

IMPLEMENTACIÓN DE TEORÍAS DE CORTE TRANSVERSAL EN ELEMENTOS DE SÓLIDO-LÁMINA CON GRANDES DESPLAZAMIENTOS

Fernando G. Flores^a

^a*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

Palabras Clave: Elementos Finitos, Sólido-Lámina, Corte Transversal, Laminados compuestos

Resumen. El presente trabajo muestra una posible implementación de la teoría refinada de zigzag y la teoría de corte trigonométrica en elementos de sólido-lámina. La teoría refinada de zigzag permite tratar laminados en forma económica, adicionando sólo dos grados de libertad nodales, con muy buena precisión. Consiste en suponer que la variación de los desplazamientos en el espesor de la lámina tiene una forma zigzagueante impuesta en función de la rigidez al corte de cada lámina del laminado. Por su parte la teoría de corte trigonométrica supone una variación sinusoidal de la deformación de corte transversal. Se parte de dos elementos existentes, un hexaedro trilineal de ocho nudos (SH) y un prisma de base triangular de 6 nudos (SP), en los cuales se utiliza una versión modificada del tensor derecho de Cauchy-Green \bar{C} , donde 5 de las 6 componentes se interpolan a partir de valores calculados en el centro de las caras superior e inferior y la 6ta se calcula en el centro del elemento y se mejora con un grado de libertad adicional. A esa cinemática básica se le agrega un campo de desplazamiento adicional en el plano expresado en coordenadas locales (convectivas) con una interpolación en el plano lineal para el prisma y bilineal para el hexaedro. El objetivo es tener elementos sencillos y eficientes para el tratamiento de laminados con grandes desplazamientos, en régimen de pequeñas deformaciones inicialmente elásticas. Se utiliza la técnica de deformaciones impuestas para evitar el bloqueo por corte transversal y se realiza una integración numérica con un punto en el plano de la lámina y analítica en la dirección del espesor. Se presentan varios ejemplos que permiten comparar con soluciones analíticas (lineales) en placas, observar el comportamiento no-lineal con grandes desplazamientos en láminas de doble curvatura y frente a acciones dinámicas. Los resultados obtenidos muestran muy buena correlación con las referencias utilizadas.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo y uso de elementos de sólido-lámina ha crecido notablemente en los últimos diez años. En particular a partir de la utilización de técnicas de deformación impuesta mejorada (EAS por su acrónimo en inglés) sobre elementos con integración reducida en el plano de la lámina (elementos de 8 nudos). Los elementos desarrollados presentan ventajas importantes respecto a los elementos de lámina, ya que permiten utilizar relaciones constitutivas efectivamente tridimensionales, deshacerse de los grados de libertad rotacionales, considerar con mayor fidelidad detalles de geometrías y condiciones de contorno, tratar correctamente los efectos de contacto sobre las superficies externas, etc.. Por otro lado, dada su mayor generalidad geométrica, los elementos de sólido-lámina implican un mayor costo en la integración numérica en el espesor. Los elementos de sólido-lámina tienen un comportamiento similar a los elementos de lámina basados en la teoría de lámina con deformaciones de corte de primer orden (FSDT de su acrónimo en inglés) ya que naturalmente incluyen las deformaciones transversales de corte e imponen la condición de que se anule la tensión normal transversal en forma integral sobre el espesor en lugar de la condición de tensión plana en cada punto del espesor.

Para el análisis de laminados de materiales compuestos se recurre a diferentes aproximaciones en función de las características del laminado y la precisión requerida, ya sea en términos de desplazamientos o tensiones. Para el tratamiento de laminados con alto grado de heterogeneidad en el espesor la teoría clásica de placas laminadas (CLPT de su acrónimo en inglés) conduce a predicciones pobres. En forma similar la FSDT conduce a resultados inaceptables salvo que se usen coeficientes de corrección de la rigidez transversal del corte para incluir el efecto de la heterogeneidad transversal. Las teorías de alto orden (HOT de su acrónimo en inglés), mejoran el comportamiento de la FSDT pero su capacidad predictiva no es confiable.

Un análisis con elementos de sólido tridimensional se impone como la técnica adecuada para el tratamiento de materiales compuestos, pero esto se puede volver prohibitivamente costoso debido a que la cantidad de capas del laminado puede ser mayor a 100. En tales casos es factible agrupar dentro de un elemento a varias capas con las propiedades combinadas de las capas a fines de mantener el número de grados de libertad del problema dentro de límites manejables (Martinez et al., 2011). Para mejorar la aproximación a las tensiones transversales de corte se puede recurrir a elementos híbridos que incluyen grados de libertad adicionales de tensiones (Vu-Quoc y Tan, 2013).

Una técnica más precisa que las basadas en las teorías de láminas son las aproximaciones por capas, en las cuales el espesor del laminado se divide en un número de capas (que puede o no coincidir con el número físico de capas) suponiendo una variación lineal de los desplazamientos (en el plano de la capa) entre capas. Una reseña de las mismas puede verse en (Reddy y Robbins, 1994). Esta aproximación claramente adolece del mismo problema del análisis con elementos de sólido tridimensionales.

En secciones angle-ply o con bajo orden de heterogeneidad es factible usar una variación suave de las deformaciones transversales como la propuesta en la teoría trigonométrica de corte transversal (TSDT de su acrónimo en inglés) (Mantari et al., 2012; Rango et al., 2015)

En secciones con alto grado de heterogeneidad, los modelos con elementos de sólidos y las aproximaciones por capas muestran que el perfil de los desplazamientos en el plano a lo largo de la normal al plano del laminado dista mucho de poder ser aproximado por un polinomio de orden superior. Eso ha dado lugar a la aparición de aproximaciones zigzag, donde las funciones de interpolación en el espesor son sólo C^0 continuas pero con forma de zigzag, es decir que la derivada primera (asociada con la deformación transversal de corte) es discontinua, lo cual

naturalmente ocurre debido a los distintos módulos de elasticidad transversal de cada capa, que pueden ser distintos en varios órdenes de magnitud. En (Carrera, 2003) puede verse una reseña de estas teorías. Recientemente se ha presentado una versión refinada de esta propuesta (Tessler et al., 2010; Iurlaro et al., 2015), en la cual partiendo de la FSDT (5 Grados de libertad), se agregan sólo dos grados de libertad, que representan las amplitudes de desplazamientos jerárquicos sobre la hipótesis de desplazamientos lineales en el espesor. Esta teoría conduce a tensiones de corte transversales constantes en cada laminado (y por lo tanto discontinuas) pero permite tratar condiciones de contorno empotrado que era una limitación que presentaban las primeras teorías de zigzag.

Estas teorías refinadas de zigzag (RZT de su acrónimo en inglés) se han implementado en elementos viga 2D (Gherlone et al., 2011; Oñate et al., 2012), en elementos de placa plana (Tessler et al., 2010; Eijo et al., 2013; Iurlaro et al., 2013) donde se muestra una muy buena aproximación al campo de desplazamientos en el espesor del laminado y en elementos de lámina incluyendo grandes desplazamientos pero pequeñas deformaciones (Flores, 2014). Por otro lado las tensiones de corte obtenidas directamente usando la relación constitutiva y las deformaciones de corte en cada punto del espesor muestran una pobre aproximación. Una precisa recuperación de las tensiones de corte requiere de la integración en el espesor del laminado de las ecuaciones de equilibrio en el plano de la lámina, para lo cual hay que evaluar las derivadas de las tensiones entre elementos finitos.

En el presente trabajo se muestra una posible implementación de la RZT y la TSDT en elementos de sólido-lámina. Los elementos considerados son un hexaedro trilineal de 8 nudos (Flores, 2016) y un prisma de base triangular de 6 nudos (Flores, 2013). El objetivo del presente trabajo se limita a pequeñas deformaciones elásticas y grandes desplazamientos.

En la siguiente sección se resume la formulación básica de los elementos de sólido-lámina. A continuación se introducen los campos de desplazamientos adicionales y las deformaciones asociadas. Luego se evalúan las matrices de elasticidad resultantes para las nuevas medidas de tensión y deformación generalizadas. En la sección 5 se presentan varios ejemplos mostrando la buena correlación con los resultados teóricos y comparaciones con modelos de sólidos 3D y finalmente se resumen algunas conclusiones.

2. ELEMENTOS DE SÓLIDO-LÁMINA

Se trabaja sobre elementos de sólido prismático de base triangular ($NN = 6$) y cuadrilátera ($NN = 8$). Las geometrías inicial y deformada del elemento están descritas por las aproximaciones isoparamétricas estándar (Zienkiewicz y Taylor, 2000).

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^I = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{X}^I + \mathbf{u}^I) \quad (1)$$

donde \mathbf{X}^I , \mathbf{x}^I , y \mathbf{u}^I son respectivamente las coordenadas originales, coordenadas actuales y desplazamientos del nudo I . Las funciones de forma $N^I(\boldsymbol{\xi})$ son las habituales funciones de forma Lagrangeanas en función de las coordenadas locales $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ del elemento maestro correspondiente. La evaluación de las derivadas cartesianas se realiza en forma estándar, definiendo la matriz jacobiana en cada punto de integración

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (2)$$

$$N_{,\mathbf{X}}^I = \mathbf{J}^{-1} N_{,\boldsymbol{\xi}}^I \quad (3)$$

En cada elemento se define un sistema cartesiano local, con las dos primeras direcciones en el plano de la lámina, que puede ser coincidente con las direcciones principales de ortotropía del laminado u otra condición conveniente

$$\mathbf{R} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3] \quad (4)$$

de tal forma que las derivadas cartesianas referidas a este sistema (\mathbf{Y}) resultan

$$N_{,\mathbf{Y}}^I = \mathbf{R}^T N_{,\mathbf{X}}^I \quad (5)$$

lo que permite evaluar el gradiente de deformación \mathbf{F} en función de las coordenadas actuales de los nudos

$$F_{ij} = \sum_{I=1}^{NN} N_{,y_j}^I x_i^I \quad (6)$$

y las componentes del tensor \mathbf{C}

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (7)$$

a partir de las cuales se puede evaluar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij})$$

Como se mostrará más abajo el tensor \mathbf{C} se modifica usando técnicas de deformaciones impuestas que en un caso incluyen un grado de libertad adicional α , lo que conduce a un tensor mejorado $\bar{\mathbf{C}}$. Las ecuaciones de equilibrio a resolver (formulación variacional) para el caso de grandes desplazamientos son:

$$g_1(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{V_o} \frac{1}{2} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) : \delta_{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{C}} dV_0 + g_{ext} = 0 \quad (8)$$

$$g_2(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{V_o} \frac{1}{2} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{C}}) : \delta_{\alpha} \bar{\mathbf{C}} dV_0 = 0 \quad (9)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. La segunda ecuación se resuelve a nivel elemental y permite condensar el grado de libertad adicional α en el esquema de solución.

2.1. Mejoras en el elemento estándar simplificado al estilo “lámina”

A los efectos de utilizar el elemento de sólido en problemas de láminas con grandes desplazamientos es necesario mejorar sustancialmente el comportamiento del mismo. Para ello se realizan modificaciones en \mathbf{C} (tensor métrico). Al respecto todas las componentes del gradiente de la deformación, del tensor derecho de Cauchy-Green y el tensor de deformaciones, se escribirán en el sistema local definido en (4).

La discretización de una lámina con elementos de sólido implica dos pasos a) una discretización de la superficie media de la lámina con triángulos o cuadriláteros b) una discretización del espesor de la lámina con uno o más elementos de sólido en base al elemento definido sobre la superficie media. Supondremos entonces que las conectividades del elemento se introducen con los primeros nudos locales 1 a NF ($= NN/2$) asociados con la superficie inferior (cuasi-paralela a la superficie media) y que los últimos nudos están por encima de los primeros en la dirección del espesor a una distancia igual al espesor de la capa (lo habitual en elementos

de sólido-lámina). De esta forma la dirección normal a la superficie (y_3 local) prácticamente coincide con la variable natural local ζ .

La formulación del elemento de sólido se basa en el tensor derecho de Cauchy-Green, por lo cual una posibilidad interesante es plantear una formulación basada en modificar las componentes de \mathbf{C} (o \mathbf{E}) directamente asociadas a la parte que se desea mejorar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & C_{13}^s \\ C_{21}^m & C_{22}^m & C_{23}^s \\ C_{31}^s & C_{32}^s & C_{33}^t \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde las componentes indicadas con una m son las que tienen influencia principal en el comportamiento en el plano tangente a la lámina, las denotadas con s son las que tienen directa influencia en el corte transversal y la denotada con t está asociada a la deformación axial normal a la lámina. Esto permite separar el tensor en tres partes

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^m + \mathbf{C}^s + \mathbf{C}^t \quad (11)$$

2.2. Comportamiento en el plano de la lámina

El comportamiento en el plano de la lámina queda definido en función de las componentes en el plano calculadas en los centros de las caras superior e inferior. Por otro lado el valor en el centro de cada cara f se obtiene como el promedio (ponderado) de los valores calculados a la mitad de cada lado de dicha cara:

$$\bar{C}_{\alpha\beta}^f = \frac{1}{A^f} \sum_{K=1}^{NF} J_K C_{\alpha\beta}^K \quad \sum_{K=1}^{NF} J_K = A^f \quad (12)$$

donde J_K es el determinante jacobiano evaluado a la mitad del lado K . Esta aproximación promedio de la primera forma fundamental de la superficie de cada cara puede interpretarse como una aproximación en deformaciones impuestas. Las componentes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre el centro de cara cara pueden escribirse

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{A^f} \sum_{K=1}^{NF} J_K [C_{\alpha\beta}^K - {}^o C_{\alpha\beta}^K] \quad (13)$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{C}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \quad (14)$$

con $\delta_{\alpha\beta}$ la delta de Kronecker y el supraíndice izquierdo “ o ” indica evaluado en la configuración original. Las componentes en el plano del tensor derecho de Cauchy-Green se interpolan linealmente en el espesor:

$$\bar{C}_{ij}^m(\zeta) = L^1 \bar{C}_{ij}^1 + L^2 \bar{C}_{ij}^2 = \frac{1}{2} (1 - \zeta) \bar{C}_{ij}^1 + \frac{1}{2} (1 + \zeta) \bar{C}_{ij}^2 \quad (15)$$

La correspondiente matriz tangente $\bar{\mathbf{B}}_m^f$ que relaciona el incremento en desplazamientos $\delta \mathbf{u}$ con los cambios en las componentes en el plano del tensor resulta de:

$$\delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11} \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22} \\ \bar{C}_{12} \end{bmatrix} = L^1 \delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^1 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^1 \\ \bar{C}_{12}^1 \end{bmatrix} + L^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^2 \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^2 \\ \bar{C}_{12}^2 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (16)$$

y

$$\delta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{C}_{11}^f \\ \frac{1}{2} \bar{C}_{22}^f \\ \bar{C}_{12}^f \end{bmatrix} = \frac{1}{A^f} \sum_{K=1}^{NF} J_K \sum_{J=1}^{NF} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^K N_1^J \\ \mathbf{f}_2^K N_2^J \\ (\mathbf{f}_1^K N_2^J + \mathbf{f}_2^K N_1^J) \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^K = \bar{\mathbf{B}}_m^f \delta \mathbf{u}^f$$

donde el vector $\delta \mathbf{u}^f$ incluye sólo los nudos de la cara f (inferior o superior). Luego es posible escribir

$$[\bar{\mathbf{B}}_m]_{3 \times (3NN)} = [L^1 \bar{\mathbf{B}}_m^1 \quad L^2 \bar{\mathbf{B}}_m^2]$$

Notar que cada matriz está asociada con nudos distintos, pues la matriz $\bar{\mathbf{B}}_m^1$ está asociada con los nudos de la cara inferior y la $\bar{\mathbf{B}}_m^2$ con los nudos de la cara superior.

Por otro lado considerando el jacobiano constante en el espesor (lo cual estrictamente requiere las mismas discretizaciones de las superficies inferior y superior y espesor constante) y asimilando el comportamiento con las teorías de láminas es posible evaluar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange sobre la superficie media y los cambios de curvatura

$$\bar{\mathbf{E}}_m = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{E}}_f^1 + \bar{\mathbf{E}}_f^2) \quad (17)$$

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}}_b = \frac{1}{h} (\bar{\mathbf{E}}_f^2 - \bar{\mathbf{E}}_f^1) \quad (18)$$

lo cual permite escribir las deformaciones en el espesor como

$$\bar{\mathbf{E}}(z) = \bar{\mathbf{E}}_m + z \bar{\boldsymbol{\kappa}}_b \quad (19)$$

en tanto que las matrices tangentes asociadas son respectivamente (recordar que cada matriz $\bar{\mathbf{B}}_m^f$ está asociada a un grupo diferente de grados de libertad)

$$\bar{\mathbf{B}}_m = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{B}}_m^1, \bar{\mathbf{B}}_m^2] \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_b = \frac{1}{h} [-\bar{\mathbf{B}}_m^1, \bar{\mathbf{B}}_m^2] \quad (21)$$

A su vez la utilización de un único punto de integración en el plano de la lámina requiere para el caso de hexaedros de algún tipo de estabilización. Aquí se recurre a la misma estrategia propuesta en (Flores y Estrada, 2007) tal como se la describe en (Flores, 2016).

2.3. Tratamiento del corte transversal

A los efectos de aproximar las componentes más relevantes para el corte transversal se utiliza sobre cada cara una aproximación en deformaciones impuestas (ANS de su acrónimo en inglés), que consiste en utilizar una interpolación lineal en coordenadas naturales de las deformaciones mixtas (coordenadas naturales en el plano y cartesiana en la dirección transversal) a partir de las deformaciones evaluadas a la mitad de cada lado en la dirección tangente al lado. Los detalles pueden verse en los trabajos (Flores, 2013) para el caso de prismas y en (Flores, 2016) en el caso de hexaedros.

$$\begin{bmatrix} C_{\xi^3} \\ C_{\eta^3} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{P}_0 \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{P}^H(\xi, \eta) \tilde{\mathbf{c}} \quad (22)$$

donde \tilde{c} son las deformaciones tangentes a la mitad de cada lado (puntos de muestreo) y \mathbf{P} son los polinomios interpolantes en coordenadas naturales. Los polinomios \mathbf{P} se evalúan en el centro de cada cara (\mathbf{P}_0) y las deformaciones en dichos puntos se interpolan linealmente en el espesor, en tanto que la diferencia ($\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}^H$) se utiliza para estabilización en el caso del hexaedro. A partir de (22) se escribe

$$\tilde{\mathbf{C}}^s = C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta) \quad (23)$$

donde $[\mathbf{t}^\xi \ \mathbf{t}^\eta \ \mathbf{t}^3]$ son los vectores de la base dual de la terna local $[\mathbf{t}_\xi \ \mathbf{t}_\eta \ \mathbf{t}_3] = \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_3} \right]$ que permite calcular las componentes cartesianas modificadas.

$$\bar{C}_{13} = \mathbf{t}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}}^s \cdot \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \cdot [C_{\xi 3} (\mathbf{t}^\xi \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\xi) + C_{\eta 3} (\mathbf{t}^\eta \otimes \mathbf{t}^3 + \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\eta)] \cdot \mathbf{t}_3 \quad (24)$$

denotando por $a_i^j = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}^j$ (con $i = 1, 2, 3$ y $j = \xi, \eta, 3$)

$$\bar{C}_{13} = C_{\xi 3} (a_1^\xi a_3^3 + a_1^3 a_3^\xi) + C_{\eta 3} (a_1^\eta a_3^3 + a_1^3 a_3^\eta) = C_{\xi 3} a_1^\xi + C_{\eta 3} a_1^\eta \quad (25)$$

y similarmente para la otra componente de interés (\bar{C}_{23}). Luego usando la condición $a_i^3 = \delta_i^3$ resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^\xi & a_1^\eta \\ a_2^\xi & a_2^\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_p^{-1} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde \mathbf{J}_p^{-1} es la inversa del jacobiano de la interpolación isoparamétrica restringido al plano tangente a cada cara. y luego interpolar a los puntos de integración sobre el eje del elemento

$$\bar{\mathbf{C}}^s = L^1 \bar{\mathbf{C}}^{s1} + L^2 \bar{\mathbf{C}}^{s2} \quad (27)$$

2.4. Deformación transversal

Para evitar el bloqueo debido al efecto Poisson se recurrirá a una formulación con deformaciones impuestas mejoradas (EAS) modificada (simplificada respecto a la estándar).

Para ello evaluamos en el centro del elemento C_{33}^C a partir de

$$\mathbf{f}_3^C = \sum_{I=1}^{NN} N_{,3}^{IC} \mathbf{x}^I \quad (28)$$

y definimos la deformación modificada:

$$\bar{C}_{33} = \mathbf{f}_3^C \cdot \mathbf{f}_3^C + 2\alpha z = C_{33}^C + 2\alpha z \quad (29)$$

La componente transversal C_{33}^C es constante en dirección normal a la lámina y por lo tanto también E_{33} . Con la versión mejorada

$$\bar{E}_{33}(z) = \frac{1}{2} (\bar{C}_{33} - 1) = E_{33}^C + \alpha z \quad (30)$$

La variación de esta deformación de Green es

$$\begin{aligned} \delta \bar{E}_{33} &= \frac{1}{2} \delta \bar{C}_{33} = \delta \mathbf{f}_3^C \cdot \mathbf{f}_3^C + z \delta \alpha \\ &= \sum_{I=1}^{NN} N_3^I \delta \mathbf{f}_3^C + z \delta \alpha = \mathbf{B}_3^C \delta \mathbf{u}^e + z \delta \alpha \end{aligned} \quad (31)$$

donde $N_{,3}^I = \frac{\partial N^I}{\partial Y_3}$ son las derivadas de las funciones de forme respecto a la coordenada normal a la lámina valuadas en el centro del elemento, $\mathbf{f}_3^C = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial Y_3} |_{\xi=0}$ es la componente del gradiente en la dirección normal a la lámina valuado en el centro del elemento y $\delta \mathbf{u}^e$ agrupa a los desplazamientos de los NN nudos del elemento.

3. CAMPO ADICIONAL DE DESPLAZAMIENTOS

Los elementos descritos en la sección anterior implican una variación lineal de las deformaciones en el espesor del laminado. A los efectos de mejorar dicha interpolación se incluyen campos de desplazamientos adicionales. Las funciones adicionales se introducen en el sistema convectivo de coordenadas locales, donde los desplazamientos en el plano tangente de la lámina son en las direcciones (y_1, y_2) respectivamente

$$\begin{bmatrix} u(y_1, y_2, y_3) \\ v(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{NN} N^I(y_1, y_2) \begin{bmatrix} \phi_1(y_3) \\ \phi_2(y_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^I \\ \psi_2^I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^a(y_1, y_2, y_3) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(y_1, y_2) \boldsymbol{\phi}(y_3) \boldsymbol{\psi}^I$$

donde las funciones adicionales $\phi_i(z = y_3)$ se anulan en las caras inferior y superior

$$\boldsymbol{\phi}\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \mathbf{0}$$

y se han considerado dos opciones:

- la teoría refinada de zigzag donde las funciones quedan definidas linealmente en cada capa k del laminado, luego su derivada transversal satisface (z^k es la coordenada transversal en la parte superior de la capa k y se denomina $\phi_i^k = \phi_i(z^k)$)

$$\beta_i^k = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{z^k - z^{k-1}} = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{h^k}$$

$$\sum \beta_i^k h^k = 0$$

- funciones trigonométricas que se escriben ($\phi_1 = \phi_2$)

$$\phi(z) = \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$$

$$\beta(z) = 2\frac{\pi}{h} \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)$$

La teoría refinada de zigzag define las pendientes en cada capa “ k ” en función del módulo de elasticidad transversal G_i^k en cada dirección del plano y_i . Se ha mostrado que esta aproximación conduce a muy buenos resultados en secciones “sándwich” con grandes diferencias entre los valores G_i^k de cada capa. En tanto que la TSDT, de alguna forma similar a las teorías HOT, está orientada a laminados “angle ply” simétricos construidos a partir de láminas con características similares. Se hace notar que la implementación presentada aquí permite incluir con facilidad otras interpolaciones en el espesor con un costo mínimo de codificación.

Para poder considerar la utilización de desplazamientos adicionales es necesario separar desplazamientos en el plano tangente a la lámina y en la dirección normal (sistema convectivo (y_1, y_2, y_3)). Desde el punto de vista general resulta conveniente mantener los desplazamientos en el sistema global de coordenadas y más aún si se pretende abordar problemas con no-linealidad geométrica.

3.1. Deformaciones en el plano de la lámina

Los grados de libertad adicionales modifican las deformaciones en el plano tangente y las de corte transversal. Las del plano tangente (incluyendo aquí las deformaciones transversales E_{33} que tienen influencia en los esfuerzos asociados) resultan de sumar las contribuciones (se ha incluido una deformación E_{33} asociada con las funciones zigzag para favorecer la hipótesis de tensión plana en cada capa, aunque no es imprescindible).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ E_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ E_{33} \end{bmatrix}_{z=0} + z \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ 2\chi_{12} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 \psi_{1,1} \\ \phi_2 \psi_{2,2} \\ \phi_1 \psi_{1,2} + \phi_2 \psi_{2,1} \\ -\nu_{13} \phi_1 \psi_{1,1} - \nu_{23} \phi_2 \psi_{2,2} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{1}_4, z\mathbf{1}_4, \boldsymbol{\phi}] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \boldsymbol{\chi} \\ \nabla\psi \end{bmatrix} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{S}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{aligned} \quad (32)$$

donde las relaciones de Poisson rotadas a un sistema arbitrario resultan de las relaciones $\nu_{13} = \frac{C_{31}}{C_{11}}$ y $\nu_{23} = \frac{C_{32}}{C_{22}}$. Además se denota por

$$\nabla\psi = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} \\ \psi_{1,2} \\ \psi_{2,1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

y donde $\mathbf{1}_4$ es la matriz identidad de orden 4 y se ha definido la matriz

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & \phi_2 \\ -\nu_{13}\phi_1 & -\nu_{23}\phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Siguiendo la misma línea que para el tratamiento de las deformaciones en el plano asociadas con los desplazamientos globales (Sección 2.2) el gradiente $\nabla\psi$ se calcula a la mitad de cada lado y luego se promedia en el centro

$$\bar{\psi}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{A^f} \sum_{k=1}^{NF} J_K \psi_{\alpha,\beta}^K \quad (35)$$

con lo cual la matriz que relaciona los incrementos de deformación adicional con los cambios en los desplazamientos adicionales se escribe:

$$\bar{\mathbf{B}}_{\phi}^I = \frac{1}{A^f} \sum_{K=1}^{NF} J_K \begin{bmatrix} N_{,1}^I & N_{,2}^I \\ N_{,2}^I & N_{,1}^I \end{bmatrix}^K \quad (36)$$

lo cual también permite definir deformaciones de estabilización necesarias en el caso del elemento hexaédrico:

$$\psi_{12}^{KH} = \psi_{12}^K - \bar{\psi}_{12} \quad (37)$$

3.2. Deformaciones de corte transversal

En tanto que las deformaciones de corte transversal

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} (z) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \psi_1 \\ \beta_2 \psi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{1}_2, \begin{bmatrix} \beta_1 & \\ & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}^s \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{1}_2, \boldsymbol{\beta}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}^s \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{S}_t^k \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{aligned} \quad (38)$$

donde $\mathbf{1}_2$ es la matriz identidad de orden 2 y se ha definido la matriz diagonal $\boldsymbol{\beta}$.

Para evitar un bloqueo numérico se utiliza para $\boldsymbol{\psi}$ una aproximación casi idéntica que para $\boldsymbol{\gamma}^0$, la diferencia es que $\boldsymbol{\psi}$ no varía en la dirección ζ (dicha variación está implícita en $\boldsymbol{\beta}$) y que la definición de $\boldsymbol{\psi}$ es más sencilla que $\boldsymbol{\gamma}$. Se usa entonces una aproximación ANS, evaluando sobre cada lado un valor constante de ψ_t en forma similar a (22).

4. MATRICES DE ELASTICIDAD EQUIVALENTE Y MEDIDAS DE TENSIÓN

Para un material elástico lineal la energía interna de deformación por unidad de área resulta de integrar en el espesor:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_h (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\tau}) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_h (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{S}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{S}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \mathbf{S}_t^T \mathbf{D}_t \mathbf{S}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_h \left(\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_4 \\ z \mathbf{1}_4 \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \mathbf{D}_p [\mathbf{1}_4, z \mathbf{1}_4, \boldsymbol{\phi}] \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \mathbf{D}_t [\mathbf{1}_2, \boldsymbol{\beta}] \boldsymbol{\varepsilon}_t \right) dz \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_p^T \bar{\mathbf{D}}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \bar{\mathbf{D}}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t) \end{aligned} \quad (39)$$

donde se ha escrito la energía como una forma cuadrática de las deformaciones generalizadas definidas en (32) y (38) a los fines de encontrar esfuerzos generalizados conjugados. Definiendo para el comportamiento en el plano de la lámina

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{D}}_p)_{12 \times 12} &= \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p & \mathbf{D}_p z & \mathbf{D}_p \boldsymbol{\phi} \\ \text{sim} & \mathbf{D}_p^k z^2 & \mathbf{D}_p \boldsymbol{\phi} z \\ & & \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{D}_p \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} dz \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_p^{11})_{4 \times 4} & (\mathbf{D}_p^{12})_{4 \times 4} & (\mathbf{D}_p^{13})_{4 \times 4} \\ & (\mathbf{D}_p^{22})_{4 \times 4} & (\mathbf{D}_p^{23})_{4 \times 4} \\ \text{sim} & & (\mathbf{D}_p^{33})_{4 \times 4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

Llamando $\bar{z}_k = \frac{1}{2} (z_{k+1} + z_k)$ y $\bar{\boldsymbol{\phi}}_k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\phi}_{k+1} + \boldsymbol{\phi}_k)$ estas integrales resultan para el caso de la RZT ($\boldsymbol{\beta}$ constante en cada capa k):

$$\bar{\mathbf{D}}_p^{11} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \quad \bar{\mathbf{D}}_p^{12} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \bar{z}_k \quad \bar{\mathbf{D}}_p^{13} = \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \bar{\boldsymbol{\phi}}_k$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_p^{11} &= \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \left(\bar{z}_k^2 + \frac{h_k^2}{12} \right) & \bar{\mathbf{D}}_p^{23} &= \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_p^k h_k \left[\bar{\phi}_k \bar{z}_k + \beta^k \frac{h_k^2}{12} \right] \\ \bar{\mathbf{D}}_p^{33} &= \sum_{k=1}^{NL} h_k \left[\left(\bar{\phi}^k \right)^T \mathbf{D}_p^k \bar{\phi}^k + \left(\beta^k \right)^T \mathbf{D}_p^k \beta^k \frac{h_k^2}{12} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

En tanto que para las componentes transversales de corte

$$\left(\bar{\mathbf{D}}_t \right)_{4 \times 4} = \int_h \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t & \mathbf{D}_t \beta \\ \text{sim} & \beta \mathbf{D}_t \beta \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_t^{11} & \mathbf{D}_t^{12} \\ \text{sim} & \mathbf{D}_t^{22} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_t^{11} &= \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_t^k h_k & \bar{\mathbf{D}}_t^{12} &= \sum_{k=1}^{NL} \mathbf{D}_t^k h_k \beta^k \\ \bar{\mathbf{D}}_t^{22} &= \sum_{k=1}^{NL} \left(\beta^k \right)^T \mathbf{D}_t^k h_k \beta^k \end{aligned} \quad (43)$$

Lo cual permite definir esfuerzos generalizados integrados en la sección

$$\begin{bmatrix} (\sigma_p)_{12 \times 1} \\ (\sigma_t)_{4 \times 1} \end{bmatrix}_{16 \times 1} = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{D}}_p)_{12 \times 12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\bar{\mathbf{D}}_t)_{4 \times 4} \end{bmatrix}_{16 \times 16} \begin{bmatrix} (\epsilon_p)_{12 \times 1} \\ (\epsilon_t)_{4 \times 1} \end{bmatrix}_{16 \times 1} \quad (44)$$

Las medidas de tensión resultantes son entonces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{M}_\phi \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{D}}_p^{11})_{4 \times 4} & (\bar{\mathbf{D}}_p^{12})_{4 \times 4} & (\bar{\mathbf{D}}_p^{13})_{4 \times 4} \\ & (\bar{\mathbf{D}}_p^{22})_{4 \times 4} & (\bar{\mathbf{D}}_p^{23})_{4 \times 4} \\ \text{sim} & & (\bar{\mathbf{D}}_p^{33})_{4 \times 4} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_t^{11} & \bar{\mathbf{D}}_t^{12} \\ \text{sim} & \bar{\mathbf{D}}_t^{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \chi \\ \nabla \psi \\ \bar{\mathbf{c}}^s \\ \psi \end{bmatrix} \quad (45)$$

Esta forma de obtención no permite ver la relación que hay entre las tensiones y los esfuerzos generalizados. Por ello volviendo sobre la expresión anterior, los **N** son:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \bar{\mathbf{D}}_p^{11} \mathbf{E}_m + \bar{\mathbf{D}}_p^{12} \chi + \bar{\mathbf{D}}_p^{13} \nabla \psi \\ &= \int_h \mathbf{D}_p (\mathbf{E}_m + z \chi + \phi \nabla \psi) dz \\ &= \int_h \mathbf{D}_p \mathbf{E} dz = \int_h \sigma_p dz \end{aligned} \quad (46)$$

en tanto que los **M**

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{D}}_p^{21} \mathbf{E}_m + \bar{\mathbf{D}}_p^{22} \chi + \bar{\mathbf{D}}_p^{23} \nabla \psi \\ &= \int_h \mathbf{D}_p z (\mathbf{E}_m + z \chi + \phi \nabla \psi) dz \\ &= \int_h z \mathbf{D}_p \mathbf{E} dz = \int_h z \sigma_p dz \end{aligned} \quad (47)$$

Notar que las tres primeras componentes de \mathbf{N} y \mathbf{M} representan lo que habitualmente se entiende por esfuerzos membranales y flexionales, mientras que la cuartas componentes de \mathbf{N} y \mathbf{M} no tienen una interpretación en la teoría de láminas (basadas en la hipótesis de tensión plana). Así N_{33} debiera ser pequeño y la cuarta componente de \mathbf{M} es la ecuación de equilibrio para el parámetro α de la aproximación EAS. Además

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \bar{\mathbf{D}}_t^{11} \bar{\mathbf{c}}^s + \bar{\mathbf{D}}_t^{12} \psi \\ &= \int_h \mathbf{D}_t (\bar{\mathbf{c}}^s + \beta \psi) dz = \int_h \boldsymbol{\tau} dz \end{aligned} \quad (48)$$

representa el esfuerzo de corte transversal.

En tanto que aparecen esfuerzos asociados al gradiente de los desplazamientos adicionales en el plano

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\phi &= \bar{\mathbf{D}}_p^{31} \mathbf{E}_m + \bar{\mathbf{D}}_p^{32} \boldsymbol{\chi} + \bar{\mathbf{D}}_p^{33} \nabla \psi \\ &= \int_h \mathbf{D}_p \phi^T (\mathbf{E}_m + z \boldsymbol{\chi} + \phi^k \nabla \psi) dz \\ &= \int_h \phi^T \mathbf{D}_p \mathbf{E} dz = \int_h \phi^T \boldsymbol{\sigma}_p dz \end{aligned} \quad (49)$$

y en la dirección transversal

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\phi &= \bar{\mathbf{D}}_t^{21} \bar{\mathbf{c}}^s + \bar{\mathbf{D}}_t^{22} \psi \\ &= \int_h \beta^T \mathbf{D}_t (\bar{\mathbf{c}}^s + \beta \psi) dz = \int_h \beta^T \boldsymbol{\tau} dz \end{aligned} \quad (50)$$

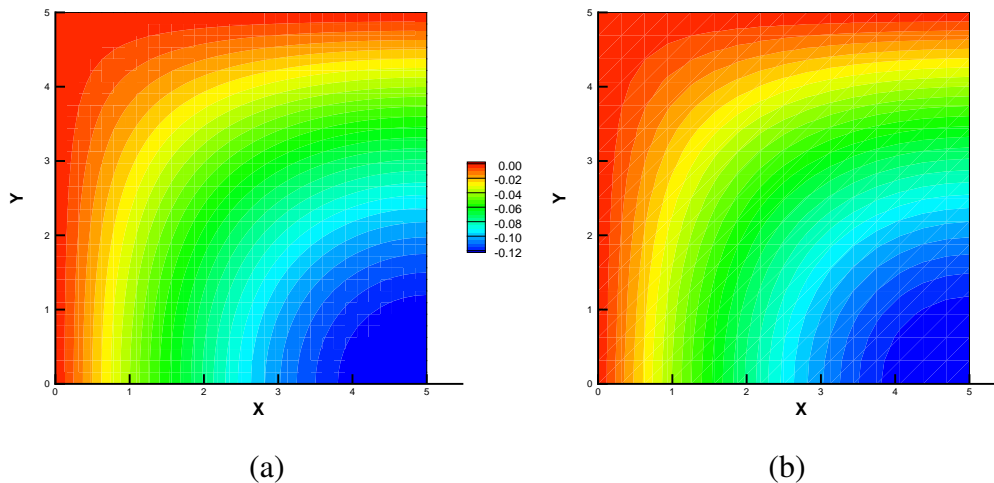
Las deformaciones generalizadas en el plano de la lámina ($\mathbf{E}_m, \boldsymbol{\chi}, \nabla \psi$) están asociadas con la superficie media y son constantes en el elemento (se usa un punto de integración en el plano). Las deformaciones de corte $\bar{\mathbf{c}}^s$ varían en el espesor, en tanto que ψ está asociada con la superficie media pero a través de β implican una variación de las deformaciones transversales de corte en el espesor, lo cual se manifiesta en la definición de las $\bar{\mathbf{D}}_t^{IJ}$.

5. EJEMPLOS

En los presentes ejemplos se intenta mostrar que los resultados en modelos de placas coinciden o convergen a los resultados publicados en la literatura para la RZT o la TSDT obtenidos con modelos analíticos o elementos finitos de placa/lámina. Es decir el objetivo es validar el modelo de elementos finitos aquí propuesto. No es el objetivo de la presente sección (ni del trabajo) evaluar la RZT ni la TSDT lo cual ya ha sido hecho por otros autores, que han comparado la variación de desplazamientos y tensiones en el espesor del laminado. Cuando se tratan láminas curvas en régimen no lineal las comparaciones se realizan con modelos numéricos confeccionados con elementos de sólido y/o elementos de lámina. En este caso nuevamente se intenta mostrar que los resultados son globalmente similares con ambos modelos pero no se comparan aquí detalladamente ni desplazamientos, ni tensiones en el espesor del laminado. Los elementos de sólido-lámina descritos aquí se denominan por SH al hexaedro y por SP al prisma. En tanto que los modelos usados para comparación corresponden a los elementos de lámina presentados en (Flores, 2014) que aquí se denominan por SQ al cuadrilátero de 4 nudos y ST al triángulo de 6 nudos con interpolación lineal. En tanto que al elemento de sólido de 8 nudos presentado en (Flores y Oñate, 2010) se lo designa S8.

	Ref.	SH	SP	SQ	ST	FSDT	CLPT
w	0,6742	0,6722	0,6783	0,6740	0,6752	0,2472	0,2350
w [%]	100,00	99,70	99,94	99,97	100,14	36,67	34,85

Tabla 3: Placa cuadrada simplemente apoyada con carga sinusoidal

Figura 1: Amplitud de los desplazamiento adicional en la dirección x . (a) usando SH (b) usando SP

8259 grados de libertad (GdL). Debido a las propiedades del laminado se ha considerado la interpolación en el espesor correspondiente a la RZT.

El desplazamiento vertical del centro de la placa indicado en la referencia es

$$w(0,0) = 0,1118 \times \frac{D_{11}}{a^4} q_0 = 0,6742 \text{ mm}$$

En la Tabla 3 se indica el valor del desplazamiento del punto central (promedio de las superficies inferior y superior) obtenido con los dos elementos desarrollados y comparaciones con otros modelos numéricos. Puede observarse una muy buena correlación entre los resultados de los elementos de lámina y los de sólido-lámina. En la Figura 1 se muestra con carácter ilustrativo la amplitud del desplazamiento adicional para los dos elementos considerados.

5.2. Placa empotrada bajo carga uniforme

Para la misma geometría y una carga uniforme $q = 1 \text{ KPa}$ se consideró el borde empotrado. En este caso se comparó con un modelo de elementos de sólidos estándar de 20 nudos (S20) y una malla de $16 \times 16 \times 9$ (un elemento por capa en las capas externas y 5 elementos en el núcleo). Para este último modelo el desplazamiento resultó $w_{max}^{S20} = 0,6936$ (promedio entre superficies inferior y superior) que muestra una muy buena correlación entre los modelos de lámina y sólido-lámina. Observas los muy bajos valores obtenidos con la FSDT y la CLPT.

	S20	SH	SP	SQ	ST	FSDT	CLPT
w	0,6936	0,6881	0,6912	0,6916	0,6985	0,1134	0,0954
w [%]	100,00	99,21	99,65	99,71	100,71	16,35	13,75

Tabla 4: Placa cuadrada empotrada con carga uniforme

5.3. Frecuencias de vibración de una placa cuadrada simplemente apoyada

Este ejemplo ha sido tomado de (Rango et al., 2015) donde se utilizan la TSDT para evaluar frecuencias naturales de placa usando macro-elementos. En este caso se calcula la primera frecuencia natural para una placa cuadrada simplemente apoyada. La sección incluye cuatro capas en forma simétrica $[0, 90]_s$ de un mismo material con propiedades $E_1/E_2 = R$, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = G_{13} = 0,6E_2$ y $G_{23} = 0,5E_2$. Se consideran dos relaciones de aspecto a/h y tres valores de R . Para el análisis se han considerado matrices masa diagonalizadas. En la Tabla 5 se muestran los valores de referencia y los resultados obtenidos usando elementos finitos. En este caso la sección transversal del laminado es del tipo *cross-ply*, por lo cual no hay heterogeneidades tan marcadas en los módulos de corte transversal como en el caso de las secciones *sándwich*. Por ello la rigidez de la placa (y por lo tanto las frecuencias naturales) no difiere significativamente entre los distintos modelos numéricos. Naturalmente las diferencias son menores para la placa más delgada. Por otro lado los elementos de sólido, donde la condición simplemente apoyada se impone a través de restricciones multi-punto y la inercia rotacional se establece en forma diferente son en general ligeramente más flexibles.

Elemento	$a/h = 10$			$a/h = 100$		
	$R = 3$	$R = 10$	$R = 20$	$R = 3$	$R = 10$	$R = 20$
Macro (Ref.)	7.029	9.777	12.292	7.527	10.637	13.926
SH-TSDT	7.045	9.657	12.046	7.525	10.633	13.919
SH-RZT	7.060	9.680	12.084	7.421	10.499	13.695
SQ-TSDT	7.243	9.836	12.206	7.535	10.644	13.930
SQ-RZT	7.255	9.871	12.274	7.535	10.644	13.932
FSDT	7.249	9.855	12.242	7.535	10.644	13.931
CLPT	7.536	10.650	13.949	7.536	10.650	13.949

Tabla 5: Primera Frecuencia natural

5.4. Sector esférico con cargas lineales

Para realizar comparaciones en láminas con doble curvatura y en el rango no lineal se ha utilizado un sector esférico como se indica en la Figura 2 con un radio $R = 10m$ y un ángulo de $\alpha = 30^\circ$. Las cargas aplicadas son cargas de líneas normales a la superficie y uniformes, salientes sobre los meridianos A-A ($+x$) y C-C ($-x$) y entrantes sobre los meridianos B-B ($-y$) y D-D ($+y$).

La sección utilizada es la 2 cuya diferencia con la 1 es que el material del núcleo es mucho más rígido en en plano de la lámina para evitar su colapso temprano. En este caso el espesor total es $t = 0,2m$. La carga de línea de referencia q_0 tiene un valor $1MN/m$. La malla utilizada cubre un cuarto de la geometría con 40 divisiones en la dirección del paralelo y 14 en el meridiano, un total de 1230 nudos y 520 elementos hexaédricos o 1040 elementos prismáticos. A los efectos de comparar, se ha utilizado un modelo de sólidos de 8 nudos (S8) (Flores y Oñate, 2011) con la misma discretización de la superficie media y con 6 capas en el espesor. Este elemento de sólido utiliza una aproximación en deformaciones impuestas para las deformaciones transversales de corte, de tal forma que el elemento sea adecuado para modelar láminas con elementos de alta relación de aspecto entre sus dimensiones en el plano de la lámina y su dimensión en el espesor de la lámina.

El análisis realizado es no-lineal geométrico y lineal material. El desplazamiento entrante máximo impuesto es de 3m (30 % del radio). En la Figura 3 se ha graficado los desplazamientos

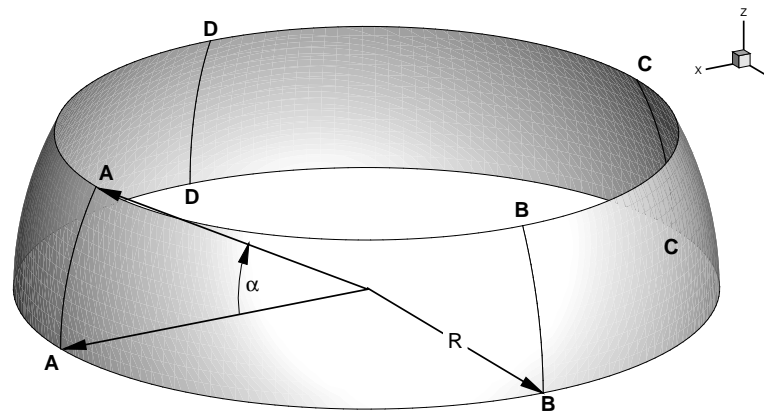


Figura 2: Sector esférico con cargas lineales

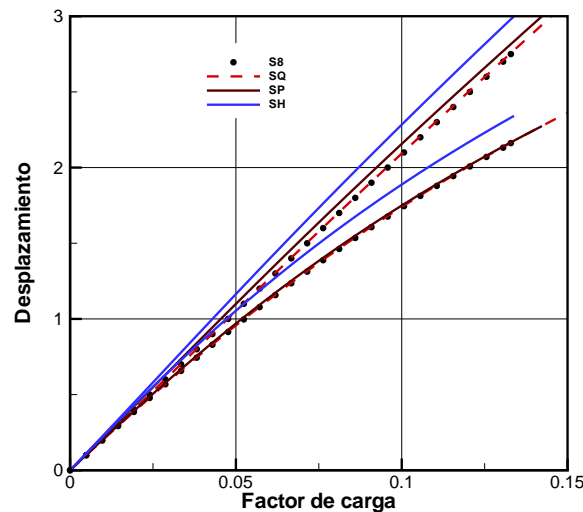


Figura 3: Sector esférico con cargas lineales

entrantes (mayores) y salientes (menores) de los puntos sobre el borde libre inferior del sector (promedio entre superficies inferior y superior). Además de los resultados obtenidos con los elementos de sólido-lámina se incluyen los resultados obtenidos con el elemento cuadrilátero (SQ), y la aproximación con elementos de sólido (S8). Para el caso del elemento prismático puede observarse una muy buena correlación entre los resultados obtenidos con elementos de lámina y sólido. En tanto que el elemento hexaédrico resulta más flexible debido a la subintegración.

5.5. Pandeo de un cilindro

En este ejemplo se estudia el comportamiento de un cilindro bi-empotrado sometido alternativamente a cargas axiales y presión exterior. El radio del cilindro es 10 y el largo total 20 en tanto que el espesor es $t = 0,25$ con una sección definida por el laminado 2, donde la dirección principal del laminado es la dirección tangente al paralelo. Se ha modelado sólo un octavo del cilindro (1 cuadrante y la mitad de la longitud) imponiendo condiciones de simetría en 3 de sus borde y de empotramiento en el restante. Esto restringe arbitrariamente los modos de bifurcación a dichas simetrías pero alivia sustancialmente el modelo numérico de elementos de sólido

usado como comparación. La discretización con elementos SH incluye 5246 nudos y 2520 elementos que resultan de una malla estructurada con 60 divisiones en el cuadrante considerado y 42 divisiones a lo largo de la mitad del cilindro. La función de interpolación transversal para los grados adicionales utilizada es la RZT debido a que se trata de una sección sándwich. Nuevamente se ha recurrido a un modelo con elementos de sólido para tener una solución de comparación. La malla en este caso incluye la misma discretización en el plano de la lámina y 7 elementos en el espesor.

Las cargas críticas que se obtienen son las indicadas en la Tabla 6, puede verse una muy buena correlación entre el modelo de sólidos, el de láminas SQ y los elementos presentados aquí.

Modelo	Carga Axial [MN/m]	Presión Externa [MPa]
Sólidos	7,040	0,3888
SQ	7,093	0,3988
SH	6,983	0,4056
SP	7,221	0,4053

Tabla 6: Cargas críticas

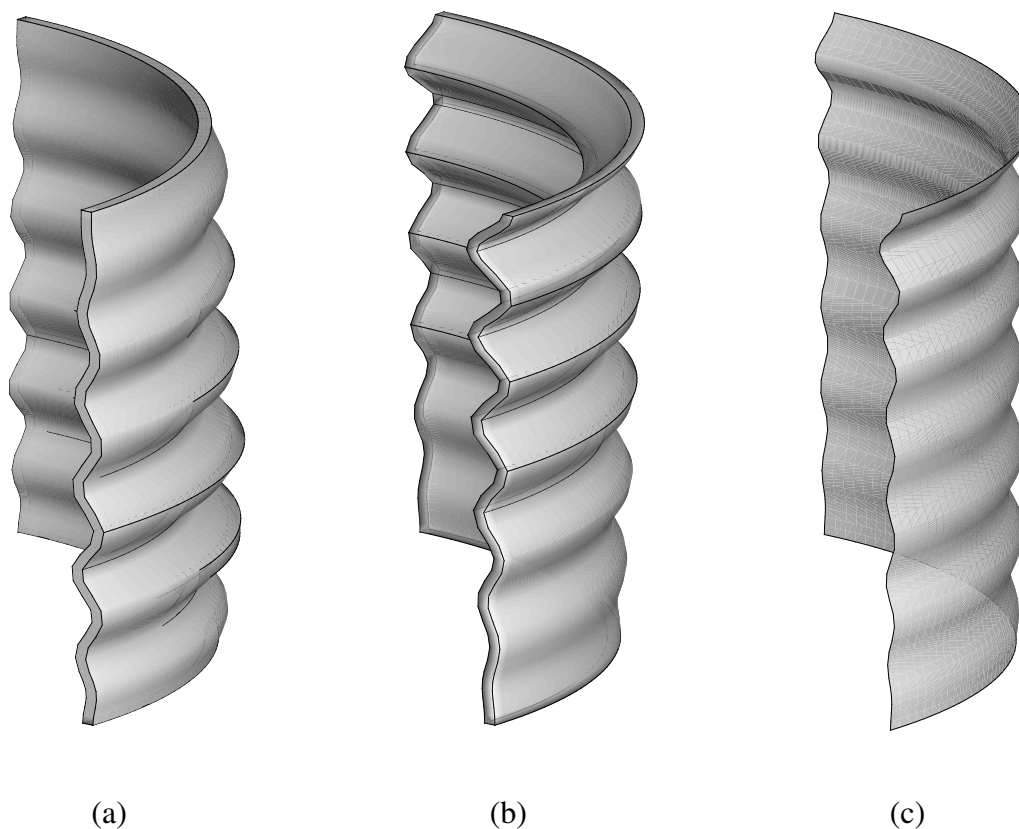


Figura 4: Modo de pandeo frente a carga axial (a) S8; (b) SH; (c) SQ

Estas similitudes entre cargas críticas tienen su correlación con la forma de los modos de pandeo. En la Figura 4 se muestran los modos de pandeo frente a carga axial en tanto que en la

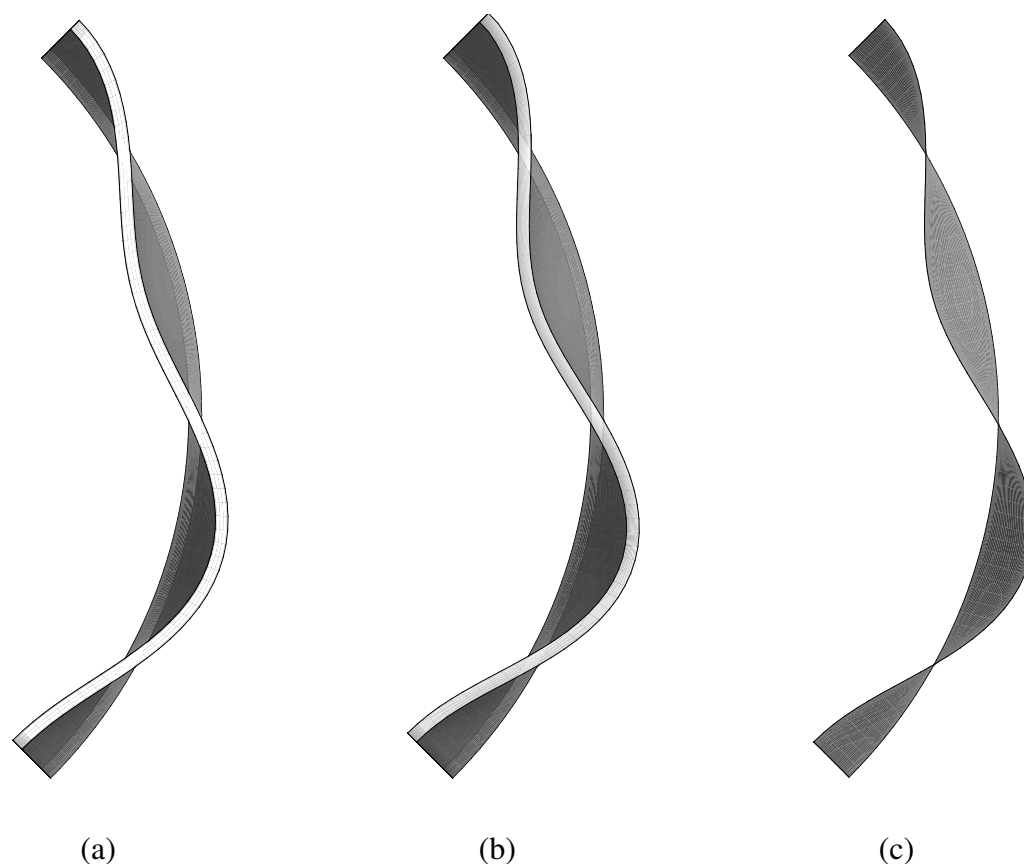


Figura 5: Modo de pandeo frente a presión externa (a) S8; (b) SH; (c) SQ

Figura 5 se muestran los modos de pandeo debido a presión lateral, donde nuevamente puede apreciarse la similitud entre el modelo de sólidos, de lámina y de sólido-lámina.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una posible implementación de la teoría refinada de zigzag (RZT) y la teoría de corte trigonométrica (TSDT) en dos elementos de sólido-lámina. Los elementos son un hexahedro trilineal y un prisma de base triangular de 6 nudos. En estos elementos se trabaja con un tensor derecho Cauchy-Green modificado, en el cual 5 (las relacionadas con las deformaciones en el plano de la lámina y con el corte transversal) de sus 6 componentes se evalúan en el centro de las caras superior e inferior usando técnicas de deformaciones impuestas (ANS) y se interpolan linealmente en la dirección transversal. La sexta componente (deformación normal transversal) se evalúa en el centro del elemento y se mejora con un grado de libertad adicional usando la técnica de deformaciones impuestas mejoradas (EAS)

Los aspectos principales en la implementación son:

- Los desplazamientos adicionales son desplazamientos jerárquicos expresados en coordenadas locales de un sistema convectivo sobre la superficie media de la lámina
- Se restringe a modelos con pequeñas deformaciones elásticas por lo cual no se distingue entre distintas medidas de deformación.
- Las deformaciones se evalúan como la suma de las que provienen del cambio de configuración del elemento base más las que provienen de los desplazamientos adicionales.

- Las aproximaciones en desplazamientos impuestos (ANS) utilizadas para el corte transversal en los elementos base se aplican también para las deformaciones de corte adicionales.
- En el caso del hexaedro, la estabilización utilizada para las deformaciones provenientes de las variables adicionales es similar a la utilizada en el elemento base para deformaciones en el plano y para el corte transversal.
- Se ha considerado una matriz de masa diagonalizada

Las principales conclusiones que pueden mencionarse son:

- En los ejemplos de placas considerado, tanto en equilibrio estático como las frecuencias naturales de vibración, ambos elementos propuestos muestran un buen comportamiento y conducen a los resultados similares a los obtenidos con elementos de lámina basados en la FSDT más la RZT.
- La comparación con modelos de sólido en ejemplos de láminas curvas muestra una muy buena correlación.
- La evaluación de cargas críticas en geometrías curvas muestra una excelente correlación en comparación con modelos de sólido y pone de manifiesto las limitaciones de la FSDT y de la CLPT.
- Las aproximaciones en deformaciones impuestas (ANS) para el corte funcionan correctamente. Lo mismo puede decirse de los esquemas de estabilización utilizados para el elemento SH con un punto de integración en el plano.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56:298–308, 2003.
- Eijo A., Oñate E., y Oller S. A four-noded quadrilateral element for composite laminated plates/shells using the refined zigzag theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95:631–660, 2013.
- Flores F. Development of a non-linear triangular prism solid-shell element using ans and eas techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266:81–97, 2013.
- Flores F. Implementation of the refined zigzag theory in shell elements with large displacements and rotations. *Composite Structures*, 118:560–570, 2014.
- Flores F. A simple reduced integration hexahedral solid-shell element for large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303:260–287, 2016.
- Flores F. y Estrada C. A rotation free thin shell quadrilateral. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2631–2646, 2007.
- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Mecánica Computacional*, XXVIII:4303–4324, 2010.

- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.*, 27(4):256–268, 2011.
- Gherlone M., Tessler A., y Di Sciuva M. C0 beam element based on the refined zigzag theory for multilayered composite and sandwich laminates. *Composite Structures*, 93:2882–2894, 2011.
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., y Tessler A. Assessment of the refined zigzag theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories. *Composite Structures*, 106:777–792, 2013.
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., y Tessler A. Refined zigzag theory for laminated composite and sandwich plates derived from reissner's mixed variational theorem. *Composite Structures*, 133:809–817, 2015.
- Mantari J., Oktem A., y Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int J Solids Struct*, 49:43–53, 2012.
- Martinez X., Rastellini F., Oller S., Flores F., y Oñate E. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Journal of Composites part B*, 42:134–144, 2011.
- Oñate E., Eijo A., y Oller S. Simple and accurate two-noded beam element for composite laminated beams using a refined zigzag theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216:362–382, 2012.
- Rango R., Nallim L., y Oller S. Formulation of enriched macro elements using trigonometric shear deformation theory for free vibration analysis of symmetric laminated composite plate assemblies. *Composite Structures*, 119:38–49, 2015.
- Reddy J. y Robbins D. Theories and computational models for composite laminates. *Appl Mech Revs*, 47:147–165, 1994.
- Tessler A., Di Sciuva M., y Gherlone M. A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics. *J Mech Mater Struct*, 5:341–367, 2010.
- Vu-Quoc L. y Tan X. Efficient hybrid-eas solid element for accurate stress prediction in thick laminated beams, plates, and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 253:337–355, 2013.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The Finite Element Method. Vol II: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann, 2000.