

MECÁNICA DE VIGAS CURVAS ANISÓTROPAS DE PAREDES DELGADAS CONSIDERANDO EFECTOS DE CORTE POR FLEXIÓN Y POR ALABEO

Marcelo T. Piovan* y Víctor H. Cortínez*

* Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional- FRBB,
11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: mpiovan@frbb.utn.edu.ar, web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar>

Key words: Vigas curvas. Deformabilidad por corte. Materiales compuestos.

Abstract. *En el presente trabajo se desarrolla un modelo de viga curva compuesta deformable por corte. Para ello se emplea una formulación cinemática no lineal, basada en las denominadas rotaciones finitas semitangenciales. Se pone especial énfasis en la adecuada consideración de la deformabilidad por corte en forma completa, esto es por flexión y por alabeo torsional no uniforme. El modelo de viga curva se implementa computacionalmente mediante el método de elementos finitos para efectuar un análisis paramétrico en diferentes problemas de estática, dinámica de vibraciones libres y bajo tensiones iniciales y de pandeo, para mostrar la respuesta de diferentes secciones y/o arquitecturas de laminación.*

1 INTRODUCCION

En los últimos años se ha reportado en el mundo una gran cantidad de investigaciones referidas a la dinámica, estática e inestabilidad de vigas curvas. Sin embargo muy pocos han puesto de manifiesto los efectos de corte en forma general. En la teoría desarrollada por Gendy y Saleeb^[1] se considera la flexibilidad por corte en forma completa, es decir, corte debido a flexión y corte debido al alabeo torsional no uniforme. Los autores^[2,3] extendieron las aplicaciones contemplando estados arbitrarios de tensiones iniciales y formas mejoradas de la flexibilidad por corte mediante el empleo de coeficientes de corte obtenidos en forma consistente con el principio de Reissner. Estas dos teorías precedentes fueron encuadradas en el contexto de los materiales isótropos. Aparentemente, Palani y Rajasekaran^[4] desarrollaron la primer teoría de vigas curvas anisótropas con secciones arbitrarias de paredes delgadas, pero sin contemplar la deformabilidad por corte y el modelo fue empleado exclusivamente para evaluar problemas de pandeo. En la referencia [4], se consideraron efectos de curvatura y en la cinemática del arco sólo se contemplaron las componentes lineales. De forma que en tal contexto, la predicción de las cargas de pandeo de arcos, en determinado rango paramétrico puede acarrear dudas, debido a que no se emplea una cinemática no lineal más rica y representativa. En este sentido, recientemente Kim, Min y Suh^[5,6] desarrollaron un modelo de viga curva isótropa considerando componentes cinemáticas no-lineales basadas en las rotaciones finitas semitangenciales introducidas por Argyris^[7], aunque sin contemplar la deformabilidad por corte. El modelo de Kim, Min y Suh, fue aplicado para analizar problemas de pandeo en arcos de sección monosimétrica. Los autores desarrollaron paralelamente un modelo^[8] de viga curva ortótropa deformable por corte aunque sin incluir desplazamientos no lineales en la formulación, cuyas aplicaciones se orientaron principalmente sobre problemas de estática fuera del plano, desarrollando para ello un elemento finito de dos nodos, libre de bloqueo por corte. Este modelo ha servido para desarrollar una teoría^[12, 13] de estática para vigas curvas anisótropas deformables por corte, que permite evaluar acoplamientos elásticos intensos.

En este trabajo, sobre la base conceptual de la teoría descrita en la referencia [12], se desarrolla un modelo de viga curva anisótropa que contempla la deformabilidad por corte en forma completa, esto es, la deformabilidad por corte debida a flexión y la deformabilidad por corte debida al alabeo torsional no uniforme. En la formulación cinemática se incluyen desplazamientos no lineales basados en las rotaciones finitas semitangenciales. La deducción del modelo se lleva a cabo aplicando el principio de trabajos virtuales. Una vez establecido el funcional del problema se implementa una solución mediante el método de elementos finitos, introduciendo un nuevo elemento isoparamétrico de 5 nodos.

2 DESCRIPCION DEL MODELO

Se considera una viga curvada en el plano, con sección genérica de paredes delgadas como la expuesta en Figura 1. En ella se pueden apreciar los dos sistemas de referencia cartesianos y dextrógiros, que se emplean. El sistema de referencia $\{\mathbf{C} : \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, es el principal y sobre el mismo se mide la mecánica global de la viga. El sistema de referencia secundario $\{\mathbf{A} : \hat{x}, \hat{s}, \hat{n}\}$

sección, el centroide geométrico de la sección, el centro de referencia y el origen de la coordenada s . Con el objeto de simplificar la descripción analítica del modelo los tres primeros puntos se consideran coincidentes. Algunas teorías ^[3] de materiales isotrópos suelen definirse en función de dos polos, para poder simplificar las expresiones constitutivas en virtud de la anulación de determinadas integrales en el área, sin embargo en el caso de materiales anisótropos, la presencia de acoplamientos intensos, no permite tal anulación, conduciendo a expresiones mucho más complejas.

2.1 Hipótesis cinemáticas e hipótesis generales del modelo

La presente teoría de arcos anisótropos deformables por corte se desarrollará de tal forma que pueda emplearse en diferentes problemas de mecánica estructural, permitiendo a su vez contener como casos particulares a otros modelos precedentes de vigas curvas deformables y no deformables por corte. En este contexto la teoría se basará en las siguientes hipótesis:

H.1- La sección es indeformable en su plano, esto es que la proyección de cualquier segmento recto de la sección sobre un plano perpendicular al eje de la viga, luego de la deformación no manifiesta ninguna distorsión.

H.2- La sección se considera compuesta por una sucesión de placas de pequeño ancho tal como se ve en la Figura 2.b. cuyo espesor puede variar a lo largo de la coordenada perimetral “ s ” pero se mantiene constante a lo largo del eje de la viga.

H.3- Se utiliza un solo sistema de referencia ubicado en el centroide geométrico de la sección. Los ejes de referencia no son necesariamente paralelos a las direcciones principales.

H.4- Las siguientes deformaciones se admiten como más las representativas

-Deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos lineales: $\varepsilon_{xx}^L, \varepsilon_{xy}^L, \varepsilon_{xz}^L$

-Deformaciones de segundo orden debidas a desplazamientos lineales: $\eta_{xx}^L, \eta_{xy}^L, \eta_{xz}^L$

-Deformaciones de primer orden debidas a desplazamientos no lineales: $\varepsilon_{xx}^{NL}, \varepsilon_{xy}^{NL}, \varepsilon_{xz}^{NL}$

H.5- Se desprecian componentes de deformación de orden superior debidas a los desplazamientos de segundo orden, es decir η_{ij}^{NL} .

H.6- Se considera que las componentes más representativas del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff son $\{\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}\}$.

H.7- Se contempla la existencia de un estado arbitrario de tensiones iniciales, cuyas componentes más representativas son $\{\sigma_{xx}^0, \sigma_{xy}^0, \sigma_{xz}^0\}$.

H.8- La función de alabeo consta de dos componentes: el alabeo primario o en el contorno $\omega_p(s)$ y el alabeo secundario $\omega_s(s, n)$ o en el espesor, el cual se supone con variación lineal en el espesor.

Bajo estas hipótesis el campo de desplazamiento puede definirse con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 u_x^L(x,t) &= u_{xc}(x,t) - y \left(\theta_z(x,t) - \frac{u_{xc}(x,t)}{R} \right) - z \theta_y(x,t) - \omega \left(\theta_x(x,t) - \frac{\theta_y(x,t)}{R} \right) \\
 u_y^L(x,t) &= u_{yc}(x,t) - z \phi_x(x,t), \quad u_z^L(x,t) = u_{zc}(x,t) + y \phi_x(x,t) \\
 u_x^{NL}(x,t) &= -\frac{I}{2} \left[z \phi_x(x,t) \left(\theta_z(x,t) - \frac{u_{xc}(x,t)}{R} \right) + y \phi_x(x,t) \theta_y(x,t) \right] \\
 u_y^{NL}(x,t) &= -\frac{y}{2} \left[(\phi_x(x,t))^2 + \left(\theta_z(x,t) - \frac{u_{xc}(x,t)}{R} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \left(\theta_z(x,t) - \frac{u_{xc}(x,t)}{R} \right) \theta_y(x,t) \\
 u_z^{NL}(x,t) &= -\frac{z}{2} \left[(\phi_x(x,t))^2 + (\theta_y(x,t))^2 \right] - \frac{y}{2} \left(\theta_z(x,t) - \frac{u_{xc}(x,t)}{R} \right) \theta_y(x,t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

En (1) los superíndices “L” y “NL” identifican a las componentes lineales y no lineales del campo de desplazamiento. $u_{xc}(x,t)$ es el desplazamiento axial, $\theta_z(x,t)$ y $\theta_y(x,t)$ son parámetros de rotación flexionales (los cuales, en el caso de una viga recta coinciden con las rotaciones flexionales), $u_{yc}(x,t)$ y $u_{zc}(x,t)$ son los desplazamientos transversales de la sección, $\phi_x(x,t)$ es la rotación torsional de la sección y $\theta_x(x,t)$ es una variable de intensidad de alabeo. ω es la función de alabeo que viene expresada como:

$$\omega(s,n) = \omega_p(s) + \omega_s(s,n) \tag{2}$$

con

$$\begin{aligned}
 \omega_p(s) &= \int_s [r(s) - \psi(s)] ds - D_C \\
 \omega_s(s,n) &= -n l(s)
 \end{aligned} \tag{3}$$

siendo

$$\psi(s) = \frac{I}{A_{66}(s)} \left[\frac{\int_s r(s) ds}{\int_s \frac{1}{A_{66}(s)} ds} \right], \quad D_C = \frac{\int_s [r(s) - \psi(s)] A_{11}(s) ds}{\int_s A_{11}(s) ds} \tag{4}$$

Donde A_{66} y A_{11} son coeficientes de elasticidad transversales y normales por unidad de longitud^[9], que pueden variar a lo largo del perímetro. La función $\psi(s)=0$ en el caso de una sección abierta, y las cantidades $r(s)$ y $l(s)$, fundamentales para describir la función de alabeo, se definen como:

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \tag{5}$$

En esta última expresión, las coordenadas $[Y(s), Z(s)]$ identifican a las coordenadas del

punto **A** sobre la línea media de la pared (Figura 2) y cualquier otro punto **B**, queda referido respecto de las coordenadas del punto **A** según la siguiente expresión:

$$y(s)=Y(s)-n\frac{dZ}{ds}, \quad z(s)=Z(s)+n\frac{dY}{ds} \tag{6}$$

2.2 Estado de deformaciones

El estado de deformaciones e_{ij} , de un cuerpo curvo como el de la Figura 1, considerando como hipótesis cinemáticas (1) viene dado por:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{NL} + \eta_{ij}^L + \eta_{ij}^{NL} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^L &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^L}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^L}{\partial x_j} \right), \quad \varepsilon_{ij}^{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^{NL}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{NL}}{\partial x_j} \right), \quad \eta_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right) \\ \eta_{ij}^{NL} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^{NL}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \tag{8}$$

Siendo ε_{ij}^L las componentes de primer orden debidas a desplazamientos lineales, ε_{ij}^{NL} las componentes de primer orden debidas a desplazamientos no lineales, η_{ij}^L las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos lineales y η_{ij}^{NL} las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos no lineales. Estas últimas por hipótesis **H.5** se consideran despreciables frente a las restantes, que de acuerdo a la hipótesis **H.4** vienen descriptas como:

$$\varepsilon_{xx}^L = (\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4}) \mathcal{F} \tag{9}$$

$$\gamma_{xy}^L = 2\varepsilon_{xy}^L \cong \left[\varepsilon_{D5} - \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \varepsilon_{D7} \right] \mathcal{F} \tag{10}$$

$$\gamma_{xz}^L = 2\varepsilon_{xz}^L \cong \left[\varepsilon_{D6} + \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \varepsilon_{D8} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \varepsilon_{D7} \right] \mathcal{F} \tag{11}$$

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \left\{ -y \left[\frac{\partial (\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] + z \left[\frac{\partial (\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} - \varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \tag{12}$$

$$\gamma_{xy}^{NL} = 2\varepsilon_{xy}^{NL} = - \left\{ \varepsilon_{B1} \varepsilon_{B2} + y \left[\frac{\partial \varepsilon_{B2}^2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{B3}^2}{\partial x} \right] + z \left[\frac{\partial (\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B2}}{R} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \tag{13}$$

$$\gamma_{xz}^{NL} = 2\varepsilon_{xz}^{NL} = \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B2}}{2} - \left\{ y \frac{\partial (\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3})}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \varepsilon_{B2}^2}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{B1}^2}{\partial x} \right] \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \tag{14}$$

$$\eta_{xx}^L = \left\{ \chi_3 \left(\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4} \right)^2 + \left(\varepsilon_{B6} + y \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\mathcal{F}^2}{2} + \left[\varepsilon_{B5} - z \varepsilon_{D8} + \chi_4 \left(\frac{y}{R} \varepsilon_{B3} + \frac{\omega}{R} \varepsilon_{B4} \right) \right]^2 \frac{\mathcal{F}^2}{2} \quad (15)$$

$$\eta_{xy}^L = \left\{ \left(-\varepsilon_{B3} - \varepsilon_{B4} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4} \right) + \varepsilon_{B2} \left(\varepsilon_{B6} + y \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right) \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (16)$$

$$\eta_{xz}^L = \left\{ \left(-\varepsilon_{B1} - \varepsilon_{B4} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \left(\varepsilon_{D1} - y \varepsilon_{D3} - z \varepsilon_{D2} - \omega \varepsilon_{D4} \right) \right\} \frac{\mathcal{F}}{2} - \varepsilon_{B2} \left(\varepsilon_{B5} - z \varepsilon_{D8} + \frac{y}{R} \varepsilon_{B3} + \frac{\omega}{R} \varepsilon_{B4} \right) \frac{\mathcal{F}}{2} \quad (17)$$

donde las ε_{D1} , ε_{D2} , ε_{B1} , etc. se definen como sigue para simplificar y condensar notación:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \left(\frac{\partial u_{xc}}{\partial x} + \frac{u_{yc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{D2} = \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\phi_x}{R} \right), \quad \varepsilon_{D3} = \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{I \partial u_{xc}}{R \partial x} \right), \quad \varepsilon_{D4} = \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{I \partial \theta_y}{R \partial x} \right) \\ \varepsilon_{D5} &= \left(\frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z \right), \quad \varepsilon_{D6} = \left(\frac{\partial u_{zc}}{\partial x} - \theta_y \right), \quad \varepsilon_{D7} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x \right), \quad \varepsilon_{D8} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\theta_y}{R} \right) \\ \varepsilon_{B1} &= \theta_y, \quad \varepsilon_{B2} = \phi_x, \quad \varepsilon_{B3} = \left(\theta_z - \frac{u_{xc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{B4} = \left(\theta_x - \frac{\theta_y}{R} \right), \quad \varepsilon_{B5} = \left(\frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \frac{u_{xc}}{R} \right), \quad \varepsilon_{B6} = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} \end{aligned} \quad (18)$$

La función \mathcal{F} que cuantifica el efecto de curvatura se define y aproxima como sigue:

$$\mathcal{F} = \frac{R}{R+y} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} \cong 1 - \chi_1 \frac{Y(s)}{R} + \chi_2 \frac{Y(s)^2}{R^2} \quad (19)$$

siendo χ_1 y χ_2 coeficientes cuyos valores permiten considerar diferentes hipótesis de gran curvatura (de aproximación lineal: $\chi_1=1$ y $\chi_2=0$ o cuadrática $\chi_1=\chi_2=1$) o bien la hipótesis de curvatura baja ($\chi_1=\chi_2=0$).

2.3 El Principio de Trabajos Virtuales

La expresión general del principio de trabajos virtuales, considerando estados de tensiones iniciales arbitrarios, se puede escribir de acuerdo con la expresión (20). Donde $\mathcal{T}_{(1)}$ es el trabajo virtual de las deformaciones lineales sobre las tensiones incrementales. $\mathcal{T}_{(2)}$ identifica al trabajo virtual de las tensiones iniciales debido a las deformaciones no lineales (12-14) y deformaciones de segundo orden (15-17), $\mathcal{T}_{(3)}$ es el trabajo virtual de los desplazamientos lineales sobre las fuerzas volumétricas y superficiales externas y $\mathcal{T}_{(4)}$ es el trabajo virtual de los desplazamientos lineales sobre las fuerzas de Inercia

$$\underbrace{\int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^L dV}_{\mathcal{F}_{(1)}} + \underbrace{\int \sigma_{ij}^0 (\delta \eta_{ij}^L + \delta \varepsilon_{ij}^{NL}) dV}_{\mathcal{F}_{(2)}} + \underbrace{\left(- \int \bar{X}_i \delta u_i^L dV - \int_{S_2} \bar{T}_i \delta u_i^L dA \right)}_{\mathcal{F}_{(3)}} + \underbrace{\int \rho \ddot{u}_i^L \delta u_i^L dV}_{\mathcal{F}_{(4)}} = 0 \quad (20)$$

Las componentes del principio de trabajos virtuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(1)} = & \int [Q_X \delta \varepsilon_{D1} - M_Y \delta \varepsilon_{D3} - M_Z \delta \varepsilon_{D2} - B \delta \varepsilon_{D4}] dx + \\ & + \int [Q_Y \delta \varepsilon_{D5} + Q_Z \delta \varepsilon_{D6} + T_{SY} \delta \varepsilon_{D8} + T_W \delta \varepsilon_{D7}] dx \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(2)} = & \frac{\delta}{2} \int \left\{ \mathcal{J}_1^{(0)} [\varepsilon_{B5}^2 + \varepsilon_{B6}^2 + \chi_3 \varepsilon_{D1}^2] + \mathcal{J}_2^{(0)} [\varepsilon_{D8}^2 + \chi_3 \varepsilon_{D2}^2] \right\} dx + \\ & + \frac{\delta}{2} \int \left\{ \mathcal{J}_3^{(0)} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} \right)^2 + \chi_3 \varepsilon_{D3}^2 + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3}^2}{R^2} \right] + \mathcal{J}_4^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D4}^2 + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B4}^2}{R^2} \right] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_5^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D2} \varepsilon_{D3} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{D8}}{R} \right] + \mathcal{J}_6^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D3} \varepsilon_{D4} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B4}}{R^2} \right] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_7^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D4} \varepsilon_{D2} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D8}}{R} \right] - \mathcal{J}_8^{(0)} \left[\chi_3 \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D4} - \chi_4 \frac{\varepsilon_{B5} \varepsilon_{B4}}{R} \right] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ \mathcal{J}_9^{(0)} \left[\varepsilon_{B6} \frac{\partial \varepsilon_{B2}}{\partial x} - \chi_3 \varepsilon_{D3} \varepsilon_{D1} + \chi_4 \frac{\varepsilon_{B3} \varepsilon_{B5}}{R} \right] - \mathcal{J}_{10}^{(0)} [\chi_3 \varepsilon_{D1} \varepsilon_{D2} + \varepsilon_{B5} \varepsilon_{D8}] \right\} dx + \\ & + \frac{\delta}{2} \int \left\{ M_Z^{(0)} \left[- \frac{\partial (\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B1})}{\partial x} \frac{\varepsilon_{B2}^2 + \varepsilon_{B3}^2}{R} \right] + M_Y^{(0)} \left[\frac{\partial (\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3})}{\partial x} \frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{B3}}{R} \right] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ Q_Y^{(0)} \left[\varepsilon_{B6} \varepsilon_{B2} - \varepsilon_{D1} \varepsilon_{B3} - \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B1}}{2} \right] + Q_Z^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B3}}{2} - \varepsilon_{D1} \varepsilon_{B1} - \varepsilon_{B2} \varepsilon_{B5} \right] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ M_X^{(0)} \left[\frac{\varepsilon_{B1} \varepsilon_{D3}}{2} - \frac{\varepsilon_{D2} \varepsilon_{B3}}{2} \right] + Q_{ZW}^{(0)} \left[\varepsilon_{D4} \varepsilon_{B1} - \frac{\varepsilon_{B2} \varepsilon_{B4}}{R} \right] + Q_{YW}^{(0)} [\varepsilon_{D4} \varepsilon_{B3}] \right\} dx + \\ & + \delta \int \left\{ T_{WY}^{(0)} [\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D3}] + T_{WZ}^{(0)} [\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D2}] + T_{WW}^{(0)} [\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D4}] - T_W^{(0)} [\varepsilon_{B4} \varepsilon_{D1}] \right\} dx \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(3)} = & - \int [\mathcal{Q}_1(x,t) \delta u_{xc} + \mathcal{Q}_3(x,t) \delta \theta_z + \mathcal{Q}_5(x,t) \delta \theta_y + \mathcal{Q}_7(x,t) \delta \theta_x] dx - \\ & - \int [\mathcal{Q}_2(x,t) \delta u_{yc} + \mathcal{Q}_4(x,t) \delta u_{zc} + \mathcal{Q}_6(x,t) \delta \phi_x] dx = - \int \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathcal{P}] dx \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(4)} = & \int [\mathcal{L}_1(x) \delta u_{xc} + \mathcal{L}_3(x) \delta \theta_z + \mathcal{L}_5(x) \delta \theta_y + \mathcal{L}_7(x) \delta \theta_x] dx + \\ & + \int [\mathcal{L}_2(x) \delta u_{yc} + \mathcal{L}_4(x) \delta u_{zc} + \mathcal{L}_6(x) \delta \phi_x] dx = \int \{\delta \mathbf{U}\}^T [\mathcal{M}] \{\ddot{\mathbf{U}}\} dx \end{aligned} \quad (24)$$

En las expresiones (21) a (24) se han efectuado las siguientes definiciones:

$$\{\mathbf{U}\} = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\}^T, \{\ddot{\mathbf{U}}\} = \{\ddot{u}_{xc}, \ddot{u}_{yc}, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zc}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x\}^T \quad (25)$$

$$[\mathcal{P}] = [\mathcal{L}_1(x,t) \quad \mathcal{L}_2(x,t) \quad \mathcal{L}_3(x,t) \quad \mathcal{L}_4(x,t) \quad \mathcal{L}_5(x,t) \quad \mathcal{L}_6(x,t) \quad \mathcal{L}_7(x,t)]^T \quad (26)$$

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} \check{M}_{11} & 0 & \check{M}_{13} & 0 & \check{M}_{15} & 0 & \check{M}_{17} \\ & \check{M}_{22} & 0 & 0 & 0 & \check{M}_{26} & 0 \\ & & \check{M}_{33} & 0 & \check{M}_{35} & 0 & \check{M}_{37} \\ & & & \check{M}_{44} & 0 & \check{M}_{46} & 0 \\ & & & & \check{M}_{55} & 0 & \check{M}_{57} \\ & sim & & & & \check{M}_{66} & 0 \\ & & & & & & \check{M}_{77} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\{\mathbf{Q}_X, \mathbf{M}_Y, \mathbf{M}_Z, \mathbf{B}\} = \int_A \sigma_{xx} \{l, z, y, \omega\} dA, \{\mathbf{Q}_Y, \mathbf{Q}_Z\} = \int_A \{\sigma_{xy}, \sigma_{xz}\} dA \quad (28)$$

$$\{\mathbf{T}_{SV}, \mathbf{T}_W\} = \int_A \left\{ \left[\sigma_{xz} \left(y - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \sigma_{xy} \left(z + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right], \left[\sigma_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right\} dA \quad (29)$$

$$\mathbf{M}_X = \int_A [\sigma_{xz} y - \sigma_{xy} z] dA = \mathbf{T}_{SV} + \mathbf{T}_W \quad (30)$$

$$\mathcal{J}_1^{(0)} = \mathbf{Q}_X^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{M}_Z^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{YY}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_2^{(0)} = \mathbf{N}_{ZZ}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YZZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{YZZ}^{(0)}}{R^2} \quad (31)$$

$$\mathcal{J}_3^{(0)} = \mathbf{N}_{YY}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{Y3}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y4}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_4^{(0)} = \mathbf{N}_{WW}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YW2}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y2W2}^{(0)}}{R^2} \quad (32)$$

$$\mathcal{J}_5^{(0)} = \mathbf{N}_{YZ}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YZZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y3Z}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_6^{(0)} = \mathbf{N}_{YW}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{Y2W}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y3W}^{(0)}}{R^2} \quad (33)$$

$$\mathcal{J}_7^{(0)} = \mathbf{N}_{ZW}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YZW}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y2ZW}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_8^{(0)} = \mathbf{B}^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YW}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y2W}^{(0)}}{R^2} \quad (34)$$

$$\mathcal{J}_9^{(0)} = \mathbf{M}_Z^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YY}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y3}^{(0)}}{R^2}, \quad \mathcal{J}_{10}^{(0)} = \mathbf{M}_Y^{(0)} - \chi_1 \frac{\mathbf{N}_{YZ}^{(0)}}{R} + \chi_2 \frac{\mathbf{N}_{Y2Z}^{(0)}}{R^2} \quad (35)$$

$$\{\mathbf{Q}_X^{(0)}, \mathbf{M}_Y^{(0)}, \mathbf{M}_Z^{(0)}, \mathbf{B}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{l, z, y, \omega\} dA, \mathbf{Q}_{YW}^{(0)} = \int_A \sigma_{xy}^0 \omega dA, \mathbf{Q}_{ZW}^{(0)} = \int_A \sigma_{xz}^0 \omega dA \quad (36)$$

$$\{N_{YY}^{(0)}, N_{ZZ}^{(0)}, N_{WW}^{(0)}, N_{ZW}^{(0)}, N_{YW}^{(0)}, N_{YZ}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^2, z^2, \omega^2, z\omega, y\omega, yz\} dA \quad (37)$$

$$\{T_W^{(0)}, T_{WZ}^{(0)}, T_{WY}^{(0)}, T_{WW}^{(0)}\} = \int_A \left(\sigma_{xy}^0 \frac{\partial \omega}{\partial y} + \sigma_{zx}^0 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \{l, z, y, \omega\} dA \quad (38)$$

$$M_X^{(0)} = \int_A [\sigma_{xz}^0 y - \sigma_{xy}^0 z] dA = T_W^{(0)} + T_{SV}^{(0)} \quad (39)$$

$$\{N_{Y4}^{(0)}, N_{YZ}^{(0)}, N_{Y3W}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^4, y^3 z, y^3 \omega\} dA \quad (40)$$

$$\{N_{YZZZ}^{(0)}, N_{YZWZ}^{(0)}, N_{YZZW}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^2 z^2, y^2 \omega^2, y^2 z\omega\} dA$$

$$\{N_{Y3}^{(0)}, N_{YZZ}^{(0)}, N_{Y2W}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y^3, y^2, y^2 \omega\} dA, \quad (41)$$

$$\{N_{YZW}^{(0)}, N_{YZZ}^{(0)}, N_{YWZ}^{(0)}\} = \int_A \sigma_{xx}^0 \{y z \omega, z^2 y, \omega^2 y\} dA$$

$$\mathcal{Q}_1(x,t) = \int_A \bar{X}_x \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_2(x,t) = \int_A \bar{X}_y \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_3(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{y}{\mathcal{F}} dA \quad (42)$$

$$\mathcal{Q}_4(x,t) = \int_A \bar{X}_z \frac{1}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_5(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{z}{\mathcal{F}} dA, \quad \mathcal{Q}_7(x,t) = - \int_A \bar{X}_x \frac{\omega}{\mathcal{F}} dA \quad (43)$$

$$\mathcal{Q}_6(x,t) = \int_A (\bar{X}_z y - \bar{X}_y z) \frac{1}{\mathcal{F}} dA \quad (44)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{11} = \left(J_{11}^p + \frac{2J_{13}^p}{R} + \frac{J_{33}^p}{R^2} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{13} = - \left(J_{13}^p + \frac{J_{33}^p}{R} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{15} = \left(-J_{12}^p + \frac{J_{14}^p}{R} - \frac{J_{23}^p}{R} + \frac{J_{34}^p}{R^2} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{46} = J_{13}^p \quad (45)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{17} = - \left(J_{14}^p + \frac{J_{34}^p}{R} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{35} = \left(J_{23}^p - \frac{J_{34}^p}{R} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{33} = J_{33}^p, \quad \tilde{\mathcal{M}}_{37} = J_{34}^p, \quad \tilde{\mathcal{M}}_{22} = \tilde{\mathcal{M}}_{44} = J_{11}^p \quad (46)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{55} = \left(J_{22}^p - \frac{2J_{24}^p}{R} + \frac{J_{44}^p}{R^2} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{37} = \left(J_{24}^p - \frac{J_{44}^p}{R} \right), \quad \tilde{\mathcal{M}}_{77} = J_{44}^p, \quad \tilde{\mathcal{M}}_{26} = -J_{12}^p, \quad \tilde{\mathcal{M}}_{66} = (J_{22}^p + J_{33}^p) \quad (47)$$

donde las constantes J_{ij}^p se definen de acuerdo a la siguiente expresión:

$$J_{ij}^p = \int_A \rho \bar{g}_i^{(a)} \bar{g}_j^{(a)} \frac{1}{\mathcal{F}} dA \quad (48)$$

con $\bar{g}^{(a)}$ dado por la expresión (54) y con \mathcal{F} dada por la primera de (19).

$$\bar{g}^{(a)} = \left\{ l, Z + n \frac{dY}{ds}, Y - n \frac{dZ}{ds}, \omega_p + n l(s) \right\} \quad (49)$$

En las expresiones (20)-(30) se definen las resultantes de tensión en el área que identifican a los esfuerzos representativos de una viga, estos son Esfuerzo Normal, \mathbf{Q}_x ; Momentos Flectores, \mathbf{M}_Y y \mathbf{M}_Z , Bimomento, \mathbf{B} ; Esfuerzos de Corte, \mathbf{Q}_Y y \mathbf{Q}_Z ; Momento de Torsión Pura, \mathbf{T}_{sv} , Momento Flexotorsor, \mathbf{T}_w y momento torsor total \mathbf{M}_x .

En las expresiones (31)-(41) se definen resultantes generalizadas de tensiones iniciales en el área, las cuales en algunos casos son homogéneas a los esfuerzos iniciales, en otros casos como por ejemplo (40)-(41) son resultantes generalizadas no relacionadas con esfuerzos de viga conocidos. Estos esfuerzos iniciales son fundamentales para el cálculo de cargas críticas de pandeo y de frecuencias bajo estados de precarga, los cuales se obtienen mediante un análisis estático previo.

Las expresiones (42)-(44) representan las componentes de carga externa. Mientras que las expresiones (45)-(47) representan las fuerzas de inercia presentes en el cuerpo curvo.

2.4 Expresiones constitutivas en términos de las deformaciones generalizadas

Las relaciones constitutivas básicas, atendiendo a las hipótesis **H.4** a **H.7**, se pueden escribir en términos de las resultantes de tensión en el espesor \mathbf{N}_{xx} , \mathbf{N}_{xs} , \mathbf{N}_{xn} , \mathbf{M}_{xx} y \mathbf{M}_{xs} como función de las deformaciones de placas, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_{xx} \\ \mathbf{N}_{xs} \\ \mathbf{N}_{xn} \\ \mathbf{M}_{xx} \\ \mathbf{M}_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{16} & 0 & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{66} & 0 & \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} & 0 & \bar{D}_{16} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xs} \\ \gamma_{xn} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix} \quad (50)$$

siendo

$$\varepsilon_{xx} = [\varepsilon_{D1} - Y(s)\varepsilon_{D3} - Z(s)\varepsilon_{D2} - \omega_p(s)\varepsilon_{D4}] \mathcal{F}, \kappa_{xx} = \left[\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D2} - l(s)\varepsilon_{D4} \right] \mathcal{F} \quad (51)$$

$$\gamma_{xs} = \left[\frac{dY}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D6} + [r(s) + \psi(s)] \varepsilon_{D7} + \psi(s)\varepsilon_{D8} \right] \mathcal{F}, \kappa_{xs} = [-2\varepsilon_{D8} + \varepsilon_{D7}] \mathcal{F} \quad (52)$$

$$\gamma_{xn} = \left[-\frac{dZ}{ds} \varepsilon_{D5} + \frac{dY}{ds} \varepsilon_{D6} + l(s)\varepsilon_{D7} \right] \mathcal{F} \quad (53)$$

Para obtener los coeficientes en (50) se ha supuesto que $\mathbf{N}_{ss} = \mathbf{M}_{ss} = 0$, de tal forma que se determinan las deformaciones ε_{ss} , ε_{sn} , ε_{nn} ^[9] en términos de ε_{xx} , γ_{xs} , γ_{xn} , κ_{xx} y κ_{xs} contemplando así efectos tridimensionales que se generan por los acoplamientos del material. En el caso de un material isotrópico, esta operatoria no es necesaria.

De forma que teniendo en cuenta (50) y considerando (51) a (53), la expresión general de

las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en función de las deformaciones generalizadas queda con la siguiente forma:

$$\{\mathbf{Q}^E\} = [\mathbf{J}_E] \{\Delta\} \tag{54}$$

Donde $\{\mathbf{Q}^E\}$ es el vector de esfuerzos generalizados de viga, $\{\Delta\}$ es el vector de deformaciones generalizadas y $[\mathbf{J}_E]$ es la matriz constitutiva de los esfuerzos. Los cuales se describen a continuación:

$$\{\mathbf{Q}^E\} = \{Q_X \quad M_Y \quad M_Z \quad B \quad Q_Y \quad Q_Z \quad T_W \quad T_{SV}\}^T \tag{55}$$

$$\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T \tag{56}$$

$$[\mathbf{J}_E] = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{12}^{11} & J_{13}^{11} & J_{14}^{11} & J_{15}^{16} & J_{16}^{16} & J_{17}^{16} & J_{18}^{16} \\ & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & J_{24}^{16} & J_{25}^{16} & J_{26}^{16} & J_{27}^{16} & J_{28}^{16} \\ & & J_{33}^{11} & J_{34}^{16} & J_{35}^{16} & J_{36}^{16} & J_{37}^{16} & J_{38}^{16} \\ & & & J_{44}^{11} & J_{45}^{16} & J_{46}^{16} & J_{47}^{16} & J_{48}^{16} \\ & & & & J_{55}^{66} & J_{56}^{66} & J_{57}^{66} & J_{58}^{66} \\ & & & & & J_{66}^{66} & J_{67}^{66} & J_{68}^{66} \\ & & & & & & J_{77}^{66} & J_{78}^{66} \\ & & & & & & & J_{88}^{66} \end{bmatrix} \tag{57}$$

Los elementos de la matriz constitutiva (57) de los esfuerzos se obtienen con la expresión:

$$\begin{aligned} J_{ij}^{kh} = & \int \bar{A}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(b)}) \mathcal{F} ds + \int \bar{B}_{kh} (\bar{g}_i^{(b)} \bar{g}_j^{(d)} + \bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(b)}) \mathcal{F} ds + \\ & + \int \bar{A}_{55}^{(H)} (\bar{g}_i^{(c)} \bar{g}_j^{(c)}) \mathcal{F} ds + \int \bar{D}_{kh} (\bar{g}_i^{(d)} \bar{g}_j^{(d)}) \mathcal{F} ds \end{aligned} \tag{58}$$

para $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$ y $\{h, k\} = \{1, 6\}$ y con los vectores:

$$\bar{g}^{(b)} = \left\{ l, Z(s), Y(s), \omega_p(s), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) - \psi(s), \psi(s) \right\} \tag{59}$$

$$\bar{g}^{(c)} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{dZ}{ds}, -\frac{dY}{ds}, -l(s), 0 \right\}, \bar{g}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, l, -2 \right\} \tag{60}$$

La teoría hasta aquí expuesta se puede reducir a un modelo sin flexibilidad por corte cuando se impone las siguientes condiciones:

$$\theta_z = \frac{\partial u_{yc}}{\partial x}, \quad \theta_y = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x}, \quad \theta_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \tag{61}$$

En tanto que las condiciones (61) no sean empleadas, el modelo contemplará la flexibilidad por corte en forma completa.

3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

La teoría descrita en el apartado anterior se ha implementado numéricamente sobre el método de elementos finitos. Para ello, se ha desarrollado un elemento de tipo isoparamétrico de cinco nodos que permite representar apropiadamente la mecánica de los movimientos “en el plano” y “fuera del plano” característicos de un arco dispuesto en un plano.

En la Figura 3 se puede observar el elemento finito con los desplazamientos genéricos, definidos en la primera de (25). La forma de interpolación de un desplazamiento generalizado $U_i(x)$ vendrá dada por la siguiente expresión genérica ^[11]:

$$U_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{N_N} \mathbf{f}_j(\bar{x}) U_i^{(j)} \quad \text{con } i = 1, \dots, 7 \quad \text{con } \bar{x} \in [0, 1] \quad (62)$$

N_N es el número de nodos del elemento, \bar{x} es la coordenada intrínseca del elemento y $\mathbf{f}_j(\bar{x})$ son las funciones de forma del elemento definidas según las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\bar{x}) &= 1 - \frac{25}{3}\bar{x} + \frac{70}{3}\bar{x}^2 - \frac{80}{3}\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4, & \mathbf{f}_2(\bar{x}) &= 16\bar{x} - \frac{208}{3}\bar{x}^2 + 96\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4 \\ \mathbf{f}_3(\bar{x}) &= -12\bar{x} + 76\bar{x}^2 - 128\bar{x}^3 + 64\bar{x}^4, & \mathbf{f}_4(\bar{x}) &= \frac{16}{3}\bar{x} - \frac{112}{3}\bar{x}^2 + \frac{224}{3}\bar{x}^3 - \frac{128}{3}\bar{x}^4 \\ \mathbf{f}_5(\bar{x}) &= -\bar{x} + \frac{22}{3}\bar{x}^2 - 16\bar{x}^3 + \frac{32}{3}\bar{x}^4 \end{aligned} \quad (63)$$

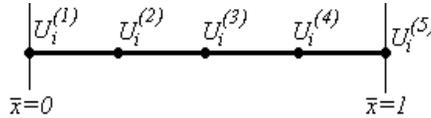


Figura 3. Descripción geométrica del elemento

El vector de desplazamientos nodales de (62) viene descrito de la siguiente manera:

$$\{\mathbf{U}\} = \left\{ \left\{ \mathbf{U}^{(1)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(2)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(3)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(4)} \right\}, \left\{ \mathbf{U}^{(5)} \right\} \right\} \quad (64)$$

con

$$\left\{ \mathbf{U}_{(j)}^{(i)} \right\} = \left\{ U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}, U_4^{(i)}, U_5^{(i)}, U_6^{(i)}, U_7^{(i)} \right\}^T = \left\{ u_{x_j}, u_{y_j}, \theta_{z_j}, u_{z_j}, \theta_{y_j}, \phi_{x_j}, \theta_{x_j} \right\}^T \quad (65)$$

Reemplazando (63) en (62), luego en las expresiones del trabajo virtual (21) a (24) y operando en la forma convencional, se obtiene la clásica ecuación general del método de elementos finitos:

$$([\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_G])\{\mathbf{W}\} + [\mathbf{M}]\{\dot{\mathbf{W}}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (66)$$

donde $[K]$, $[K_G]$ y $[M]$ son la matriz de rigidez global, la matriz de rigidez geométrica global y la matriz de masa global, respectivamente. En tanto que, $\{W\}$, $\{\dot{W}\}$ y $\{P\}$ son el vector global de desplazamientos nodales, el vector global de aceleraciones nodales y el vector global de cargas nodales.

De la ecuación general (66) se derivan las siguientes expresiones particulares:

$$([K] + [K_G] - \Omega^2 [M])\{W^*\} = \{P\} \tag{67}$$

$$([K] + \lambda [K_G] - \Omega^2 [M])\{W^*\} = \{0\} \tag{68}$$

cuando se impone un movimiento armónico como el siguiente:

$$\{W\} = \{W^*\} \text{Cos}[\Omega t] \tag{69}$$

siendo Ω la frecuencia circular del movimiento armónico, tal que $\Omega = 2\pi f$ y siendo f la frecuencia medida en Hertz.. Para evitar problemas de bloqueo por corte se recurre al uso de integración reducida ^[11] en los términos del funcional de trabajos virtuales que contengan a las deformaciones por corte ϵ_{D5} , ϵ_{D6} y ϵ_{D7} . Con este elemento se pueden obtener las soluciones correspondientes a la teoría sin flexibilidad por corte mencionada en el anterior apartado, mediante la inclusión de funciones de penalización en los coeficientes de rigidez por corte J_{55}^{66} , J_{66}^{66} y J_{77}^{66} y anulando los restantes coeficientes de las filas y columnas adyacentes ^[2,3,8].

4 ANÁLISIS PARAMETRICO

A continuación se mostrarán una serie de ejemplos estática, inestabilidad, vibraciones libres y vibraciones bajo estados de tensiones iniciales con el fin de ponderar el efecto de corte en la mecánica de las vigas curvas anisótropas. En la Figura 4 se pueden ver un perfil rectangular y un perfil H, ambos con laminados simétricos y balanceados, los cuales serán utilizados como esquemas básicos para los subsiguientes estudios. Las propiedades elásticas del material se exponen en la Tabla 1.

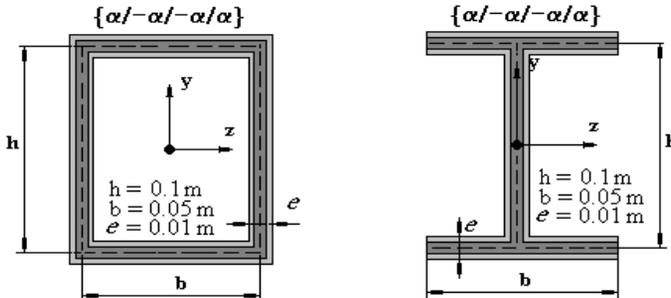


Figura 4. Descripción de las secciones a utilizar en este estudio

$E_{11} = 141.96 \text{ GPa}$	$E_{22} = E_{33} = 9.79 \text{ GPa}$
$G_{12} = G_{13} = 6.00 \text{ GPa}$	$G_{23} = 4.14 \text{ GPa}$
$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.24$	$\nu_{23} = 0.5 \quad \rho = 1389 \text{ Kg/m}^3$

Tabla 1. Propiedades elásticas del material

4.1 Análisis del efecto de corte en estática

En la Figura 5 se muestra un arco empotrado en ambos extremos que se halla solicitado por una carga $Q_z = -100 \text{ N}$, aplicada en $x=L/2$. Este ejemplo, se calcula con 4 elementos, que son más que suficientes para obtener una precisión óptima^[11] en este tipo de problemas. Para comparar el efecto de la flexibilidad por corte se definen los siguientes dos parámetros:

$$\Lambda_u = \frac{u_{zc}(x_i)_{MCFCC}}{u_{zc}(x_i)_{MSFC}}, \quad \Lambda_\phi = \frac{\phi_x(x_i)_{MCFCC}}{\phi_x(x_i)_{MSFC}} \quad (68)$$

En (68), el punto x_i , corresponde al punto donde se aplica la carga, y con *MCFCC* y *MSFC* se identifican los modelos que consideran la flexibilidad por corte y que la desprecian respectivamente. El *MSFC* se obtiene del *MCFCC* al imponer las condiciones (61).

En las Figuras 6 y 7, para diferentes ángulos de refuerzo fibroso, se comparan los valores de los parámetros de desplazamientos flexionales y torsionales para las dos secciones. Se puede observar en la Figura 6 que el efecto de corte cobra importancia insoslayable en los laminados cercanos a 0° y disminuye hacia 45° . Por otro lado se puede apreciar de la Figura 7 que la deformabilidad por corte torsional debido a alabeo no uniforme es mayor en las secciones abiertas que en las secciones cerradas, en virtud de que en estas últimas, el mecanismo de deformación por torsión esta gobernado en mayor medida por torsión pura, con una pequeña componente de alabeo. En cambio las secciones abiertas poseen un mecanismo de deformación torsional donde el alabeo y los momentos flexotorsores relacionados con el alabeo son predominantes.

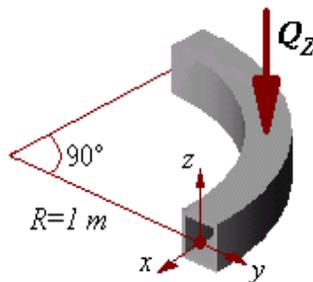


Figura 5. Características del arco anisótropo

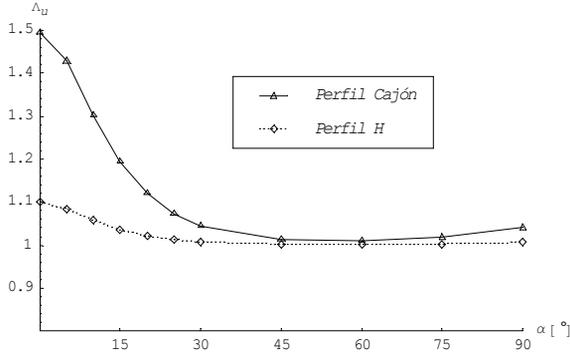


Figura 6. Comparación del parámetro flexional

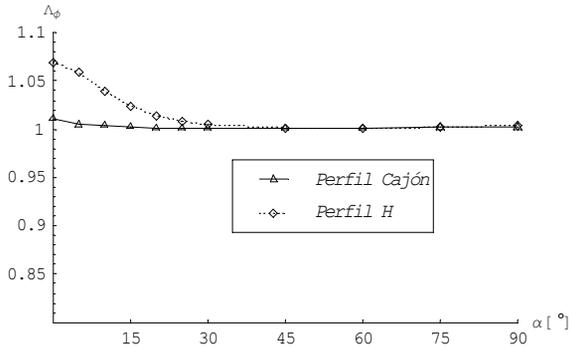


Figura 7. Comparación del parámetro torsional

4.2 Inestabilidad de arcos deformables por corte.

En la Figura 8 se muestra un arco biempotrado de radio unitario y abertura angular de 180° , sometido a una carga radial de pandeo Q_Y , aplicada en el centro de referencia. Para poder obtener las cargas de pandeo, se confeccionan modelos de 10 elementos. En la Figura 9 se muestran las variaciones de la carga de pandeo con respecto al ángulo de refuerzo de las fibras en el modelo deformable por corte, para los dos tipos de sección. Nótese que el patrón de variación con respecto al ángulo posee un máximo en 15° en la sección cerrada.

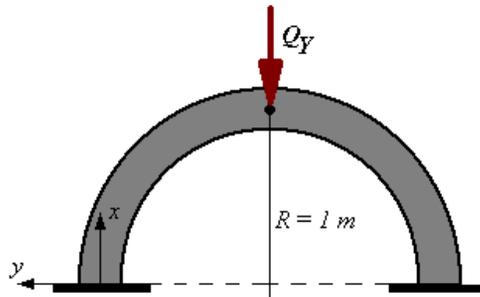


Figura 8. Características del arco anisótropo.

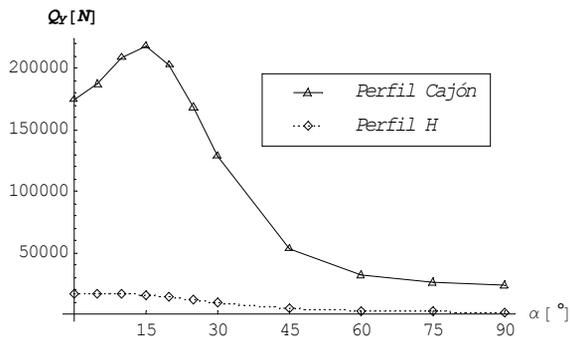


Figura 9. Comparación de las cargas de pandeo de la sección cajón y sección.

4.3 Vibraciones libres y bajo tensiones iniciales

En la Tabla 2, se muestran las primeras 6 frecuencias de los modelos con y sin deformabilidad por corte correspondientes al arco de la Figura 8, libre de cargas, para el perfil cajón de la Figura 4 con un laminado {15/-15/-15/15}. En la misma también se disponen los modos de vibración, indicando con la sigla FT-FP modos flexotorsionales fuera del plano y con FE-EP, modos flexionales-extensionales en el plano. En la Tabla 3 se comparan las frecuencias del modelo deformable por corte de Tabla 2 con las frecuencias del mismo, obtenidas considerando dos estados de carga inicial de 1/3 y 1/5 de la carga crítica correspondiente al laminado, la cual fue calculada en el apartado anterior. Tanto las frecuencias de vibración libre como las frecuencias de vibración bajo estado de tensión inicial, se han obtenido con modelos de 10 elementos finitos. Se puede apreciar en la Tabla 3 que los estados de tensión inicial solamente alteran sustancialmente el valor de las frecuencias más bajas, llegando en este caso al 20% en la primer frecuencia, mientras que las frecuencias

más altas no se ven mayormente afectadas por los estados de tensión inicial.

Número de Orden	Frecuencia [Hz] Considerando deformabilidad por corte		Frecuencia [Hz] Despreciando deformabilidad por corte	
	Valor	Modo	Valor	Modo
1	53.68	1 FT – FP	55.25	1 FT – FP
2	149.54	2 FT – FP	157.19	2 FT – FP
3	215.47	1 FE – EP	237.31	1 FE – EP
4	304.40	3 FT – FP	332.45	3 FT – FP
5	439.13	2 FE – EP	511.03	2 FE – EP
6	504.47	4 FT – FP	576.73	4 FT – FP

Tabla 2. Primeras seis frecuencias de vibración libre. Comparación del efecto de corte

De manera que la presencia de una carga compresiva como la dispuesta en la Figura 8, reduce el valor de las frecuencias en la medida que aquella aumenta, llegando a anular las frecuencias cuando la carga actuante es la carga crítica, según se desprende de (66). Nótese, a su vez que el efecto de las tensiones iniciales es más influyente en las frecuencias flexotorsionales fuera del plano, con diferencias porcentuales máximas de entre 4% y 20%. En cambio, para los modos flexionales-extensionales en el plano, las diferencias porcentuales máximas no superan 1%.

Número de Orden	Frecuencias [Hz] de Vibración Libre	Frecuencias [Hz] de Vibración bajo 1/5 de carga crítica	Frecuencias [Hz] de Vibración bajo 1/3 de carga crítica
1	53.68	48.44	44.49
2	149.54	145.70	143.05
3	215.47	214.09	213.16
4	304.40	298.85	294.98
5	439.13	437.15	435.83
6	504.47	499.83	496.67

Tabla 3. Comparación de las primeras seis frecuencias bajo carga inicial

5 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una teoría de vigas anisótropas de paredes delgadas curvadas en el plano, considerando deformabilidad por corte flexional y por alabeo. El modelo general de esta teoría se desarrolla empleando un campo de desplazamientos no lineal sustentado en las rotaciones finitas semitangenciales introducidas por Argyris. El planteo introducido en este modelo permite describir más apropiadamente los estados de deformación no lineales, fundamentales para la obtención de las cargas críticas de pandeo y frecuencias naturales bajo estados de tensiones iniciales. Paralelamente el modelo general deformable por

corte se puede reducir a un modelo no deformable por corte cuando se imponen las condiciones que anulan tal efecto y por otro lado también se reduce a un modelo de viga recta anisótropa cuando se impone la condición de radio infinito. Se ha desarrollado un elemento finito isoparamétrico de cinco nodos con el cual se han efectuado distintos estudios que han permitido evidenciar la importancia de la flexibilidad por corte en la mecánica de estos elementos estructurales juntamente con la versatilidad de diseño que ofrecen los materiales compuestos.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

7 REFERENCIAS

- [1] A. S. Gendy, A. F. Saleeb, *Vibration Analysis of Coupled Extensional/Flexural/Torsional Modes in Curved Beams With Arbitrary Thin Walled Sections*, Journal of Sound and Vibration, 174, 261-274 (1994).
- [2] M. T. Piovan, V.H. Cortínez, R.E. Rossi, *Vibrations of Curved I Beams with allowance of shear deformability*, Proceedings of VI World Congress on Computational Mechanics Buenos Aires. Argentina (1998).
- [3] V.H. Cortínez, M. T. Piovan, R.E. Rossi, *Out of plane Vibrations of thin-walled curved beams considering shear flexibility*, Structural Engineering and Mechanics 8(3), (1999).
- [4] G.S. Palani, S. Rajasekaran, *Finite Element analysis of thin walled curved beams made of composites*. Journal of Structural Engineering-ASCE 118(8). 2039-2062 (1992).
- [5] M.H. Kim, B.C. Min y M.W. Suh. *Spatial Stability of nonsymmetric Thin Walled Curved Beams I: Analytical approach*. Journal Engineering Mechanics-ASCE, 126(5) 497-505 (2000).
- [6] M.H. Kim, B.C. Min y M.W. Suh. *Spatial Stability of nonsymmetric Thin Walled Curved Beams II: Numerical approach*. Journal Engineering Mechanics-ASCE, 126(5) 506-514 (2000).
- [7] J.H. Argyris. *An excursion into large rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 32 85-155 (1982).
- [8] V.H. Cortínez., M.T. Piovan y R.E. Rossi. *Mecánica de Vigas Curvas de Paredes Delgadas Construidas con Materiales Compuestos*. Mecánica Computacional (AMCA) 19 269-274 (2000).
- [9] E.J. Barbero, *"Introduction to Composite Materials Design"*. Taylor and Francis (1998).
- [10] C. Kim y S. White, *Thick Walled Composite Beam Theory including 3D Elastic effects and Torsional Warping*. Intl Jou Solids and Structures. 34(31-32) 4237-4259 (1997).
- [11] E. Oñate. *El Cálculo de estructuras con Elementos Finitos*. Cimne. Barcelona (1992).
- [12] M.T. Piovan y V.H. Cortínez, *"Mecánica de Vigas Curvas anisótropas con secciones de paredes delgadas"*. Aceptada para su publicación en Revista Internacional de Métodos numéricos y Cálculo para Ingeniería.
- [13] V.H. Cortínez., M.T. Piovan y S.P. Machado. *"DQM for vibration analysis of composite*

thin walled curved beams". Journal of Sound and Vibration 246(3) 551-555 (2001).