Mecánica del Continuo
Guía de Trabajos Prácticos Nro. 2
Vectores y Tensores Cartesianos

1. Una partícula esta restringida a moverse en una curva helicoidal circular como la de la figura (1) cuyo radio es a y paso h, con velocidad (magnitud) v. ¿Cual es la aceleración de la partícula **P**. Expresar los vectores velocidad y aceleración en función de los vectores unitarios $\underline{\mathbf{t}}$, $\underline{\mathbf{n}}$ y $\underline{\mathbf{b}}$ que son, tangente, normal y binormal a la curva en P, respectivamente.

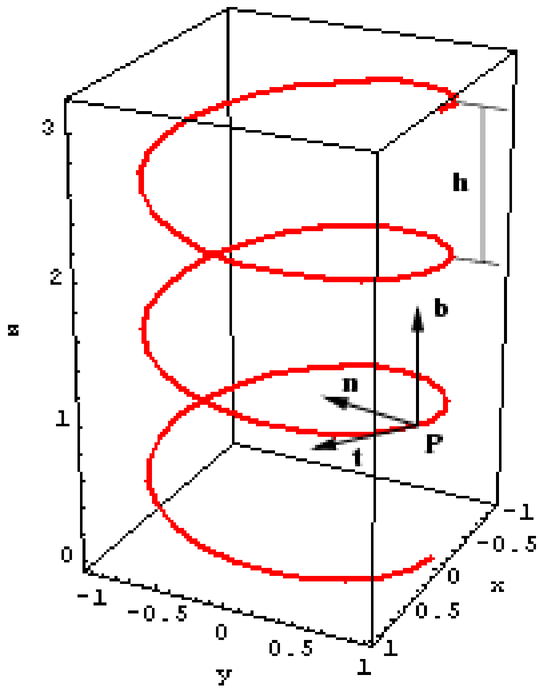

Figura 1: curva espiral

2. Probar que

   i) $\delta_{ii} = 3$,
   ii) $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$,
   iii) $e_{ijk}e_{jkl} = 6$,
   iv) $e_{ijk}A_jA_k = 0$,
   v) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ij}$,
   vi) $\delta_{ij}e_{ijk} = 0$.

3. Probar la siguiente identidad usando elementos de geometría

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{1}$$

4. Probar el ejercicio anterior usando notación indicial.

5. Probar que si $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ y $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ son dos tensores de orden r, la ecuación

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(x_1, x_2, ..., x_n) = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2}$$

es una ecuación tensorial; y por ello *si es válida en un sistema de cordenadas cartesianas lo es en cualquier sistema de cordenadas cartesianas*.

6. Probar usando notación indicial que la *contracción* de dos índices cualesquiera de un tensor cartesiano de orden n es un tensor cartesiano de orden $n-2$.

7. Probar (usando notación indicial) que si A_{ij} es un tensor de rango 2, A_{ii} es un escalar.

8. Siendo $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{s}}$, $\underline{\mathbf{t}}$ vectores, usar notación indicial para probar:

   i) $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} = -\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}}$,
   ii) $(\underline{\mathbf{s}} \times \underline{\mathbf{t}}) \cdot (\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}}) = (\underline{\mathbf{s}} \cdot \underline{\mathbf{u}})(\underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) - (\underline{\mathbf{s}} \cdot \underline{\mathbf{v}})(\underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{u}})$
   iii) $\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{v}}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}}) - \Delta \underline{\mathbf{v}}$

9. Sea $\underline{\mathbf{r}}$ un radio vector y r su magnitud. Probar usando notación indicial (siendo n un número entero):

   i) $\nabla \cdot (r^n \underline{\mathbf{r}}) = (n+3)r^n$,
   ii) $\nabla \times (r^n \underline{\mathbf{r}}) = 0$,
   iii) $\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.

10. Usando notación indicial probar las siguientes identidades ($\phi(x_1, x_2, ..., x_n)$: función escalar; $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ y $\underline{\mathbf{c}}$: vectores)

    i) $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{a}}) = 0$,
    ii) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$,
    iii) $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \Delta \phi$,
    iv) $\nabla \cdot (\phi \underline{\mathbf{a}}) = \nabla \phi \cdot \underline{\mathbf{a}} + \phi \nabla \cdot \underline{\mathbf{a}}$,
    v) $\nabla \times (\phi \underline{\mathbf{a}}) = \nabla \phi \times \underline{\mathbf{a}} + \phi(\nabla \times \underline{\mathbf{a}})$,
    vi) $\nabla \cdot (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) = \underline{\mathbf{b}} \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{a}}) - \underline{\mathbf{a}} \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{b}})$,
    vii) $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}} = (\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{b}} - (\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{c}})\underline{\mathbf{a}}$,
    viii) $\nabla \times (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) = (\nabla \cdot \underline{\mathbf{b}})\underline{\mathbf{a}} - (\nabla \cdot \underline{\mathbf{a}})\underline{\mathbf{b}} + (\underline{\mathbf{b}} \cdot \nabla)\underline{\mathbf{a}} - (\underline{\mathbf{a}} \cdot \nabla)\underline{\mathbf{b}}$,
    ix) $\underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) = \underline{\mathbf{b}} \cdot (\underline{\mathbf{c}} \times \underline{\mathbf{a}}) = \underline{\mathbf{c}} \cdot (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})$,
    x) $\underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}}) = 0$.

11. Hacer el ejercicio (2.34) del libro de Y. C. FUNG.