutir los aspectos más importantes en los que se basa la *CSDA*. No se pretende un desarrollo meticuloso de cada tópico particular, sino simplemente disponer de un fundamento conceptual para la correcta interpretación de los resultados finales. De otra forma la redacción del capítulo se extendería innecesariamente en detalles que ya son bien conocidos y aceptados en el contexto de la mecánica de falla, y que además pueden consultarse en las referencias propuestas.

El contenido del capítulo se organiza como sigue: en la sección 3.2 se discute el modelo conceptual de *CSDA* (cinemática, ecuaciones de gobierno y regularización constitutiva), enfatizando las principales diferencias con los esquemas discretos clásicos. Aspectos puntuales de implementación se tratan en la sección 3.3, donde se presenta además una interpretación del modelo numérico. Finalmente en el apartado 3.4 investigamos las restricciones que se deben satisfacer tras incorporar una descripción cinemática basada en modos mejorados de deformación en el formato clásico de modelos constitutivos del continuo. Dicho estudio se denomina análisis de discontinuidad fuerte, y está especialmente direccionado a leyes de daño escalar.

3.2. Modelo conceptual de la *CSDA*

La idea básica subyacente en el modelo conceptual de la *CSDA* postula que todo punto \boldsymbol{x} del sólido en estudio, incluyendo aquellos ubicados sobre una superficie \mathcal{S} en la cual se verifican discontinuidades en desplazamientos, se considera “*un punto material*” en el sentido que sobre el mismo es posible medir variables cinemáticas y establecer el comportamiento constitutivo en términos de una ley de tipo tensión-deformación clásica. Para dar formalismo a esta visión particular del problema se requiere la incorporación de ciertas hipótesis e ingredientes básicos, a saber: (i) adopción de la mecánica de medios continuos como contexto teórico de base, (ii) descripción cinemática consistente con la presencia discontinuidades fuertes, dotada además de una generalización para contemplar magnitudes singulares en el campo de deformaciones, (iii) *re-definición* del módulo de ablandamiento como una función generalizada, ésta es precisamente la regularización a nivel constitutivo introducida en la formulación y que garantiza magnitudes acotadas de tensión en \mathcal{S} ($\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$) aun para medidas singulares de deformación, manteniendo de esa forma la buena postura matemática del problema. En esta sección detallamos estos tópicos distintivos de la formulación.

3.2.1. Descripción cinemática con discontinuidades fuertes

La CSDA hace uso de una cinemática discontinua con saltos en desplazamientos definida en el formato estándar de medios continuos, considerando que el tensor de deformaciones (infinitesimal) se computa como el gradiente simétrico generalizado (en el sentido de derivada generalizada) del campo de desplazamientos. Esto implica que el espacio admisible de las deformaciones debe incorporar funciones de distribución.

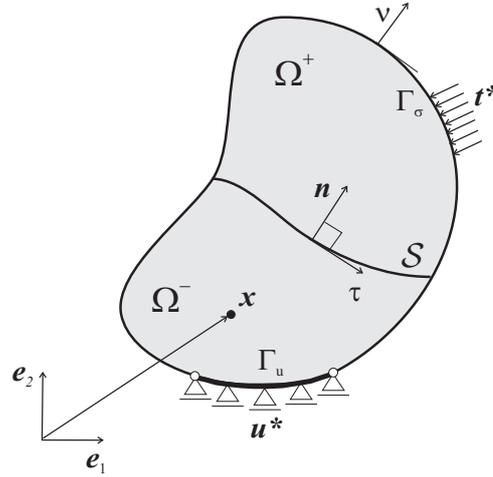


Figura 3.1: Definición del problema mecánico exhibiendo discontinuidades fuertes.

Considérese para ello un problema mecánico (cuasi estático), el cual puede describirse utilizando la siguiente nomenclatura (ver figura 3.1): Ω es la (ya definida) configuración de referencia, $\mathcal{S} \subset \Omega$ es una superficie material (superficie de discontinuidad) con normal \mathbf{n} a través de la cual pueden presentarse saltos en el campo de velocidades $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ (para ser consistentes con la nomenclatura introducida en el capítulo 2 denotamos $[[\dot{\mathbf{u}}]] \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}}$), Γ es la frontera de Ω que se divide en dos conjuntos Γ_u y Γ_σ donde se prescriben las condiciones de contorno esenciales y naturales tal que: $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ y $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$, siendo $\boldsymbol{\nu}$ el vector unitario (exterior) normal a Γ . Además se definen los subdominios Ω^+ y Ω^- como las regiones de $\Omega \setminus \mathcal{S}$ apuntadas por los versores \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$ respectivamente.

Las ecuaciones (en tasas) consistentes con una cinemática discontinua en desplazamientos, a través de la línea material \mathcal{S} , pueden plantearse como sigue, véase también figura 3.2:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}} \quad (3.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{regular}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}: \text{singular}} \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ y $\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ son las funciones escalón y Delta de Dirac colocadas en \mathcal{S} respectivamente, tal que:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad \wedge \quad \nabla \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (3.3)$$

además los campos tasa de desplazamiento regular $\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$ y salto $\dot{\beta}(\mathbf{x}, t)$:

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (3.4)$$

$$\dot{\beta}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{ndim} \quad (3.5)$$

se asumen continuos (al menos funciones del tipo C^0) sobre Ω , en consecuencia $\bar{\varepsilon}$, en la ecuación 3.2, a lo sumo puede presentar discontinuidades acotadas. Por otro lado, una vez activa la discontinuidad fuerte, la componente no acotada de la deformación (ε_δ) adquiere un carácter distribucional (singular).

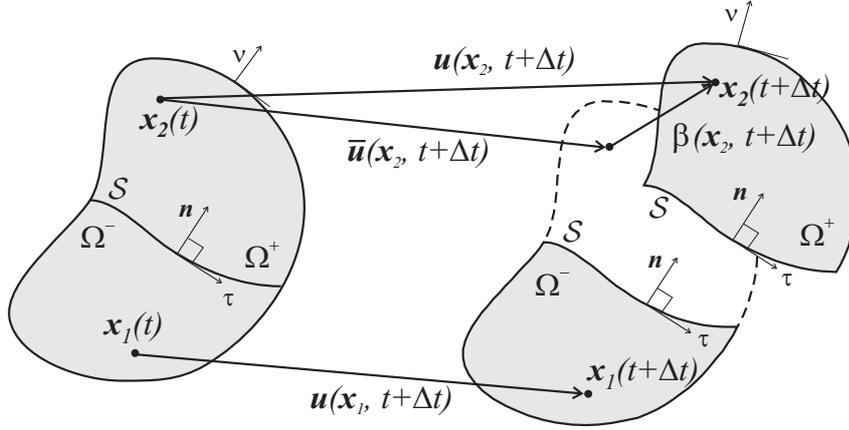


Figura 3.2: Descripción cinemática compatible con discontinuidades en el campo de desplazamientos al tiempo $t + \Delta t$. Configuración inicial y final.

3.2.2. Ecuaciones de gobierno

La forma fuerte del problema de valores de contorno (en tasas) para modelos cohesivos con saltos en desplazamientos, y en el contexto de la *CSDA*, puede formularse como sigue:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (\text{condición de contorno cinemática}) \quad (3.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad (\text{condición de contorno mecánica}) \quad (3.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{r}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{relación constitutiva}) \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{compatibilidad cinemática}) \quad (3.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{S} \quad (\text{continuidad externa de tracciones}) \quad (3.11)$$

$$\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (\text{continuidad interna de tracciones}) \quad (3.12)$$

donde el vector \mathbf{b} representa un campo de fuerzas por unidad de masa, ρ es la densidad material, \mathfrak{R} simboliza alguna ley constitutiva que define el estado tensional $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ en función del campo tasa de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y variables internas \dot{r} . Considérese además a \mathcal{T} como el vector de tracciones en la interfaz, es decir: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}|_{(\mathbf{x} \in \mathcal{S})}$. Recordamos que

$(\bullet)_{\Omega^+}$, $(\bullet)_{\Omega^-}$ y $(\bullet)_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$, son magnitudes evaluadas en Ω^+ , Ω^- y $\Omega \setminus \mathcal{S}$ respectivamente, infinitamente próximas a \mathcal{S} .

A partir del conjunto de ecuaciones 3.6-3.12, se extraen algunas observaciones importantes:

- la expresión de equilibrio estándar (3.6) está formulada sólo en el dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}$ del material.
- el equilibrio a través de \mathcal{S} , regulado por la ecuación 3.11, se conoce también como restricción de *continuidad externa de tracciones*.
- como característica principal de la aproximación por discontinuidades fuertes utilizada, debe destacarse que tanto la función constitutiva $\mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{r})$ (fórmula 3.9) como la ecuación de compatibilidad cinemática (3.10), son válidas en todo el dominio de análisis Ω , incluyendo por ende la superficie de discontinuidad \mathcal{S} .
- el hecho de adoptar un *modelo cohesivo* implica la existencia de fuerzas de interacción en la interface. Surge la necesidad entonces de formular una ecuación que asegure el equilibrio entre las tracciones en la discontinuidad y su entorno, ver expresión 3.12. Esta restricción de equilibrio se la reconoce con el nombre de ecuación de *continuidad interna de tracciones*. A diferencia de los modelos discretos clásicos, la CSDA asume además que que tales fuerzas cohesivas se evalúan a partir de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$.

La ecuación 3.12 es de especial importancia en la formulación del modelo en estudio. La misma asegura el carácter acotado del tensor (tasa) de tensión en la superficie de fallo ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$), pudiéndose deducir luego las condiciones matemáticas que hacen compatible un modelo constitutivo de continuo con la inclusión de discontinuidades fuertes. Para demostrar que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ es acotado se sigue el siguiente razonamiento. En primer lugar debe notarse que, como la tasa de deformación en el dominio regular $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ es acotada, véase ecuación 3.2, el modelo constitutivo 3.9 necesariamente retornará tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ acotadas. Según 3.12, el vector tasa de tracción en la discontinuidad $\dot{\boldsymbol{T}}$ también debe ser acotado. Utilizando el concepto de descomposición espectral, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ puede plantearse:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{i=3} \dot{\sigma}_{\mathcal{S}i} (\mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i) \quad (3.13)$$

donde $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}i}$ son los autovalores de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ y \mathbf{p}_i los correspondientes vectores propios. A partir de 3.12 y 3.13 se tiene además:

$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}}_{\text{acotado}} = \dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\sigma}_{\mathcal{S}1} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_1 + \dot{\sigma}_{\mathcal{S}2} (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_2 + \dot{\sigma}_{\mathcal{S}3} (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_3 \quad (3.14)$$

La dirección de falla \mathbf{n} es dependiente del modelo constitutivo utilizado. La ecuación 3.14 sin embargo es válida para cualquier ley material ya que representa una condición de equilibrio entre puntos ubicados en \mathcal{S} y su proximidad. El análisis ha plantearse entonces como si \mathbf{n} fuese arbitrario ($\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0$). Luego, para que 3.14 conserve consistencia

matemática, cada valor propio $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}i}$ debe permanecer acotado, así como $\dot{\sigma}_{\mathcal{S}}$, en vista de 3.13.

Por extensión directa $\sigma_{\mathcal{S}}$ y las variables internas *como tensión* valuadas en \mathcal{S} ($\dot{q}_{\mathcal{S}}, q_{\mathcal{S}}$), conservan este carácter regular.

3.2.3. Regularización del modelo constitutivo

Se ha demostrado que, por condiciones de equilibrio, todas las magnitudes de tipo tensión necesariamente deben ser acotadas. El problema se focaliza ahora en establecer una adecuada *regularización* del modelo constitutivo para satisfacer esta última condición y que al mismo tiempo resulte compatible con la descripción cinemática (3.1-3.2), admitiendo deformaciones singulares en la discontinuidad. Considérese para ello una ecuación general de evolución para las variables internas de un modelo arbitrario, como por ejemplo:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} = H(r) \dot{r}_{\mathcal{S}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (3.15)$$

donde q y r representan magnitudes de tipo tensión y deformación respectivamente, siendo H el módulo de ablandamiento material. La ecuación 3.15 caracteriza una gran variedad de leyes constitutivas, entre éstas los tres modelos discutidos en el capítulo 2, ver secciones 2.4-2.6. En un estado de carga inelástica, podemos pensar que tales variables internas se evalúan de la forma:

$$\dot{q}_{\mathcal{S}} \approx \|\dot{\sigma}_{\mathcal{S}}\| \quad \rightarrow \quad \text{regular} \quad (3.16)$$

$$\dot{r}_{\mathcal{S}} \approx \|\dot{\epsilon}_{\mathcal{S}}\| \quad \rightarrow \quad \text{singular (según 3.2)} \quad (3.17)$$

Luego, para que 3.15 conserve consistencia matemática, el módulo de ablandamiento H debe poseer una estructura particular, tal que $1/H$ resulte una función generalizada sobre \mathcal{S} , es decir:

$$H(r) = \delta_{\mathcal{S}}^{-1} \bar{H} \quad (3.18)$$

$$H(r)^{-1} = \delta_{\mathcal{S}} \bar{H}^{-1} \quad (3.19)$$

donde $\bar{H} < 0$ (acotado) es el denominado *módulo de ablandamiento discreto o intrínseco*, el cual puede considerarse como una propiedad material ($\bar{H} = f(E, \sigma_y, G_f)$). La estimación de este nuevo parámetro se fundamenta en garantizar que la energía disipada durante el proceso de degradación y falla (G_f) sea aquella correspondiente al material en estudio [Oli6a].

A manera de resumen, en el cuadro 3.1 se esquematiza el modelo conceptual de *CSDA* presentado en esta sección. Se incluye además un diagrama similar correspondiente a un modelo cohesivo discreto clásico (cuadro 3.2), con el fin de enfatizar las diferencias.

Hipótesis 1:

Mecánica del Continuo estándar como marco teórico subyacente para todo el dominio de análisis Ω , incluyendo la interface de discontinuidad \mathcal{S} .

Hipótesis 2:

Adopción de una cinemática con discontinuidades fuertes:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{ regular}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}: \text{ regular}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}: \text{ singular}}$$

Descripción de la ecuación de equilibrio en \mathcal{S} :

Condición de continuidad de tracciones en la interface \mathcal{S} planteada en términos del tensor de tensiones valuado en \mathcal{S} ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$):

$$\dot{\mathcal{T}} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}}_{\dot{\boldsymbol{\sigma}}|_{(\mathbf{x} \in \mathcal{S})}} \cdot \mathbf{n} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}}_{\text{acotada}} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \text{ debe ser una magnitud acotada}$$

Consecuencia 1:

Regularización Constitutiva:

Para que $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}, \dot{r})$ sea una aplicación que retorne tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$ regulares, es necesario reinterpretar el módulo de ablandamiento en el siguiente sentido distribucional:

$$\underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{S}}}_{\approx \|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}\|} = H \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{S}}}_{\approx \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\delta}\|}$$

$$H = \delta_{\mathcal{S}}^{-1} \bar{H}$$

Consecuencia 2:

Ley discreta inducida:

El análisis de admisibilidad del estado de tensión-deformación en \mathcal{S} y el de un punto vecino en $\Omega \setminus \mathcal{S}$, determina una ley discreta proyectada de tipo:

$$\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \Sigma(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{\alpha})$$

compatible con el comportamiento constitutivo del continuo.
(ver análisis de discontinuidad, más adelante, sección 3.4.2)

Cuadro 3.1: Modelo conceptual de la Aproximación mediante Discontinuidades Fuertes del Continuo (*CSDA*).

<p>Hipótesis 1: Mecánica del Continuo estándar como marco teórico subyacente sólo para el dominio regular de análisis $\Omega \setminus \mathcal{S}$.</p>
<p>Hipótesis 2: Adopción de una cinemática con discontinuidades fuertes:</p> $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}}$ $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla \dot{\mathbf{u}})^{sym} = \underbrace{(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}})^{sym}}_{\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}: \text{regular}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\delta}: \text{no se considera}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\delta}: \text{no se considera}}$
<p>Descripción de la ecuación de equilibrio en \mathcal{S}: Condición de continuidad de tracciones en la interface \mathcal{S} planteada de la forma:</p> $\dot{\mathcal{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}$
<p>Consecuencia 1: Para evaluar el vector de tracción en \mathcal{S} (\mathcal{T}), se debe adicionar una ecuación cohesiva discreta del tipo: $\dot{\mathcal{T}} = \mathfrak{R}(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{r})$, independiente del comportamiento constitutivo del continuo.</p>

Cuadro 3.2: Modelo conceptual de la Aproximación mediante un Modelo Discreto Cohesivo Estándar.

A partir de lo expuesto, surgen algunos comentarios relevantes:

- la *CSDA* utiliza el contexto formal de la mecánica del continuo, para la descripción cinemática y constitutiva en todo el dominio de análisis Ω , incluido \mathcal{S} .
- la ecuación de continuidad de tracciones se plantea en forma diferenciada. En un modelo cohesivo estándar la fuerza en la interface surge de una *ley constitutiva adicional* del tipo $\dot{\mathbf{T}} = \Sigma(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{r})$, mientras que en la *CSDA* dicha ley discreta se proyecta naturalmente sobre \mathcal{S} al verificarse un régimen de discontinuidad fuerte y a partir del modelo continuo (ver sección 3.4.2), con lo cual las fuerzas de interacción cohesivas en \mathcal{S} derivan de un campo tensional $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}}$.
- en ambos modelos la disipación de energía en la interface de discontinuidad resulta una magnitud objetiva con respecto a la direccionalidad y tamaño de los elementos.
- en la *CSDA* se introduce el concepto de *regularización constitutiva*. Esto conlleva a una reinterpretación del módulo de ablandamiento en un sentido distribucional. De esta forma se garantiza la compatibilidad entre el modelo continuo y la cinemática singular.

3.3. Aspectos de implementación de la *CSDA*

3.3.1. Cinemática regularizada

La aparición de términos singulares en la cinemática discutida en la sección 3.2.1, puede adaptarse convenientemente para que su tratamiento algorítmico resulte posible. En este sentido se incorpora a la formulación un factor de penalidad $h(t)$ [OCM97], el cual permite definir una versión regularizada de la distribución Delta en términos de la función de colocación $\mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$:

$$\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h(t)} \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) ; \text{ siendo } \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}^h \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}^h \end{cases} \quad (3.20)$$

donde $\mathcal{S}^h \supset \mathcal{S}$ representa una banda en la cual pueden originarse discontinuidades en el campo de deformaciones (discontinuidad débil), de *espesor aparente* $h(t)$, limitada por las curvas \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- próximas a \mathcal{S} (ver figura 3.3).

Teniendo en cuenta (3.20), las expresiones (3.1-3.2) pueden ahora describirse de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{continuo}} + \underbrace{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{discontinuo}} \quad (3.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{(\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^{sym} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\nabla \dot{\boldsymbol{\beta}})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}: \text{regular}} + \underbrace{\mu_{\mathcal{S}} \frac{1}{h(t)} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^{sym}}_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}: \text{singular si } h \rightarrow 0} \quad (3.22)$$

Observación 5 para $h(t) \rightarrow 0$ las ecuaciones 3.21-3.22 colapsan en 3.1-3.2, recuperándose la cinemática estándar singular de discontinuidades fuertes.

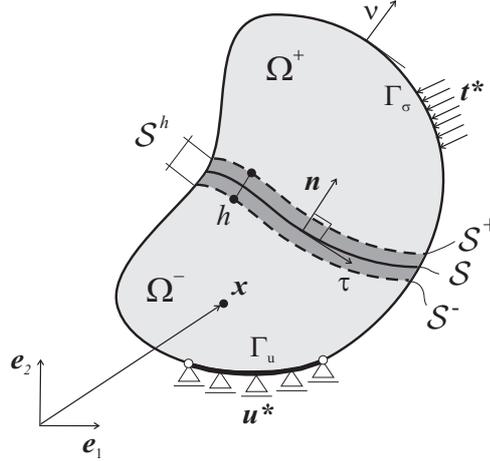


Figura 3.3: Descripción de la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada.

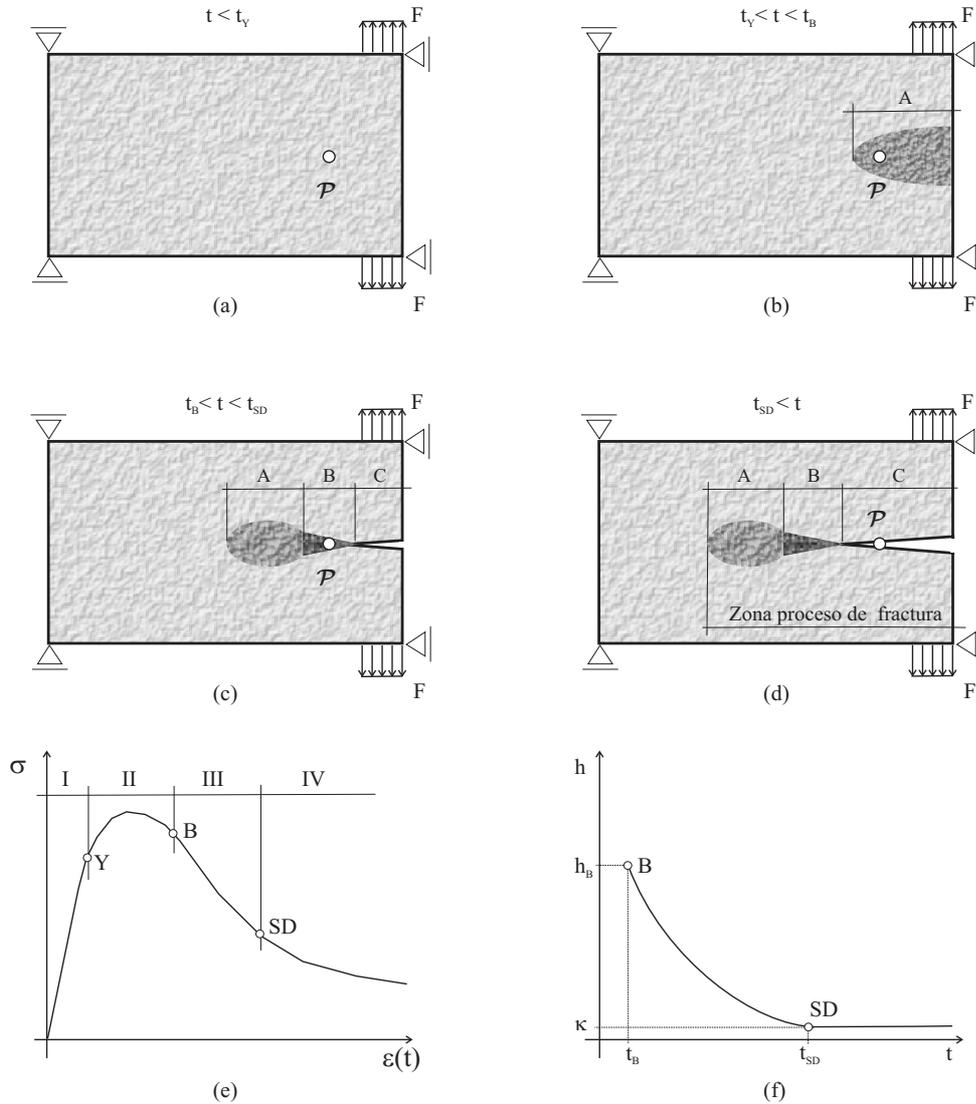
3.3.2. Interpretación de la cinemática suavizada

La cinemática descrita por las ecuaciones (3.21-3.22), regularizada mediante el parámetro de penalidad $h(t) \neq 0$, incorpora en la formulación el concepto de una *aparente* discontinuidad débil ([Oli98, OCM99]). El salto $\dot{\beta}$ puede interpretarse entonces como la diferencia entre en el campo (tasa) de desplazamiento entre \mathcal{S}^+ y \mathcal{S}^- (figura 3.3). En estas circunstancias la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$ es discontinua pero permanece acotada.

Nótese que, si bien numéricamente asumimos que $h(t)$ puede ser no nulo, este coeficiente se introduce sólo a efectos algorítmicos y *no se refiere a una longitud característica* introducida en el modelo conceptual de la *CSDA*. En rigor, no existe espesor de banda de localización, ya que la misma se modela mediante la introducción de una interface de falla \mathcal{S} , por tal motivo la utilización del término *aparente discontinuidad débil*. Esta aproximación es lícita siempre y cuando h resulte suficientemente pequeño comparado con las dimensiones globales de la estructura (\mathcal{S}^h despreciable frente a Ω), lo cual generalmente se satisface.

En este contexto, el modelo numérico propuesto permite introducir una interpretación algorítmica del mecanismo completo de generación de fisuras en un medio inicialmente continuo. Para ello analizamos la evolución temporal del estado de tensión en un punto material \mathcal{P} (figura 3.4-(e)). Una primera etapa (fase I) corresponde, como es usual, a un comportamiento elástico válido en el intervalo $t < t_Y$, definiendo t_Y como el tiempo en el cual se sobrepasa el límite elástico material (ver también figura 3.4-(a)). A medida que progresa el estado de carga, se desarrollan procesos inelásticos irreversibles (daño, plasticidad) pero estables desde el punto de vista constitutivo (fase II en la figura 3.4-(e), $t_Y < t < t_B$), con lo cual las variables cinemáticas aún conservan su suavidad; esta situación se corresponde también con la figura 3.4-(b). Inmediatamente superado el instante de bifurcación ($t_B < t$) el campo (tasa) de deformación se torna discontinuo, luego la cinemática alternativa propuesta en la ecuación 3.22 con $h(t) \neq 0 \wedge \dot{\beta} \neq 0$, resulta adecuada para representar el inicio de una (pseudo) discontinuidad débil en la historia de respuesta (fase III y figura 3.4-(c)). Conforme avanza el estado de sollicitación, $h(t)$ decrece gobernada por alguna ley de evolución como lo muestra la figura 3.4-(f), hasta alcanzar un valor nulo (por razones computacionales un valor muy pequeño $h = \kappa \rightarrow 0$)

al alcanzar el tiempo t_{SD} caracterizando el inicio de una cinemática de discontinuidades fuertes (fase IV, figura 3.4-(d)).



- A: régimen inelástico irreversible estable
- B: régimen de bifurcación discontinua (discontinuidad débil), $h > 0$
- C: régimen de discontinuidad fuerte, $h = \kappa \rightarrow 0$

Figura 3.4: Mecanismo de fallo inducido por la cinemática de discontinuidades fuertes regularizada: (a)-(d) Proceso de formación de fractura. (e) Curva tensión deformación del punto \mathcal{P} . (f) Variación del factor de penalidad $h(t)$ en función del tiempo.

Observación 6 adviértase que la cinemática enriquecida se incorpora al tiempo t_B (bifurcación material) con un factor $h \neq 0$ para imponer una discontinuidad acotada en el campo de deformaciones. Luego el mecanismo de transición del parámetro de penalidad se torna un ingrediente importante para poder alcanzar el régimen de discontinuidad fuerte en forma consistente, dado que generalmente $t_B < t_{SD}$.

3.4. Análisis de discontinuidad fuerte

Denominamos *Análisis de Discontinuidad Fuerte* al estudio de las condiciones que hacen compatible la introducción de una cinemática con discontinuidades en el campo de desplazamientos ($\dot{\beta} \neq 0$) en un modelo constitutivo de continuo (σ vs. ε). Para cada ley material, estas expresiones de consistencia son diferentes.

3.4.1. Condición de discontinuidad fuerte en daño

En este apartado investigamos las restricciones que se inducen en la relación tensión-deformación cuando la ley de daño continuo discutida en la sección 2.5 (y resumida por practicidad en el cuadro 3.3), se particulariza para un punto ubicado sobre la superficie de interface \mathcal{S} cuya cinemática contiene modos singulares de deformación, véase Oliver [Oli00].

Densidad de energía libre		
$\varphi(\varepsilon, r) = \frac{1}{2} (1 - d) (\varepsilon : C^e : \varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{q(r)}{r} (\lambda tr^2(\varepsilon) + 2\mu \varepsilon : \varepsilon)$	(3.23)	
Relación tensión-deformación		
$\sigma = \frac{\partial \varphi(\varepsilon, r)}{\partial \varepsilon} = \frac{q(r)}{r} C^e : \varepsilon = (1 - d(r)) \bar{\sigma} \quad ; \quad C^e = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2\mu \mathbb{I}$	(3.24)	
$\bar{\sigma} = C^e : \varepsilon$		(3.25)
$\dot{\sigma} = (1 - d(r)) C^e : \dot{\varepsilon} - \dot{d}(r) (C^e : \varepsilon)$		(3.26)
Criterio de degradación		
$\phi(\sigma, q) = \tau_\sigma - q \leq 0$		(3.27)
$\tau_\sigma = \sqrt{\sigma : (C^e)^{-1} : \sigma} = (1 - d(r)) \underbrace{\sqrt{\bar{\sigma} : C^{e-1} : \bar{\sigma}}}_{\sigma}$		(3.28)
Ley de endurecimiento/ablandamiento		
$\dot{r} = \gamma \quad ; \quad r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$		(3.29)
$\dot{q} = H(r) \dot{r} \quad ; \quad q_0 = q _{t=0} = r_0$		(3.30)
Condiciones complementarias de carga-descarga		
$\phi(\sigma, q) \leq 0 \quad ; \quad \gamma \geq 0 \quad ; \quad \gamma \phi(\sigma, q) = 0$		(3.31)

Cuadro 3.3: Ecuaciones básicas del modelo de daño escalar.

De acuerdo a la relación elástica 3.24, para un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ es posible escribir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}} = \underbrace{\frac{r_{\mathcal{S}}}{q_{\mathcal{S}}}}_{1/(1-d)} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} \quad (3.32)$$

Si se considera 3.32 y la cinemática (regularizada) 3.22, surge entonces una ecuación de consistencia que se traduce en la siguiente igualdad:

$$\frac{r_{\mathcal{S}}}{q_{\mathcal{S}}} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (3.33)$$

Premultiplicando por h ambos miembros en 3.33, y asumiendo que se desarrolla un régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$, $t \geq t_{SD}$), se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h r_{\mathcal{S}} \underbrace{\frac{1}{q_{\mathcal{S}}}}_{\text{acotado}} \underbrace{\mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}}_{\text{acotado}} \right] = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{=0} + \lim_{h \rightarrow 0} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad (3.34)$$

Dado que $\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}}$ y $q_{\mathcal{S}}$ deben ser términos acotados, para que la expresión 3.34 tenga sentido cuando $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, se ha de verificar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h r_{\mathcal{S}} \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{\beta} \neq 0 \quad (3.35)$$

Recordando que $r_{\mathcal{S}} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}}}$ (sección 2.5), luego 3.35 resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h r_{\mathcal{S}} &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sqrt{\left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right] : \mathbf{C}^e : \left[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right]} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}} = \Delta \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\Delta \bar{\alpha}$ simboliza una variable interna discreta (acotada), cuya regla de evolución es:

$$\dot{\bar{\alpha}} = h \dot{r}_{\mathcal{S}} \quad \forall t > t_B \quad (3.37)$$

$$\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}|_{t=t_B} = 0 \quad (3.38)$$

Según la ecuación 3.36, la igualdad 3.34 se describe convenientemente:

$$\frac{\Delta \bar{\alpha}}{q_{\mathcal{S}}} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{S}} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}, t > t_{SD}, h \rightarrow 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\Delta \bar{\alpha}}{q_{\mathcal{S}}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathcal{S}}^{ef} = (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}, t > t_{SD}, h \rightarrow 0 \quad (3.40)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_S^{ef} = \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon}$ es la deformación efectiva.

El sistema 3.39 (ó 3.40) se interpreta conceptualmente como una restricción que debe satisfacer el campo tensional $\boldsymbol{\sigma}_S$ (o bien el de deformaciones efectivas $\boldsymbol{\varepsilon}_S^{ef}$) para que el modelo continuo resulte compatible con una descripción cinemática caracterizada por la presencia de saltos en desplazamientos, y por este motivo se lo conoce con el nombre de *Ecuaciones de Discontinuidad Fuerte*. El instante en el cual se verifica dicha condición se denomina t_{SD} .

Observación 7 en este estado de avance, podemos remarcar un punto importante. Nótese que, según la redefinición del módulo de ablandamiento $H = \delta_S^{-1} \bar{H}$ y la incorporación (sólo por cuestiones numéricas) de la secuencia regularizada $\delta_S = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$, se puede escribir:

$$H = \lim_{h \rightarrow 0} h \bar{H} \quad (3.41)$$

Reemplazando 3.41 en la ley de evolución para las variables internas, ecuación 3.30, y considerando la igualdad 3.36, llegamos a formular:

$$\dot{q}_S = \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \dot{r}_S}_{\Delta \dot{\alpha} : \text{regular}} \bar{H} = \underbrace{\bar{H} \Delta \dot{\alpha}}_{\text{regular}} \quad (3.42)$$

Este hecho le da consistencia a la versión algorítmica del modelo de CSDA¹, en el sentido que la magnitud \dot{q}_S nuevamente resulta acotada.

3.4.2. Modelo constitutivo discreto (tracción-salto) inducido

Estamos interesados en descubrir la estructura que posee la relación constitutiva de continuo, una vez activos los modos discontinuos en un punto material sobre la superficie de falla, [Oli00, OH04]. El estado tensional $\boldsymbol{\sigma}_S$ compatible con este mecanismo cinemático singular se obtiene de considerar el caso límite cuando $h \rightarrow 0$. En vista de 3.39 se puede plantear:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \quad (3.43)$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &= \frac{q_S}{\Delta \alpha} \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3.44)$$

¹La consistencia del *modelo conceptual de CSDA* se ha demostrado en la sección 3.2.3

Por simplicidad, introducimos una nueva magnitud $\omega \in (-\infty, 1]$, denominada variable discreta de daño, $\omega = 1 - \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}}$, y la expresión 3.44 se escribe:

$$\mathcal{T} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (3.45)$$

Adviértase que la ecuación 3.45 representa una ley constitutiva discreta relacionando el vector salto de desplazamientos con la fuerza cohesiva en la interface ($\mathcal{T} = \Sigma(\boldsymbol{\beta}, \omega)$). También debe notarse que $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ induce necesariamente un valor no nulo y acotado de \mathcal{T} , dado que: (i) q_S y $\Delta\bar{\alpha}$ como ya se mencionó, son magnitudes regulares y no nulas para $t > t_{SD}$, (ii) el tensor de localización elástico \mathbf{Q}^e es, por definición, no singular y en consecuencia $\mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} \neq 0$, a menos que $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

En función de 3.43 y 3.44, la norma de tensiones dada por la ecuación 3.28, se expresa ahora mediante:

$$\begin{aligned} \tau_\sigma &= \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_S : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}_S} \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ &= \left\{ \left[\frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \right]^2 (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} : \mathbf{C}^e : (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^{sym} \right\}^{1/2} \\ &= \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot \mathbf{Q}^{e-1} : \mathcal{T}} = \tau_{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

con lo cual el criterio de daño puede describirse en la interface \mathcal{S} :

$$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) = \tau_{\mathcal{T}} - q_S \leq 0 \quad (3.47)$$

Finalmente, al considerar 3.37, definimos el parámetro de consistencia de daño γ_S :

$$\dot{r}_S = \gamma_S = \frac{\bar{\gamma}}{h} = \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{h} \quad (3.48)$$

haciendo posible formular las condiciones de carga-descarga en su versión discreta:

$$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) \leq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \phi_S(\mathcal{T}, q_S) = 0 \quad (3.49)$$

En síntesis, se ha demostrado que el modelo de daño continuo (cuadro 3.3) induce consistentemente sobre la discontinuidad, y en régimen de discontinuidad fuerte, uno de tipo discreto cohesivo, ver cuadro 3.4.

Relación tracción-salto	
$\mathcal{T} = \frac{q_S}{\Delta \bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta}$	(3.50)
Criterio de degradación discreto	
$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) = \tau_{\mathcal{T}} - q_S$	(3.51)
$\tau_{\mathcal{T}} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T}}$	(3.52)
Ley de endurecimiento/ablandamiento discreta	
$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\gamma} \quad ; \quad \alpha_0 = \alpha _{t=t_B} = 0$	(3.53)
$\dot{q}_S = \bar{H} \dot{\bar{\alpha}} \quad ; \quad q_0 = q _{t=t_B}$	(3.54)
Condiciones complementarias de carga-descarga, en formato discreto	
$\phi_S(\mathcal{T}, q_S) \leq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \bar{\gamma} \phi_S(\mathcal{T}, q_S) = 0$	(3.55)

Cuadro 3.4: Ecuaciones básicas del modelo de daño proyectado sobre la interface \mathcal{S} .

Al momento de la implementación numérica surgen dos opciones posibles:

- una implementación continua de 3.50-3.55 ($\boldsymbol{\sigma}$ vs. $\boldsymbol{\varepsilon}$). Este es el procedimiento que sigue la aproximación *Continua de Discontinuidades Fuertes (CSDA)* [OHPC02]. La ley discreta cohesiva se impone implícitamente a medida que el factor de penalidad h decrece ($h \rightarrow 0$, $h \rightarrow k \approx 0$ para propósitos de simulación) y las medidas de deformación se tornan singulares. En consecuencia, no es necesario deducir el modelo proyectado, el cual dependiendo del caso pudiera resultar difícil de obtener. Simplemente basta con utilizar la ley constitutiva de continuo que gobierna el comportamiento del material estable, ya que la misma degenera en forma natural a una de tipo tracción-salto (\mathcal{T} vs. $\boldsymbol{\beta}$) sobre \mathcal{S} . El único requerimiento es el uso de una cinemática suavizada adecuada, como por ejemplo la descrita en 3.21-3.22, e introducir el concepto de regularización del módulo de ablandamiento ($H = \lim_{h \rightarrow 0} h \bar{H}$)
- una implementación discreta, basada en la sustitución del modelo 3.50-3.55 (\mathcal{T} vs. $\boldsymbol{\beta}$), o bien otro independiente (con ello nos referimos a que no necesariamente sea inducido por el modelo continuo), en el término $\boldsymbol{\sigma}_S$ de la ecuación de continuidad interna de tracciones 3.12. Esta es la metodología seguida por la aproximación *Discreta Clásica de Discontinuidades Fuertes*.

Observación 8 *el correspondiente análisis de discontinuidad fuerte en el contexto de modelos constitutivos de plasticidad se trata en el capítulo 6.*