

## ANÁLISE DE META-HEURÍSTICAS PARA O PROBLEMA DE PARADA ÓTIMA: UMA APLICAÇÃO EM FINANÇAS

### META-HEURISTIC ANALYSIS FOR THE OPTIMAL STOP PROBLEM: AN APPLICATION IN FINANCE

Igor Michel S. Leite<sup>a</sup> e Leonardo G. da Fonseca<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, Brazil, igor.leite@ice.ufjf.br*

<sup>b</sup>*Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora/MG, Brazil, leonardo.goliatt@engenharia.ufjf.br*

**Palavras-chave:** Meta-Heurística, Precificação de Opções, problemas de parada ótima, otimização estocástica, simulação de Monte Carlo.

**Resumo.** Este trabalho analisa a eficiência dos principais meta-algoritmos de otimização para o problema de parada ótima de uma opção financeira. Os experimentos repetiram os parâmetros financeiros para problemas com *benchmark* conhecidos na literatura. A comparação entre os algoritmos testados ocorreu com base no *Root Mean Square Error* (RMSE), Análise de Variância (ANOVA) e Teste Tukey *Tukey Significant Difference* (TSD). Os resultados apontam a superioridade do algoritmo Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation (CMA-ES). Porém, verificou-se que o RMSE aumenta conforme a diferença nos valores iniciais também aumenta, estando em consonância com resultados empíricos descritos na literatura.

**Keywords:** Meta-Heuristic, pricing options, optimal stopping problems, stochastic optimization, Monte Carlo simulation.

**Abstract.** This paper analyzes the efficiency of the main optimization meta-algorithms for the optimal stop problem of a financial option. The experiments repeated the financial parameters for benchmark problems known in the literature. The comparison between the tested algorithms was based on Root Mean Square Error (RMSE), Variance Analysis (ANOVA) and Tukey Significant Difference Test (TSD). The results show the superiority to the algorithm Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation (CMA-ES). However, it was found that the RMSE increases as the difference in initial values also increases, being in line with the empirical results described in the literature.

## 1 INTRODUÇÃO

Um problema de parada ótima (ou problema de fronteira livre) consiste em identificar um conjunto de decisões ótimas para que um agente escolha entre parar uma determinada atividade ou continuar com a execução até um momento posterior. Assim, tal conjunto deve conter os parâmetros de decisão pertinentes para o agente, informando-o se o retorno obtido no instante atual é superior ao retorno esperado futuro: (i) caso positivo encerra sua decisão e realiza o ganho, (ii) caso negativo ele aguarda a chegada de novas informações para decidir no futuro.

Wilmott (2007) comenta que este tipo problema é diretamente aplicado em finanças para o caso de avaliação de opções financeiras. Opções são instrumentos financeiros largamente utilizados nas negociações diárias nos mercados financeiros, sua aplicabilidade advém da característica análoga ao seguro/garantia. Sendo úteis na mitigação de incertezas através do seu efeito filtrante e auxiliando na tomada de decisão gerencial (Detemple, 2005).

As opções são largamente estudadas por gigantes do ramo financeiro, servindo como um termômetro do mercado e um viés direcionador para as expectativas dos investidores, além de alertar para as possibilidades de instabilidade no mercado. Como exemplo: Wang (2018) explica o recorde em negociações de opções ocorrida em 2018 demonstrando o interesse dos agentes por este tipo de instrumento, enquanto Roschnotti e Vasquez (2019) aponta o que o elevado volume de negociações para opções de compra para o cobre pode sugerir um problema no fornecimento desta commodity, assim o mesmo alerta para as consequências desastrosas na má gestão do risco relacionados ao produto.

Dada a importância desde instrumento e a inexistência de soluções analíticas para a grande maioria dos casos estudados, muitos trabalhos na literatura tentam melhorar a acurácia e capacidade de generalização das metodologias de precificação em opções financeiras, como por exemplo Zhao e Yang (2018) e Ballestra (2018). Contudo, tais metodologias possuem limitações matemáticas em relação ao número dimensões, modelo estocástico adotado, etc.

Devido a estas limitações a Inteligência Computacional (IC) tem atraído o interesse de pesquisadores em função de sua eficiência, robustez e simplicidade, como pode ser visto em Malpica e Frías (2019). Concomitantemente a Computação Evolucionista (CE) pode ser combinada com a simulação de Monte Carlo (SMC) criando um novo ramo de pesquisa que não possui as limitações canônicas dos modelos tradicionais (Brabazon et al., 2012).

Partindo da combinação de CE + SMC Mather et al. (2017), Thulasiram et al. (2016) utilizam complexas técnicas multi-objetivo com aplicações do *Firefly algorithm* e do *Particle Swarm Optimization* (PSO), respectivamente, com o objetivo de precificar opções financeiras. Todavia, formas mais simples e eficientes para resolver o mesmo problema são descritos em Powell (2013) e Pacheco e Vellasco (2009), mas pouco exploradas.

Assim, este trabalho enriquece a literatura ao adotar a metodologia apresentada em Powell (2013) e Pacheco e Vellasco (2009) conjuntamente com as 7 meta-heurísticas mais conhecidas da CE, comparando-as no problema de valorar uma opção financeira *benchmark*. Tal comparação é nova na literatura e comumente aplicada em outras áreas, exemplo Duarte et al. (2017). Ressalta-se que as características intrínsecas (restrições) desde tipo são consideradas, contrapondo a situação modelada por Powell (2013) que não considerou as restrições do problema em sua abordagem.

Este trabalho está organizado conforme: Seção 2 explica o problema de como precificar uma opção. Seção 3 explica a relação entre os algoritmos evolutivos e o processo de precificação. Seção 4 lista as meta-heurísticas utilizadas e apresenta os resultados encontrados. Seção 5 faz os comentários finais sobre os resultados obtidos.

## 2 O PROBLEMAS DA AVALIAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS

Segundo [Wilmott \(2007\)](#), uma opção financeira é um contrato de derivativo que fornece ao titular o direito, sem qualquer obrigação, de comprar (vender) ativo subjacente (ex: ação) a um preço contratual (*strike*) por um período de tempo específico (maturidade). A pessoa que detém o direito de compra (venda) do contrato é chamado de *holder* e sua contraparte de *writer*, assim o *holder* detém o direito de exercer a opção (comprar ou vender o ativo pelo preço acordado), caso deseje, enquanto ao *writer* cabe apenas finalizar o contrato.

[Wilmott \(2007\)](#) classifica as opções em relação ao tipo: *call* (compra) ou *put* (venda), além de também categorizar em relação ao estilo: Europeu ou Americano. O estilo Europeu permite ao *holder* exercer a opção apenas na data de vencimento do contrato, enquanto o estilo Americano também inclui qualquer data anterior ao vencimento.

Ou seja, uma opção de compra do tipo Americana permite ao *holder* comprar o ativo pelo preço em contrato da data de início da negociação até a expiração. Assim, como a possibilidade de exercício pode ocorrer a qualquer momento é possível inferir que opções Americanas são mais valiosas que sua contraparte do tipo Europeia. A partir deste momento o uso do termo opção irá referir-se à uma opção de compra do tipo Americana, sendo este o foco deste trabalho, haja vista que estas são as mais negociadas e valiosas no mercado.

O objetivo da precificação de uma opção é encontrar o valor de um contrato ou lucro máximo obtido dada as 5 principais características: preço atual do ativo ( $V$ ), volatilidade do ativo ( $\sigma$ ), *strike* ( $K$ ), taxa livre de risco ( $r$ ), tempo para maturidade ( $T$ ). Sendo  $V, K, T, \sigma, r \in \mathbb{R}^+$ .

Como uma opção garante ao detentor o direito de comprar um ativo pelo preço  $K$  até a data  $T$  e sendo  $0 \leq t \leq T$ , o *holder* deve decidir pelo máximo entre comprar o ativo pelo preço  $K$  e vendê-lo imediatamente por  $V(t)$  ou aguardar o tempo  $t + 1$  comprar o ativo por  $K$  e vender por  $V(t + 1)$ , considerando que  $V$  é descrito por um processo estocástico markoviano.

Portanto, em detrimento ao mencionado anteriormente a necessidade de decisão entre a parada ou a continuidade uma opção Americana é caracterizada matematicamente como problema de parada ótima, onde a solução passa por identificar uma regra ótima de exercício ( $V^*$ ) ([Company et al., 2016](#)). Em outras palavras, é necessário identificar uma conjunto ótimo de decisões do tipo: caso  $V^*(t) < V(t)$  o *holder* comprar o ativo  $V^*(t) > V(t)$  o *holder* aguarda até  $t + 1$ .

A Fig. 2a exemplifica a regra de decisão, onde cenários de preços do ativo abaixo de  $V^*(t)$  (linha azul) o *holder* deve aguardar até um novo valor de  $V(t + 1)$  ser revelado e então decidir novamente. Caso o preço se eleve até valores superiores ao  $V^*$  o *holder* exerce a opção, finalizando o contrato.

Matematicamente o *holder* deve maximizar sua escolha entre comprar imediatamente ou aguardar, conforme Eq. (1).

$$O = \max(I, f) \quad (1)$$

$$I(V(t), t) = V(t) - K \quad (2)$$

$$f(V(t), t) = \mathbb{E}[I(V(t + 1), t + 1)] \cdot \exp(-r) \quad (3)$$

Onde  $I$  representa exercício imediato da opção dada pela Eq. (2),  $f$  o valor pela espera, Eq. (3),  $\mathbb{E}$  representa o operador esperança matemática e  $r$  a taxa de desconto.

Assim, pode-se entender  $V^*(t)$  como o limiar de indiferença entre exercer ou aguardar. Ou seja,  $V^*(t)$  é valor que torna as Eqs. (2) e (3) iguais. Como o processo de decisão permite

que o agente escolha de aguardar, até  $t < T$ , automaticamente uma um novo processo de escolha é gerado, requerendo a identificação dos valores  $V^*$  para todas oportunidades de exercício antecipado que maximizam o valor da opção.

Diversas técnicas computacionais tem sido desenvolvidas objetivando a resolução deste tipo de problema, haja vista que soluções analíticas são inviáveis ou sofrem com severas limitações. [Fernandes et al. \(2017\)](#) descreve as principais metodologias utilizadas na literatura, enquanto [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#) detalha os técnicas baseadas na SMC, além de reconhecer que a combinação de SMC + CE são as mais flexíveis ferramentas para este tipo de problema.

### 3 MODELAGEM DE UMA OPÇÃO AMERICANA PARA OTIMIZAÇÃO VIA CE

O fluxograma das etapas para a avaliação são expostas na Fig. 1 e mais detalhes podem ser encontrados em [Powell \(2013\)](#) ou [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#).

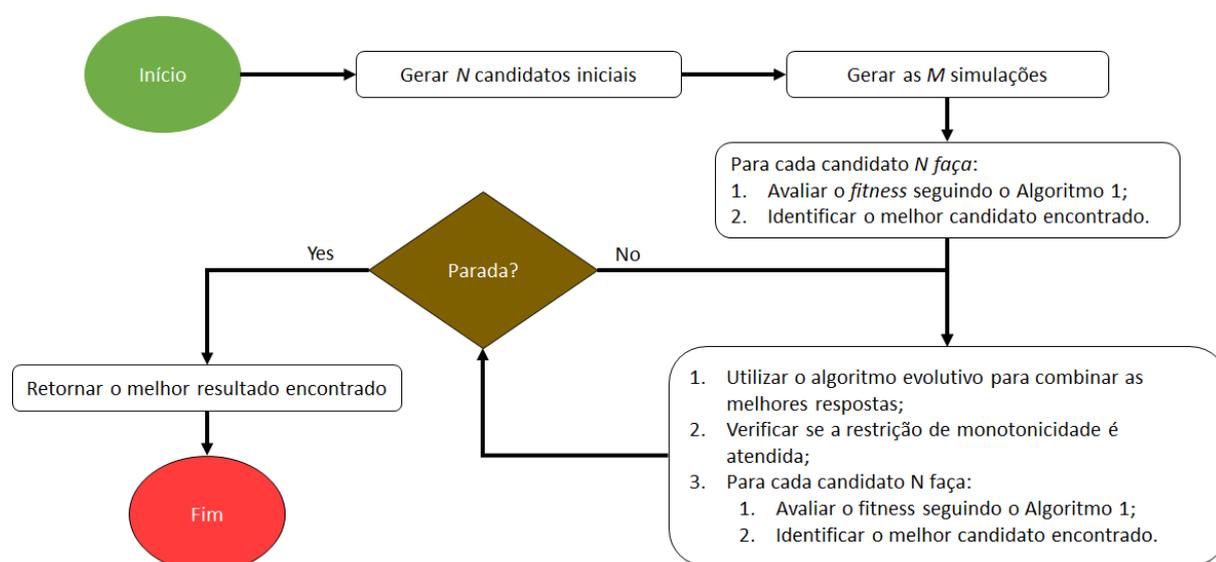


Figura 1: Fluxograma da avaliação.

Seja uma opção de compra Americana com vencimento em  $T$  discretizada em  $\tau + 1$  oportunidades de exercício (incluindo o ponto inicial) como  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_\tau = T$  igualmente espaçadas, resultando em  $\Delta t = T/\tau$ . A população de candidatos ao ótimo  $P \in \mathbb{R}_+^{N \times \tau + 1}$  é composta de  $N$  indivíduos e com  $\tau + 1$  posições fenotípicas, onde a representação  $p_{i,j}$  corresponde ao  $j$ -ésimo valor de  $V^*$  para  $t_j$  do  $i$ -ésimo candidato.

A Fig. 2b exemplifica um caso com  $T = 5$  e  $\tau = 5$ , onde  $p_{i,0}$  representa o primeiro ponto de decisão,  $p_{i,1}$  o segundo, respectivamente.

A única restrição relacionada ao problema é relacionada a monotonicidade dos parâmetros populacionais, para garantir a viabilidade da solução (ver Fig. 2a). Assim,  $p_{i,j+1} \leq p_{i,j}$ ,  $j = [0, 1, \dots, \tau - 1]$  e  $p_{i,\tau} = \max\{K, K \cdot r/\delta\}$ , conforme [Company et al. \(2016\)](#) e [Chockalingam e Muthuraman \(2015\)](#).

Em continuidade ao fluxograma da Fig. 1, para este trabalho as simulações dos preços  $V$  seguem um Movimento Geométrico Browniano (MGB), conforme Eq.(4), onde  $\delta$  representa a taxa de dividendos paga pelo ativo e  $dW$  segue um processo de Wiener descrito em [Wilmott \(2007\)](#).

$$dV = (r - \delta) \cdot V \cdot dt + \sigma \cdot V \cdot dW \quad (4)$$

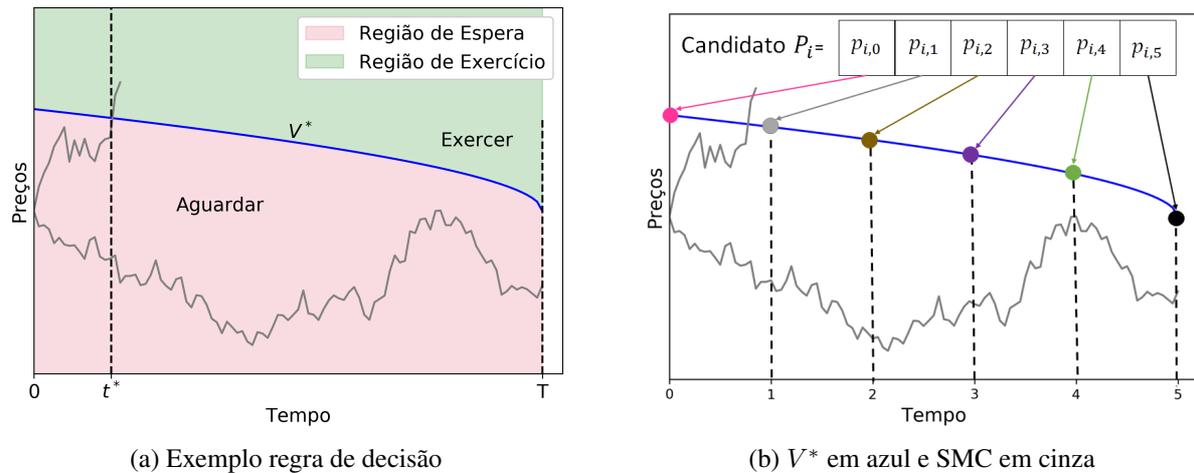


Figura 2: Exemplo da regra ótima de decisão \ Exemplo da relação parâmetros avaliativos e regra ótima de decisão

Seja  $V$  o conjunto de  $L$  caminhos de  $\tau + 1$  passos de um MGB, descrito na Eq.(4), com representação  $v_{l,j}$ : sendo  $v$  o valor do  $j$ -ésimo passo do MGB simulado para  $t_j$  do  $l$ -ésimo caminho. O pseudocódigo descrito no Algoritmo 1 representa a interação dos candidatos  $P$  com as simulações  $V$ .

---

**Algoritmo 1:** Função de avaliação do *fitness* - Call Americana

---

```

Data: Candidatos P, Simulações V
Result: Fitness
for  $i \leftarrow 0$  to  $N - 1$  do
  for  $ii \leftarrow 0$  to  $L - 1$  do
     $t = 0;$ 
    while  $p_{i,t} \geq v_{ii,t}$  or  $t \leq T$  do
       $t+ = \Delta t;$ 
    end
     $\text{fitness}[i]+ = \max [(v_{ii,t} - K) \cdot e^{-rt}, 0];$ 
  end
   $\text{fitness}[i] = \text{fitness}[i]/L;$ 
end

```

---

Posteriormente a avaliação dos candidatos iniciais ocorre a otimização com base no algoritmo selecionados, repetindo os passos de avaliação, identificação das melhores soluções e criação/modificação para novas populações.

**4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS**

Neste trabalho comparamos o desempenho dos principais algoritmos de otimização da literatura, que foram implementados sem modificações especiais que melhorassem suas características de exploração e intensificação dos resultados.

Os algoritmos comparados neste trabalho são: (i) *Genetic Algorithm* (GA) proposto por Holland (1973); (ii) *Particle Swarm Optimisation* (PSO) proposto por Eberhart e Kennedy (1995);

(iii) *Artificial Bee Colony* (ABC) proposto por [Karaboga \(2005\)](#); (iv) a *Differential Evolution* (DE) proposta por [Storn e Price \(1997\)](#); (v) *Improved Harmony Search* (IHS) proposto por [Mahdavi et al. \(2007\)](#); (vi) *Self-Adaptive Differential Evolution* (SADE) proposto por [Qin e Suganthan \(2005\)](#); (vii) *Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation* (CMA-ES) explicado em [Hansen et al. \(2003\)](#)

Tabela 1 contém os hiperparâmetros adotados para cada algoritmo evolutivo. Onde as siglas são: taxa de *Crossover* = CR, taxa de mutação = M, coeficiente diferencial = F, coeficiente de inércia =  $\omega$ , componente social =  $\alpha_1$ , componente cognitivo =  $\alpha_2$ , número de fonte de alimento artificial = SN, número de dimensões do problema = D, probabilidade de escolher da memória = PM, taxa de ajuste de passo mínimo = ppmin, taxa de ajuste de passo máximo = ppmax, taxa de aprendizado para o melhor elemento da matriz de covariância = c1, taxa de aprendizagem para a atualização rank-mu da matriz de covariância = cmu e tamanho inicial do passo = st.

Algoritmo	Hiper-parametrização
GA	CR = 0.95 (SBX), M = 0.05 (Uniforme), Seleção por Torneio.
PSO	$\omega = 0.72$ , $\alpha_1 = 2.05$ , $\alpha_2 = 2.05$
ABC	$limit = 0.5 \cdot SN \cdot D$
DE	CR = 0.95, F = 0.8, Variante = DE <i>best/1/exp</i>
IHS	PM = 0.95, ppmin = 0.35, ppmax = 0.99
SADE	Variante = <i>best/1/exp</i> , Variante Adaptativa = jDE
CMA-ES	c1 = 0.6, cmu = 0.6, st = 0.5

Tabela 1: Hiper-parametrização dos algoritmos testados

Para todos os algoritmos foram considerados uma população constante com 40 indivíduos, e 50 gerações evolucionárias, totalizando um máximo de 2000 avaliações da função objetivo.

Para o estudo aqui realizado, os algoritmos foram aplicados a seis problemas de precificação de opções financeiros. A parametrização do problema de precificação segue os valores apresentados em [Company et al. \(2016\)](#), onde:  $r = \delta = 0.03$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T = 0.5$ ,  $K = 100$ ,  $V(0) = [70, 80, 90, 100, 110, 120]$ . Além disso, foram utilizadas 50000 SMC e considerado  $\Delta t = 0.02$ .

#### 4.1 Análise de Performance

A Fig. 3 apresenta o *Root Mean Square Error* (RMSE) obtido após 100 repetições dos algoritmos. Adicionalmente utilizamos o teste da Análise de Variância (ANOVA) e Teste Tukey ou Tukey *Significant Difference* (TSD) para diferenciação dos algoritmos.

A Tabela 2 mostra o RMSE para as condições iniciais analisadas. Note que o algoritmo CMA-ES apresentou o menor RMSE em todos os casos analisados.

A comparação dos resultados utilizando o ANOVA ocorre na Tabela 3, considerando 95% de confiança, onde a representação do *p-value* indica a existência de diferenciação entre os algoritmos. Considerando o TSD para todos os casos analisados, verifica-se a distinção ocorre apenas entre CMA-ES e os demais algoritmos. Em outras palavras, com exceção do CMA-ES todos os outros algoritmos testados foram equivalentes.

A Fig. 3 exibe o *boxplot* para todos os casos analisados, ressaltando o mínimo erro obtido com o algoritmo CMA-ES ao longo das 100 repetições do experimento. Contudo, analisando a Fig. 3 e os valores da Tabela 2 é possível observar que o erro aumenta conforme o valor inicial aumenta.

	ABC	CMA-ES	DE	GA	IHS	PSO	SADE
$V(0) = 70$	0.0704	<b>0.0274</b>	0.0726	0.0763	0.07267	0.0758	0.0701
$V(0) = 80$	0.1718	<b>0.0543</b>	0.1612	0.1802	0.1618	0.1599	0.1639
$V(0) = 90$	0.2833	<b>0.0901</b>	0.2799	0.2989	0.2667	0.2912	0.3002
$V(0) = 100$	0.4208	<b>0.1611</b>	0.4271	0.4008	0.4239	0.3701	0.3991
$V(0) = 110$	0.4745	<b>0.1659</b>	0.4806	0.4691	0.5031	0.4869	0.4748
$V(0) = 120$	0.5281	<b>0.2474</b>	0.5452	0.5089	0.5087	0.5157	0.5557

Tabela 2: RMSE para diferente condições iniciais

	$V(0) = 70$	$V(0) = 80$	$V(0) = 90$	$V(0) = 100$	$V(0) = 110$	$V(0) = 120$
<i>p-value</i>	$4.3E - 20$	$5.1E - 35$	$1.1E - 44$	$1.9E - 32$	$5.9E - 34$	$4.3E - 32$

Tabela 3: Teste ANOVA para os erros em cada condição inicial testada

Estes resultados corroboram com as considerações apresentadas por [Fernandes et al. \(2017\)](#), onde o erro cresce conforme a expressão do *moneyness* =  $(V(0)/K - 1)$  também aumenta. Tal incremento no erro decorre do exercício prematuro da opção, haja vista que a probabilidade de exercício em datas anteriores a  $T$  é elevada, conforme pode ser observado na Fig. 4.

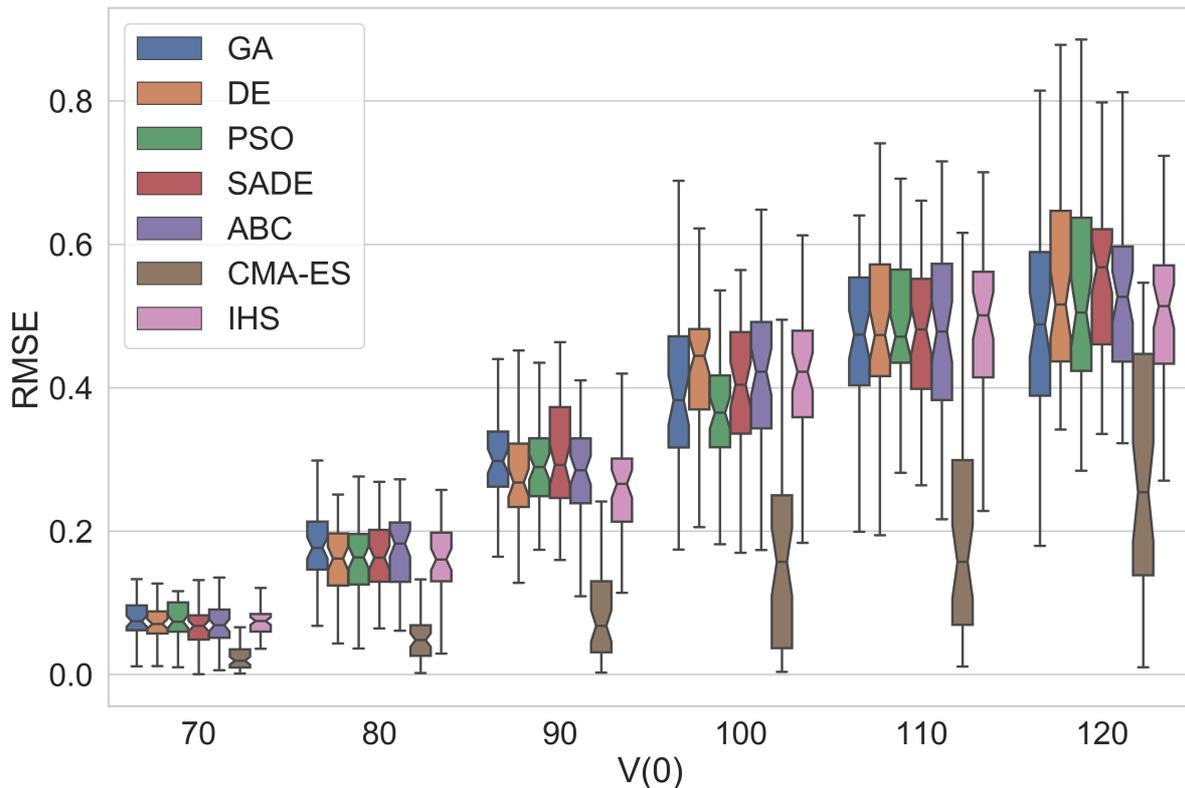


Figura 3: RMSE para diferentes condições iniciais

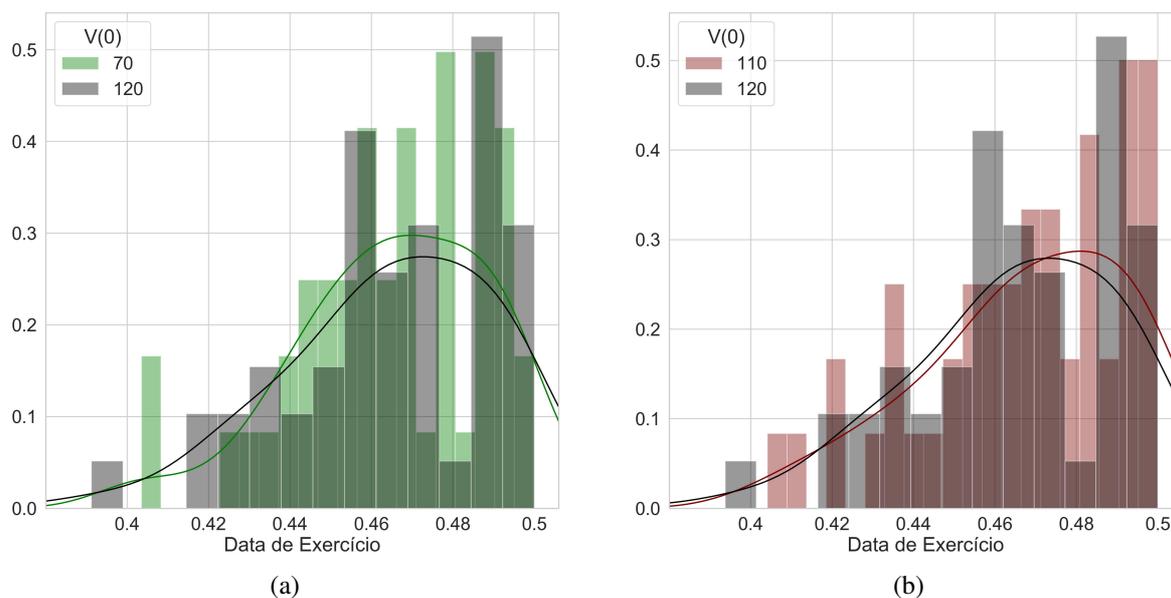


Figura 4: Distribuição exercícios para diferentes  $V(0)$

A Fig. 4 apresenta as datas médias de exercícios para as 100 repetições do experimento, sendo possível notar que a distribuição das datas de exercícios médios, para o caso de  $V(0) = 120$ , ocorre de forma antecipada quando comparado com o experimento de menor erro, caracterizando a necessidade do aumento no número de gerações para uma melhor otimização do conjunto de decisão, haja vista que comparando as Fig. 4a e Fig. 4b é notável a frequência das paradas em datas anteriores a data limite.

## 5 CONCLUSÕES

O difícil trabalho de precificar uma opção é grandemente reconhecido na literatura. Apesar de existirem diversos modelos reconhecidos, todos possuem alguma limitação que inviabiliza sua aplicação em determinados contextos, em especial situações com mais de uma variável estocástica ou com função de pagamento mais complexas, tornando as SMC + CE uma das poucas ferramentas adequadas nessas situações.

Assim, este trabalho avalia a performance de 7 algoritmos evolutivos baseados nos conceitos naturais e de evolução estratégica no intuito de identificar como os resultados se comportam ao utilizar diferentes meta-heurísticas para o problema de precificar uma opção. Analisando os resultados obtidos ao longo deste trabalho, percebe-se que a estratégia evolutiva utilizada no CMA-ES apresentou o menor RMSE em todos os cenários experimentados, demonstrando a eficácia deste tipo de aplicação em problemas de precificação de opções financeiras e consequentemente para problemas em Opções Reais.

Contudo, foi observado que o RMSE aumenta conforme a paridade  $V(0)/K - 1$  aumenta, indicando um incremento no número de exercícios antecipados. Tais resultados estão em consonância com as referências literárias e observações empíricas do mercado financeiro.

Ou seja, conforme a diferença entre o valor inicial e o *strike* cresce positivamente a chance do exercício antecipado também aumenta, fazendo com que algoritmo não tenha a oportunidade de melhor otimizar a regra de decisão. Para tanto sugere-se que cenários com mais gerações evolucionárias sejam considerados, buscando ampliar as oportunidades de otimização.

Como trabalhos futuros são sugeridos: (i) modificações específicas nas meta-heurísticas, tornando-os específicos para este tipo de problema. (ii) Análise no contexto de multidimensionalidade estocástica. (iii) Comparação com outros métodos baseados nos princípios da SMC.

## AGRADECIMIENTOS:

Os autores agradecem o apoio financeiro do Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, processo 429639/2016-3) e da Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG, processo APQ-00334-18).

## REFERÊNCIAS

- Ballestra L.V. [Fast and accurate calculation of American option prices](#). *Decisions in Economics and Finance*, 41(2):399–426, 2018. ISSN 1129-6569.
- Brabazon A., Dang J., Dempsey I., O’Neill M., e Edelman D. [Natural Computing in Finance - A Review, in Handbook of Natural Computing](#), capítulo 6, páginas 1707–1735. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-540-92910-9.
- Chockalingam A. e Muthuraman K. [An approximate moving boundary method for American option pricing](#). *European Journal of Operational Research*, 240(2):431–438, 2015. ISSN 0377-2217.
- Company R., Egorova V., e Jódar L. [Constructing positive reliable numerical solution for American call options: A new front-fixing approach](#). *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291:422–431, 2016. ISSN 0377-0427.
- Detemple J. *American-Style Derivatives: Valuation and Computation*, volume 1. Chapman and Hall/CRC, 1 edição, 2005. ISBN 158488567X.
- Duarte G.R., de Castro Lemonge A.C., e da Fonseca L.G. [An algorithm inspired by social spiders for truss optimisation problems](#). *Engineering Computations*, 34(8):pp. 2767–2792, 2017.
- Eberhart R. e Kennedy J. [A new optimizer using particle swarm theory](#). Em *MHS’95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, páginas 39–43. 1995. doi:10.1109/MHS.1995.494215.
- Fernandes G., Brandão L.E.T., e de Lamare Bastian Pinto C. [Feeder Cattle Options: Where’s the Beef?](#) *Latin American Business Review*, 18(3-4):317–339, 2017. doi:10.1080/10978526.2017.1400391.
- Hansen N., Müller S.D., e Koumoutsakos P. [Reducing the Time Complexity of the Derandomized Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation \(CMA-ES\)](#). *Evolutionary Computation*, 11(1):1–18, 2003. ISSN 1063-6560. doi:10.1162/106365603321828970.
- Holland J. [Genetic Algorithms and the Optimal Allocation of Trials](#). *SIAM Journal on Computing*, 2(2):88–105, 1973. doi:10.1137/0202009.
- Karaboga D. [An idea based on honey bee swarm for numerical optimization](#). Relatório Técnico, 2005. Erciyes University, Engineering Faculty, Kayseri, Turkiye.
- Mahdavi M., Fesanghary M., e Damangir E. [An improved harmony search algorithm for solving optimization problems](#). *Applied Mathematics and Computation*, 188(2):1567 – 1579, 2007. ISSN 0096-3003. doi:https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.033.
- Malpica A. e Frías P. [Valuation of an American Option for the Spanish Secondary Reserve Market Using a Machine Learning Model](#). *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(1):544–554, 2019. ISSN 0885-8950.
- Mather K., Thulasiraman P., Thulasiram R.K., e Dash S. [A parallel firefly meta-heuristics](#)

- algorithm for financial option pricing. Em *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, 27 Nov.- 1 Dec., Honolulu, HI, USA. 2017.
- Musshoff O. e Hirschauer N. *A survey of simulation-based methods for pricing complex American type options*. *Insurance Markets and Companies*, 1:16–31, 2010. ISSN 2616-3551.
- Pacheco M.A.C. e Vellasco M.M.B.R. *Intelligent Systems in Oil Field Development under Uncertainty*, volume 183 de *Studies in Computational Intelligence*. Springer, 1 edição, 2009. ISBN 978-3-540-93000-6.
- Powell S. *Pricing Early-Exercise Options Using Genetic Optimization*. *Journal of Derivatives*, 20:43–59, 2013. doi:10.3905/jod.2013.20.3.043.
- Qin K. e Suganthan P. *Self-adaptive differential evolution algorithm for numerical optimization*. volume 2, páginas 1785–1791. 2005. doi:10.1109/CEC.2005.1554904.
- Roschnotti M. e Vasquez J. *Biggest Trading in Copper Options Ever Signals Supply Troubles*. 2019. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2019-03-18/biggest-trading-in-copper-options-ever-signals-supply-troubles>, Acessado em: 2019-03-20.
- Storn R. e Price K. *Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces*. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359, 1997. ISSN 1573-2916. doi:10.1023/A:1008202821328.
- Thulasiram R.K., Thulasiraman P., Prasain H., e Jha G.K. *Nature-inspired soft computing for financial option pricing using high-performance analytics*. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 28(3):707–728, 2016.
- Wang L. *U.S. Options Volume Surged to Record in 2018*. 2018. URL: [www.bloomberg.com/news/articles/2018-12-29/u-s-options-volume-at-record-in-2018-as-volatility-rocks-stocks](http://www.bloomberg.com/news/articles/2018-12-29/u-s-options-volume-at-record-in-2018-as-volatility-rocks-stocks), Acessado em: 2019-02-10.
- Wilmott P. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 2 edição, 2007. ISBN 0470319585, 9780470319581.
- Zhao H.J. e Yang H. *Semismooth Newton methods with domain decomposition for American options*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 337:37–50, 2018. ISSN 0377-0427.