# Trabajo Práctico 3

## Introducción al Cálculo Tensorial y sus Aplicaciones en la Mecánica del Continuo

Septiembre de 2004

1. La vorticidad $\omega$ de un campo de velocidades $\mathbf{v}$ esta definido como $\omega = \text{curl } \mathbf{v}$

   (a) Mostrar que
   $$\text{curl } \mathbf{a} = \frac{D\omega}{Dt} - \omega \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \omega \text{ div } \mathbf{v},$$
   donde
   $$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

   (b) Deducir la ecuación de Beltrami
   $$\frac{D(\rho^{-1}\omega)}{Dt} = \rho^{-1}\omega \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \rho^{-1}\text{curl } \mathbf{a}.$$

   (c) Por definición, $p = p(\rho)$ es un fluido barotrópico. Por lo tanto se puede escribir $\rho^{-1}\nabla p = \int \rho^{-1} dp$ (asumir que esto es cierto). Mostrar que en un fluido barotrópico invíscido sometido a fuerzas de volumen conservativas es
   $$\frac{D(\rho^{-1}\omega)}{Dt} = \rho^{-1}\omega \cdot \text{grad } \mathbf{v}.$$

2. Probar que existe una única función real $\phi$ tal que $\mathbf{w} = \nabla\phi$ sii $\nabla \times \mathbf{w} = 0$.

3. Usar el teoerma de Helmholtz para mostrar que las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell
   $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$
   implican que hay potenciales vectores y escalares $\Phi$ y $\mathbf{A}$ tal que
   $$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$