

AVANCES DEL CALCULO FINITESIMAL EN MECÁNICA COMPUTACIONAL

E. Oñate y J.A. Arraez*

*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Edificio C1, Gran Capitan s/n
08034 Barcelona, España
e-mail: onate@cimne.upc.es, web page: <http://www.cimne.upc.es>

Palabras Clave: Cálculo finitesimal, mecánica computacional, convección-difusión.

Resumen. *La expresión cálculo finitesimal se refiere a la obtención de las ecuaciones diferenciales de gobierno en problemas de mecánica, invocando el balance (equilibrio) de flujos, fuerzas, etc... en un dominio de tamaño finito. Las ecuaciones diferenciales resultantes son diferentes de las clásicas de la teoría infinitesimal e incorporan nuevos términos que dependen de las dimensiones del dominio de balance. Las nuevas ecuaciones diferenciales permiten obtener esquemas numéricos estabilizados utilizando cualquier método numérico. El artículo presenta algunos avances recientes del cálculo finitesimal para la solución por el método de elementos finitos de problemas de convección-difusión con altos gradientes. Se presenta también un resumen de las posibilidades del cálculo finitesimal en problemas de flujo incompresible, mecánica de sólidos incompresibles y localización en sólidos.*

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que los métodos numéricos estándar como el de diferencias finitas centradas (DF), el método de elementos finitos de Galerkin (EF) y el método de volúmenes finitos (VF), entre otros, conducen a esquemas numéricos inestables cuando se aplican a problemas en los que intervienen diferentes escalas, múltiples restricciones y/o altos gradientes. Los ejemplos de estas situaciones son típicos en la solución de problemas de convección-difusión, en problemas de incompresibilidad en mecánica de fluidos y sólidos y en problemas de localización de deformaciones o de la velocidad de las deformaciones en sólidos y fluidos compresibles, utilizando el método de elementos finitos de Galerkin, diferencias finitas centradas, o algunos métodos de volúmenes finitos.^{1,2} Otras situaciones similares se encuentran en la aplicación de métodos sin malla a esos mismos problemas.³

Las fuentes de las inestabilidades numéricas en los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos, por ejemplo, se han buscado en la aparente incapacidad del método estándar de Galerkin en el MEF y del esquema análogo de diferencias centradas en DF para proporcionar un método numérico capaz de capturar las diferentes escalas que aparecen en las soluciones numéricas para todos los rangos de los parámetros físicos. Ejemplos típicos de estas dificultades son las oscilaciones numéricas espúreas en problemas de convección-difusión para valores altos de los términos convectivos. El mismo tipo de oscilaciones aparecen en la proximidad de capas internas con altos gradientes en problemas de flujo compresible a velocidades elevadas (choques) o en problemas de localización de deformaciones en sólidos (bandas de cortante). Un problema similar de naturaleza diferente surge en la solución de problemas de mecánica de sólidos y fluidos incompresibles, donde las dificultades para satisfacer la condición de incompresibilidad limita la selección de la aproximación para las velocidades (o los desplazamientos) y la presión.¹

La solución de estos problemas se ha intentado de varias maneras. El carácter sub-difusivo del esquema de diferencias finitas centradas en problemas de convección-difusión se ha corregido de una forma ad-hoc, añadiendo los denominados términos de *difusión artificial* a la ecuación diferencial original. La misma idea se ha aplicado con éxito para obtener métodos de volúmenes finitos y de elementos finitos estabilizados para problemas de convección-difusión y de mecánica de fluidos. Otros esquemas estabilizados de DF se basan en el cálculo hacia atrás (upwind) de las primeras derivadas que aparecen en el operador convectivo.² La equivalencia de las técnicas “upwind” en el MEF son los denominados métodos de Petrov-Galerkin,¹ o los métodos de Galerkin perturbado más generales que se basan en una extensión “ad-hoc” de la expresión variacional de Galerkin, utilizando términos función del residuo de la solución numérica para obtener un esquema numérico estable. Entre los muchos métodos de este tipo podemos nombrar el método SUPG,^{4,5} el método de mínimos cuadrados de Galerkin,⁶ el método de Galerkin a lo largo de las características⁷ y el método de las escalas en las submallas.⁸

En este artículo proponemos una ruta diferente para desarrollar métodos numéricos estabilizados. El punto de partida son las ecuaciones diferenciales de gobierno obtenidas

utilizando una técnica de *cálculo finitesimal* o *cálculo finito* (por “finite calculus” en inglés), en adelante “método FIC”. Este método se basa en invocar el balance de flujos (o de fuerzas) en un dominio de tamaño finito. Esto introduce términos adicionales en las ecuaciones diferenciales clásicas de la teoría infinitesimal, que son función de las dimensiones del dominio donde se establece el balance. El mérito de las ecuaciones diferenciales modificadas utilizando la técnica FIC es que conducen a esquemas estabilizados utilizando cualquier método numérico. Además, pueden recuperarse los distintos métodos estabilizados de DF, EF y VF más usuales. Más aún, las nuevas ecuaciones diferenciales son la base para calcular los parámetros de estabilización.

El contenido del artículo es el siguiente. En el siguiente apartado se explican algunas aplicaciones del método FIC a problemas de convección-difusión en los que existen altos gradientes en el contorno y en el interior del dominio, utilizando el MEF. Se detalla la metodología para obtener el vector de longitud característica y se presentan dos ejemplos de aplicación de la eficiencia del método para obtener soluciones estabilizadas en problemas con altos gradientes en un solo paso, o en un máximo de una iteración. Tras ello se describen brevemente las posibilidades del método FIC en problemas de dinámica de fluidos y de mecánica de sólidos utilizando el MEF.

2. FORMULACIÓN GENERAL DEL MÉTODO FIC PARA PROBLEMAS DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

Consideremos un problema de convección-difusión en un dominio bi o tridimensional. Seleccionemos un subdominio arbitrario en el que se establece la típica condición de balance de flujos convectivos y difusivos. Admitiendo que las dimensiones de dicho dominio son de tamaño *finito* y reteniendo en las ecuaciones de balance términos de orden mayor que los usuales en la teoría infinitesimal, se obtiene la ecuación de balance modificada siguiente⁹

$$r - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla r = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con las condiciones de contorno

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \quad (2a)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \phi + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} r = 0 \quad \text{en } \Gamma_q \quad (2b)$$

donde Γ_ϕ y Γ_q son los contornos de Neumann y Dirichlet donde se prescribe la variable ϕ y el flujo normal a los valores $\bar{\phi}$ y \bar{q}_n , respectivamente y \mathbf{n} es la normal unitaria exterior al contorno. En las ecuaciones anteriores

$$r := - \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}^T \nabla \phi \right] + \nabla^T \mathbf{D} \nabla \phi + Q \quad (3)$$

donde \mathbf{v} es el vector velocidad, \mathbf{D} es la matriz (diagonal) de parámetros de difusividad, ∇ es el operador gradiente y Q el término de fuente externa. El vector \mathbf{h} en las ecs.(1) y (2b)

es el vector de *longitud característica*. Para problemas bidimensionales (2D) $\mathbf{h} = [h_x, h_y]^T$, donde h_x y h_y son distancias características a lo largo de los lados del dominio rectangular donde se impone el balance de flujos.⁹

La ecuación modificada (2b) se obtiene imponiendo el balance de flujos en un dominio de tamaño finito adyacente al contorno de Neuman.⁹ Los términos subrayados en las ecs.(1) y (2b) introducen la estabilización necesaria en la solución numérica utilizando métodos de DF, EF, VF y sin malla.^{3,9,10}

Obsérvese que haciendo que $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, es decir, aceptando que el dominio de balance tiene dimensiones nulas, se recupera la clásica ecuación diferencial $r = 0$, típica de la teoría infinitesimal.

3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

La interpolación de la incógnita por el MEF se expresa en la forma clásica por

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \sum N_i \hat{\phi}_i \tag{4}$$

donde N_i son las funciones de forma y $\hat{\phi}_i$ los valores nodales de la función aproximada $\hat{\phi}$.¹

La aplicación del método Galerkin y el MEF a las ecs.(1)–(2) conduce, tras integrar por partes el término en el que interviene ∇r (despreciando las derivadas especiales de \mathbf{h}),

$$\int_{\Omega} N_i \hat{r} d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n) + \sum_e \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{h}^T \nabla N_i \hat{r} d\Omega = 0 \tag{5}$$

La última integral en la ec.(5) se ha expresado como suma de las contribuciones elementales para permitir las discontinuidades entre elementos del residuo \hat{r} , donde $\hat{r} = r(\hat{\phi})$.

Después de integrar por partes los términos de difusión de la primera integral de (5) se obtiene

$$\int_{\Omega} N_i [\mathbf{v}^T \nabla \hat{\phi} + \nabla^T N_i \mathbf{D} \nabla \hat{\phi}] d\Omega - \sum_e \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{h}^T \nabla N_i \hat{r} d\Omega - \int_{\Omega} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}_n d\Gamma = 0 \tag{6}$$

En forma matricial

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{7}$$

La matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} se obtienen ensamblando las siguientes contribuciones elementales

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} [N_i \mathbf{v}^T \nabla N_j + \nabla^T N_i [\mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{v}] \nabla N_j] d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{h}^T \nabla N_i \nabla (\mathbf{D} \nabla N_j) d\Omega \tag{8}$$

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} [N_i + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla N_i] Q d\Omega - \int_{\Gamma_q^e} N_i \bar{q}_n d\Gamma \quad (9)$$

Adviértase que el método introduce una matriz de difusión adicional de valor $\frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{v}$. Por otra parte, si se utilizan aproximaciones lineales la segunda integral de (8) se anula. Lo mismo ocurre con el segundo término de la primera integral de (9) cuando N_i es lineal y Q es constante. En cualquier otro caso es obligatorio calcular dichas contribuciones.

3.1. Equivalencia con el método SUPG

Supondremos ahora que el vector \mathbf{h} es *paralelo* a la velocidad \mathbf{v} , es decir $\mathbf{h} = h \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ donde h es una longitud característica. Bajo estas condiciones, la ec.(5) puede escribirse como

$$\int_{\Omega} N_i \hat{r} d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i (\mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{h}{2|\mathbf{v}|} \mathbf{v}^T \nabla N_i \hat{r} d\Omega = 0 \quad (10)$$

La ec.(10) coincide precisamente con el método denominado Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin (SUPG).^{1,4,5} El cociente $\frac{h}{2|\mathbf{v}|}$ tiene dimensiones de tiempo y se denomina parámetro de *tiempo intrínseco* τ . La longitud característica h se toma en la práctica como una dimensión media del dominio tributario de cada punto de integración. Por ejemplo, en elementos lineales 2D que utilizan un solo punto de integración es usual tomar $h = [\Omega^{(e)}]^{1/2}$.

El método SUPG es, por tanto, un caso *particular* de la formulación FIC más general. Esto explica las limitaciones del método SUPG para proporcionar resultados numéricos estables en la proximidad de zonas con altos gradientes transversales a la dirección del flujo.¹ En general, la dirección de \mathbf{h} no tiene necesariamente que coincidir con la de la velocidad y las componentes de \mathbf{h} introducen la estabilización necesaria a lo largo de las líneas de corriente y de las direcciones transversales al flujo. Por consiguiente, el método FIC reproduce las mejores propiedades de los denominados esquemas estabilizados con captura de discontinuidades.¹¹

3.2. Cálculo del vector de longitud característica

Una de las ventajas del método FIC es que manteniendo la definición general del vector de longitud característica se pueden obtener soluciones estabilizadas, incluso en presencia de altos gradientes de la solución transversales a la dirección de la velocidad.

En Oñate et al.^{12,13} se describe una técnica iterativa para el cálculo de las componentes del vector de longitud característica. Presentamos seguidamente un nuevo procedimiento basado en ideas similares, que permite obtener soluciones estabilizadas en problemas multidimensionales en un máximo de dos etapas.

El algoritmo que se propone aquí se basa en descomponer el vector \mathbf{h} como

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_t \quad (11)$$

donde \mathbf{h}_s y \mathbf{h}_t son vectores de longitudes características en la *dirección de la velocidad* y en la *dirección transversal* a ella, respectivamente. Para \mathbf{h}_s se toma la clásica definición del método SUPG

$$\mathbf{h}_s = \frac{h_s}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \tag{12}$$

con

$$h_s = \alpha_s l_s \quad \text{y} \quad l_s = [\Omega^e]^{1/n} \tag{13}$$

$$\alpha_s = 1 - \frac{1}{\gamma_s} \quad \text{para } \gamma_s > 1$$

$$\alpha_s = 0 \quad \text{para } \gamma_s \leq 1 \quad \text{con } \gamma_s = \frac{|\mathbf{v}| l_s}{2k} \tag{14}$$

donde n_d son las dimensiones del problema ($n_d = 2$ en 2D) y k es la difusividad *media* del elemento (en 2D $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$).

Como es bien conocido, la definición de \mathbf{h}_s de (12) equivale a introducir una difusión de valor $\frac{h_s |\mathbf{u}|}{2}$ a lo largo de las líneas de corriente.^{1,4}

Para \mathbf{h}_t tomamos

$$\mathbf{h}_t = \frac{h_t}{|\nabla \phi|} \nabla \phi \tag{15}$$

Es decir, el vector \mathbf{h}_t se define en la *dirección del gradiente* de la solución. Esta hipótesis, obviamente, introduce una no linealidad en el proceso de cálculo.

Los autores han encontrado que la expresión (15) puede simplificarse en los elementos adyacentes al contorno (donde, por otra parte, suelen producirse los gradientes más elevados) aceptando que \mathbf{h}_t es constante sobre el elemento y que la dirección del *gradiente* medio coincide con la de la normal exterior al lado (o cara) del elemento sobre el contorno. Así, el vector \mathbf{h}_t en esos elementos se define simplemente como

$$\mathbf{h}_t = h_t \mathbf{n} \tag{16}$$

En elementos con ms de un lado (o cara) sobre el contorno, \mathbf{h}_t se calcula por

$$\mathbf{h}_t = \sum_{i=1}^{n_l} h_{t_i} \mathbf{n}_i \tag{17}$$

donde n_l es el número de lados sobre el contorno ($n_l \leq 2$ en 2D).

En el caso de que el elemento solo tenga un nodo sobre el contorno (lo que es usual en mallas no estructuradas y de triángulos) se toma $n_l = 1$ y \mathbf{n}_i coincidente con la normal al contorno en dicho nodo.

En la práctica solo es necesario aplicar \mathbf{h}_t en elementos adyacentes a contornos de salida de la velocidad (es decir, si $\mathbf{n}^T \mathbf{v} > 0$). Las longitudes h_{t_i} se calculan en esos elementos por

$$h_{t_i} = |d_{t_i} - \mathbf{h}_s^T \mathbf{n}_i| \alpha_{t_i} \quad (18)$$

$$d_{t_i} = \max |\mathbf{n}_i^T \mathbf{l}_j|, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

$$\alpha_{t_i} = 1 - \frac{1}{\gamma_{t_i}} \quad \text{para } \gamma_{t_i} > 1 \quad (20)$$

$$\alpha_{t_i} = 0 \quad \text{para } \gamma_{t_i} \leq 1 \quad \text{con } \gamma_{t_i} = \frac{|\mathbf{v}^T \mathbf{n}_i| d_{t_i}}{2k} \quad (21)$$

La ec.(18) tiene en cuenta la corrección de la longitud de \mathbf{h}_t debida a la actuación simultánea del vector \mathbf{h}_s .

La definición de \mathbf{h} basada en las ecs.(11), (12) y (16) permite resolver problemas de convección-difusión con altos gradientes en el contorno *en un solo paso*. Adviértase que el problema así planteado es *lineal* y, por tanto, no es necesario iterar.

En el caso de que existan gradientes transversales *en el interior del dominio*, es obligatorio utilizar la expresión de \mathbf{h}_t de (15) en los elementos interiores. Es conveniente mantener, en todo caso, la definición de \mathbf{h}_t de (16) para los elementos adyacentes al contorno.

Es fácil comprobar que la definición de \mathbf{h}_t de (15) equivale a introducir una *difusión isotropa* sobre los elementos. El valor de dicha difusión se obtiene por

$$k_t = \frac{|r_s|^2}{|\nabla^T \phi \nabla r_s|} \quad (22)$$

con

$$r_s = r - \frac{1}{2} \mathbf{h}_s^T \nabla r \quad (23)$$

Los valores de r_s se obtienen en cada punto de integración utilizando valores alisados de las derivadas. Un estudio de la expresión (22) revela que para velocidades altas puede utilizarse

$$k_t = \beta \frac{|\mathbf{v}| h_s}{2} \quad 0 < \beta < 1 \quad (24)$$

Se han encontrado resultados excelentes en todos los ejemplos estudiados utilizando $\beta = 0,015$.

El algoritmo de cálculo se resume en las tres etapas siguientes:

1. Resolver el problema de convección-difusión utilizando las expresiones de \mathbf{h}_s y \mathbf{h}_t dados por (12) y (16). Esta etapa proporciona una solución estabilizada en la dirección de la velocidad y a lo largo de los contornos donde pueden producirse gradientes altos.

2. Comprobar los valores medios de r_s , ∇r_s y $\nabla\phi$ en los elementos del interior del dominio. Si se detectan valores de r_s elevados en algunas zonas pasar a 3.
3. Repetir la etapa 1) utilizando para los elementos interiores el valor de \mathbf{h}_t dado por la ec.(15).

Los autores han comprobado en el estudio de diferentes problemas, que las etapas anteriores bastan para obtener una solución estabilizada en todo el dominio. No obstante, pueden repetirse las etapas 2) y 3) cuantas veces sea necesario hasta que los valores del residuo en cada elemento se consideren aceptables.

4. EJEMPLOS

4.1. Problema de convección-difusión 2D estacionario con velocidad diagonal sin fuente y condiciones de Dirichlet uniformes

Se resuelve la ecuación de convección-difusión estacionaria en un dominio cuadrado de lado unidad con (Figura 1)

$$k_x = k_y = 1 \quad , \quad \mathbf{v} = 10^{10}[1, 1]^T \quad , \quad Q = 0$$

Se suponen las siguientes condiciones de contorno de Dirichlet

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \quad \text{sobre las líneas} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0 \\ \phi &= 100 \quad \text{sobre las líneas} \quad x = 1 \quad \text{e} \quad y = 1 \end{aligned}$$

La solución esperada es una distribución uniforme de $\phi = 0$ sobre todo el dominio, excepto en la vecindad de los contornos $x = 1$ e $y = 1$ donde se forma una capa límite.

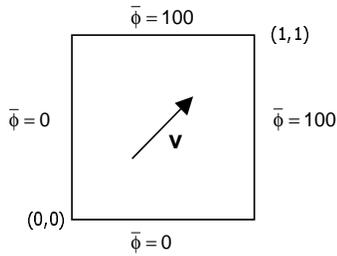
El dominio se discretiza con una malla uniforme de 400 cuadriláteros de 4 nodos (Figura 1).

Para \mathbf{h}_s y \mathbf{h}_t se han tomado los valores de las ecs.(12) y (16), respectivamente. La solución obtenida *en un solo paso* se muestra en las Figuras 1 y 2. Se observa la perfecta captura de las dos capas límites próximas a los contornos, con ausencia de oscilaciones en todo el dominio.

Se remarca que utilizando métodos de captura de discontinuidades tradicionales hubiera sido necesario realizar como mínimo dos iteraciones para obtener una solución de igual calidad.

4.2. Problema de convección-difusión estacionario con velocidad diagonal sin fuente y condiciones de Dirichlet no uniformes

Las ecuaciones de convección-difusión se resuelven ahora en un dominio cuadrado de lado unidad y



Malla estructurada de 400 cuadriláteros de cuatro nodos

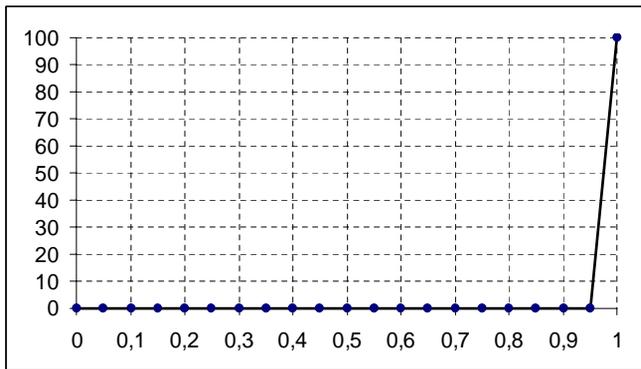
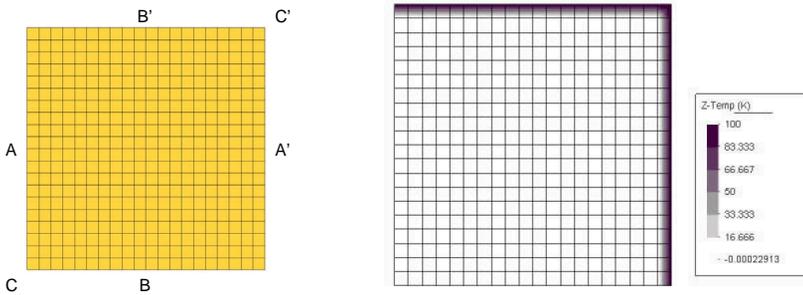


Figura 1: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet uniformes. Solución con un solo paso. Distribución de ϕ a lo largo de las líneas $A - A'$ y $B - B'$

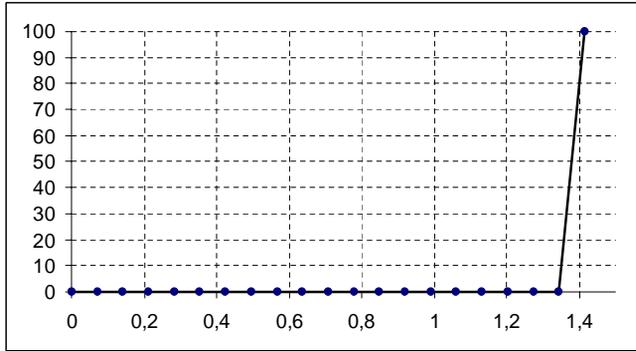


Figura 2: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet uniformes. Solución con un solo paso. Distribución de ϕ a lo largo de la línea $C - C'$

$$\mathbf{v} = 10^6[5, -9]^T, \quad k_x = k_y = 1, \quad Q = 0, \quad \bar{\phi}(x, y) = \begin{cases} 100 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \end{cases}$$

con las siguientes condiciones de Dirichlet no homogéneas

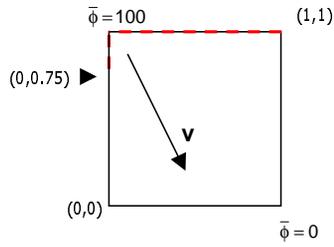
$$\Gamma_{\phi_1} = \left\{ (x, y)/x \in [0, 1], y = 1 \right\} \cup \left\{ (x, y)/x = 0, y \in \left[\frac{3}{4}, 1 \right] \right\}$$

$$\Gamma_{\phi_2} = \partial\Omega/\Gamma_{\phi_1}$$

Para la solución se toma de nuevo una malla de 400 elementos cuadriláteros de cuatros nodos (Figura 3).

El problema se ha resuelto con el algoritmo iterativo descrito en el apartado anterior. La Figura 3 muestra la distribución de ϕ obtenida en el primer paso con los valores de \mathbf{h}_s y \mathbf{h}_t de las ecs.(12) y (16). Obsérvese como se han capturado las capas límites en los contornos. Queda no obstante una zona en el interior del dominio donde se produce una solución oscilatoria caracterizada por los valores altos del residuo en esa región.

Realizando una nueva solución con el valor de \mathbf{h}_t de la ec.(15) en los elementos del interior del dominio proporciona una distribución de ϕ estabilizada en todo el dominio (Figura 4). En las Figuras 5 y 6 se muestran las distribuciones de ϕ a lo largo de la línea horizontal AA' y de la diagonal BB' obtenidas en el primer paso y tras la primera iteración. Obsérvese el algoritmo elimina las oscilaciones inducidas por los altos gradientes en el interior del dominio. Obviamente la precisión de la solución puede aumentarse refinando la malla en las zonas donde se producen gradientes de ϕ elevados.



Malla estructurada de 400 cuadriláteros de cuatro nodos

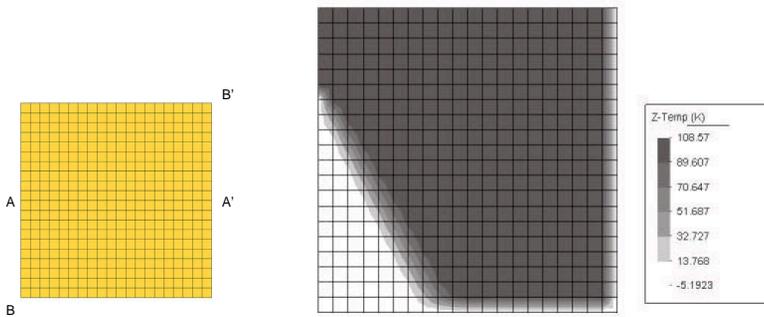


Figura 3: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Distribución de ϕ después del primer paso

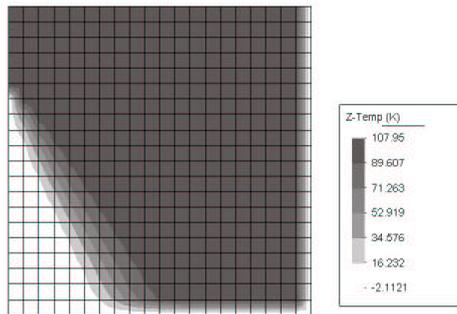


Figura 4: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Distribución de ϕ después de la primera iteración

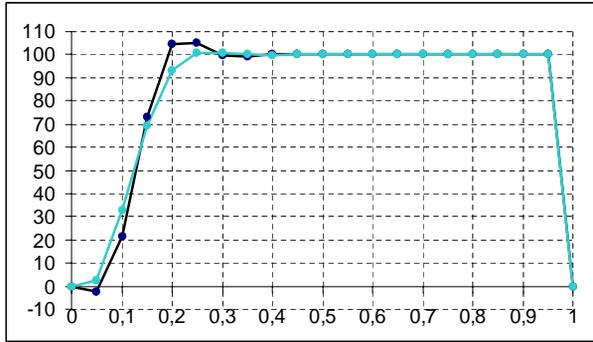


Figura 5: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Distribución de ϕ a lo largo de la línea horizontal AA' obtenida en el primer paso (solución oscilatoria) y tras la primera iteración (solución sin oscilaciones)

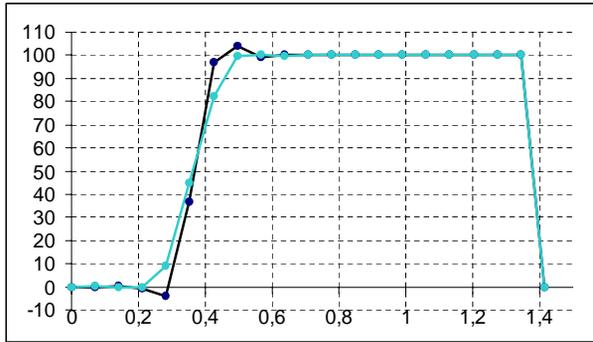


Figura 6: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes. Distribución de ϕ a lo largo de la línea diagonal BB' obtenida en el primer paso (solución oscilatoria) y tras la primera iteración (solución sin oscilaciones)

En las Figuras 7 y 8 se muestra la solución del mismo ejemplo utilizando una malla no estructurada de elementos cuadriláteros de 4 nodos. Obsérvese que el método consigue capturar las capas límites en el contorno en el primer paso y obtener una solución estabilizada sobre todo el dominio tras la primera iteración.

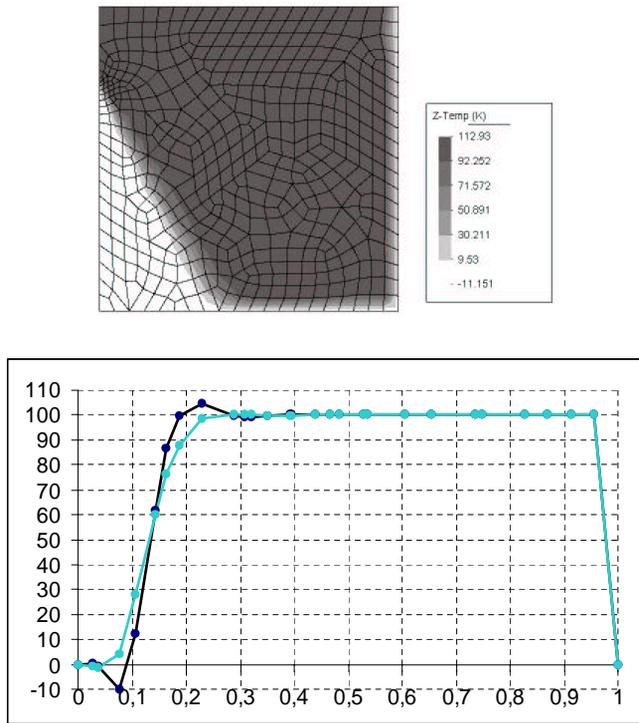


Figura 7: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes resuelto con una malla no estructurada de elementos cuadriláteros. Distribución de ϕ a lo largo de la línea horizontal AA' (Figura 3) obtenida en el primer paso (solución oscilatoria) y tras la primera iteración (solución sin oscilaciones)

5. ESTABILIZACIÓN EN EL TIEMPO UTILIZANDO EL MÉTODO FIC

La aplicación del método FIC a un dominio prismático espacio-tiempo de tamaño finito conduce a la siguiente ecuación de gobierno modificada para el problema de convección-difusión

$$r - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla r - \frac{\delta}{2} \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

donde r viene dado por la ec.(3), \mathbf{h} es el vector de longitud característica y δ es un parámetro de estabilización en el tiempo.

La ec.(25) puede utilizarse para obtener diferentes esquemas de integración en el espacio y en el tiempo. Una aplicación reciente del método FIC al análisis por el MEF de problemas

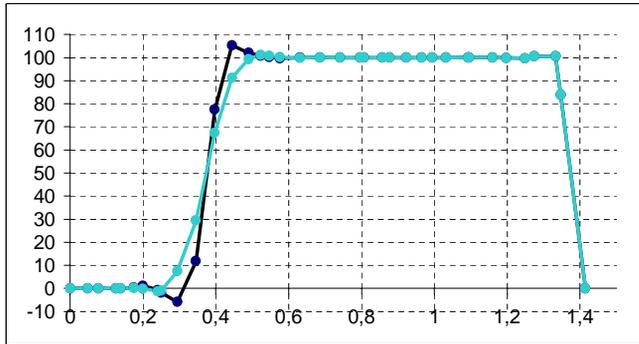
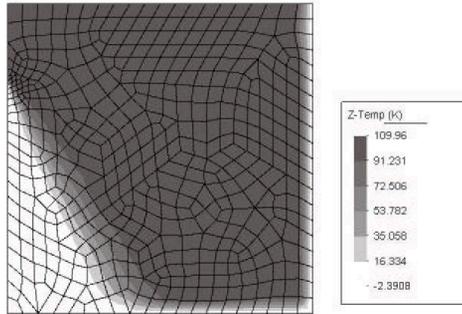


Figura 8: Problema de convección-difusión con condiciones de Dirichlet no uniformes resuelto con una malla no estructurada de elementos cuadriláteros. Distribución de ϕ a lo largo de la línea diagonal BB' obtenida en el primer paso (solución oscilatoria) y tras la primera iteración (solución sin oscilaciones)

de convección-difusión transitorios puede encontrarse en Oñate y Manzan.^{10,14}

6. EL MÉTODO FIC EN PROBLEMAS DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

El método FIC puede aplicarse para obtener las ecuaciones modificadas de cantidad de movimiento y de conservación de masa en mecánica de fluidos. A continuación se muestran dichas ecuaciones para un flujo viscoso incompresible.

Cantidad de movimiento

$$r_i - \frac{h_j}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \quad (26)$$

Balance de masa

$$r_d - \frac{h_j}{2} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad (27)$$

con

$$r_i := \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad , \quad r_d := \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (28)$$

En la ec.(28) v_i son las velocidades, p es la presión, τ_{ij} las tensiones viscosas, b_i las fuerzas másicas con $i, j = 1, 2, 3$ para problemas 3D. Como antes, h_j y δ son las longitudes características y el parámetro de estabilización en el tiempo, respectivamente.

Las ecs.(26) y (27) se complementan con las condiciones de contorno adecuadas. De nuevo el método FIC introduce términos de estabilización adicionales en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de balance de masa y en las condiciones de contorno de Neumann similares a los que aparecen en las ecs.(1) y (2).^{9,15}

Los términos de estabilización subrayados en las ecuaciones de cantidad de movimiento (26) tienen en cuenta las inestabilidades debidas a efectos de convección elevados. El término subrayado en la ec.(27) introduce un efecto de pseudo-compresibilidad en la ecuación de balance de masa. Este término es esencial para utilizar interpolaciones de elementos finitos de igual orden para las velocidades y la presión. La aplicación del método FIC a la solución por el MEF de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles incluyendo efectos de ondas de superficie, utilizando elementos triangulares y tetrahedros lineales puede encontrarse en Oñate y García J..¹⁶ Otras aplicaciones del método FIC a las ecuaciones de flujo compresible puede encontrarse en Oñate.⁹

6.1. Posibilidades del método fic en mecánica de sólidos

La aplicación del método FIC a las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en mecánica de sólidos conduce a las siguientes ecuaciones de gobierno modificadas (para el caso estacionario)

$$r_i - \frac{h_j}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ for 3D} \quad (29)$$

con

$$r_i := \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i \quad (30)$$

donde σ_{ij} son las tensiones y b_i las fuerzas másicas. El término subrayado en la ec.(29) resulta de las hipótesis del método FIC, y como es usual, h_j son los parámetros de longitudes características. La ec.(29) se completa con las condiciones de contorno adecuadas.

Adviértase que, por coherencia, las condiciones de contorno de Neumann deben incorporar un término de estabilización adicional similar al que aparece en la ec.(2b).¹⁶

El método FIC puede también aplicarse para obtener una ecuación modificada que relaciona la presión y el cambio de deformación volumétrica sobre un dominio de tamaño finito como

$$p = K \left[\varepsilon_v - \frac{h_j}{2} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_j} \right] \quad (31)$$

donde K es el módulo elástico volumétrico, $\varepsilon_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ y u_i son los desplazamientos. Adviértase que para un material incompresible, $K \rightarrow \infty$ y en este caso la ec.(31) recobra una expresión análoga a la de la ecuación de balance de masa estabilizada en mecánica de fluidos (véase ec.(27)).

Las ecs.(15) y (17) junto con las condiciones de contorno adecuadas son la base para obtener formulaciones del MEF estabilizadas para sólidos cuasi-incompresibles y totalmente incompresibles, utilizando interpolaciones de igual orden para los desplazamientos y la presión. Una aplicación reciente del método FIC para el análisis dinámico no lineal de sólidos utilizando un algoritmo explícito y triángulos y tetrahedros lineales puede encontrarse en.^{17,18}

Es interesante advertir que el método FIC introduce de forma natural derivadas de mayor orden de los desplazamientos en las ecuaciones de equilibrio. Estos términos se parece a los que introduce el modelo de Cosserat¹⁹ y los denominados modelos constitutivos “no locales”.²⁰ Estos modelos se usan típicamente para preservar la elipticidad de las ecuaciones de mecánica de sólidos en la presencia de zonas con altos valores del gradiente de los desplazamientos, tales como bandas de cortante y líneas de fractura. Esto abre muchas posibilidades para utilizar las nuevas ecuaciones de gobierno obtenidas por el método FIC para analizar problemas de localización de deformaciones en mecánica de sólidos.

7. CONCLUSIONES

La aceptación de que el dominio donde se establece el balance (de flujos, de fuerzas, de momentos, etc.) en problemas de mecánica tiene un tamaño finito, conduce a nuevas ecuaciones diferenciales de gobierno que incorporan las dimensiones del dominio de balance en sus términos. Estas ecuaciones son el punto de partida para obtener esquemas numéricos estabilizados basados en EF, DF, VF y métodos sin malla que permiten resolver con precisión problemas de transporte convectivo de mecánica de fluidos y de mecánica de sólidos incompresibles, entre otros.

Se ha demostrado en el artículo las posibilidades del método FIC para solución de las ecuaciones de convección-difusión por el MEF en casos en que existen altos gradientes en direcciones transversales a las velocidades. El procedimiento de cálculo del vector de longitud características propuesto será de utilidad para la solución de otros problemas de mecánica en que se produzcan gradientes de la solución elevados (capas límites, ondas de choques, localización de deformaciones, etc.).

REFERENCIAS

- [1] Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L. *The finite element method 5th Edition*. Butterworth-Heinemann, (2000).
- [2] Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flow*, volume 1,2. J. Wiley, (1988,1990).
- [3] Oñate E. Sacco C. y Idelsohn S. A finite point method for incompressible flow problems. *Computing and Visualization in Science*, **2**, 67–75 (2000).
- [4] Brooks A. y Hughes T.J.R. Streamline upwind/petrov-galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **32**, 199–259 (1982).
- [5] Cruchaga M.A. y Oñate E. A generalized streamline finite element approach for the analysis of incompressible flow problems including moving surfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **173**, 241–255 (1999).
- [6] Hughes T.J.R. Franca L.P. y Hulbert G.M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **73**, 173–189 (1989).
- [7] Zienkiewicz O.C. y Codina R. A general algorithm for compressible and incompressible flow. part i: The split characteristic based scheme. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, **20**, 869–85 (1995).
- [8] Hughes T.J.R. Multiscale phenomena: Green functions, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **127**, 387–401 (1995).
- [9] Oñate E. Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **151:1-2**, 233–267 (1998).
- [10] Oñate E. y Manzan M. Stabilization techniques for finite element analysis of convection diffusion problems. In G. Comini and B. Sunden, editors, *Comput. Anal. of Heat Transfer*. WIT Press, (2000).
- [11] Codina R. A discontinuity-capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **110**, 325–342 (1993).
- [12] Oñate E. García J. y Idelsohn S. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **25**, 1385–1407 (1997).
- [13] Oñate E. García J. y Idelsohn S. An alpha-adaptive approach for stabilized finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients. In P. Ladeveze y J.T. Oden, editor, *New Advances in Adaptive Comput. Methods in Mech*. Elsevier, (1998).
- [14] Oñate E. y Manzan M. A general procedure for deriving stabilized space-time finite element methods for advective-diffusive problems. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **31**, 203–221 (1999).

- [15] Oñate E. A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **182:1-2**, 355–370 (2000).
- [16] Oñate E. y García J. A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191:6-7**, 635–660 (2001).
- [17] Taylor R.L. y Zienkiewicz O.C. Oñate E. Rojek J. Linear triangles and tetrahedra for incompressible problems using a finite calculus formulation. In *European Conference on Computational Mechanics*. ECCM2001, Cracow, Poland, 26-29 June, (2001).
- [18] Taylor R.L. y Zienkiewicz O.C. Oñate E. Rojek J. Finite calculus formulation for analysis of incompressible solids using linear triangles and tetrahedra. *Submitted to Int. J. Num. Meth. Engng.*, (2002).
- [19] Peric D. Yu J. y Owen D.R.J. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: Application to the numerical simulation of strain localization in classical and cosserat continua. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **37**, 1351–1379 (1994).
- [20] de Borst R. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **35**, 521–539 (1992).