

ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LA PROPAGACION DINÁMICA DE LA FISURA UTILIZANDO EL METODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

Teresa B. Spellmeyer¹, Ricardo Barrios D'Ambra², Ignacio Iturrioz³

¹⁻²Departamento de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional del Nordeste, Av. Las Heras 727, Resistencia Chaco, Argentina
e-mail: rbarrios@ing.unne.edu.ar

³PROMEC, Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería
Universidad Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
e-mail: ignacio@mecanica.ufrgs.br

Palabras claves: Mecánica de fractura dinámica, velocidad de propagación de la fisura, patrón de fisuración

Resumen: *El objetivo del trabajo es presentar las potencialidades del método de los elementos discretos en el estudio de problemas de propagación dinámica de fisuras, determinando la velocidad de propagación de la fisura y captando el efecto de la ramificación de la misma, teniendo en cuenta la influencia de la forma de la punta de la fisura en el patrón de fisuración obtenido. Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que se viene realizando en el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería –UNNE-Argentina.*

Key words: Fracture Mechanic speed of crack propagation, crack pattern

Abstract: *The aim of this work is to present the potentialities of the discrete elements method (DEM) in the study of problems of propagation of fissures, determining the speed of crack propagation and capturing the effect of the crack branching, keeping in mind the influence in the way of the tip of the fissure in the crack pattern. This work is part of an investigation project that one comes carrying out in the Mechanics Department of Engineering of University UNNE-Argentina.*

1 INTRODUCCION

El estudio de la propagación inestable de fisuras en sólidos es un problema que involucra un alto grado de complejidad debido, entre otros factores, a la interacción de ondas de tensiones que se generan en el interior del componente analizado, de las fuerzas inerciales que deben ser llevadas en cuenta, y de la dependencia de las propiedades del material con las altas tasas de deformación que se presentan. El tratamiento teórico de estos problemas ha sido realizado por varios autores, entre ellos se pueden citar Sih [1], y Freund [2], pero dichos estudios son restringidos a casos con geometrías simples de difícil aplicación práctica directa. El estudio experimental de este tema no es trivial, por la dificultad de medir eventos que se producen a velocidades intersónicas.

Debido a las complejidades citadas el tratamiento numérico de este tipo de problemas se presenta como una de las alternativas más viables de análisis, sobre todo cuando la geometría de la estructura y las cargas no son sencillas. Esto permite estudiar problemas de mayor interés práctico, como es la determinación de la resistencia última de estructuras ante excitaciones extremas (por ejemplo problemas de impacto y explosiones); el estudio de los mecanismos que se producen en pequeña escala (orden de micrones) y que caracterizan el comportamiento del material, tema que estudia la micromecánica, en este sentido hay gran cantidad de autores que están trabajando en esta dirección como es el caso de Needleman[13], Bitencourt [4]

Para realizar la discretización espacial del problema en estudio fue empleado el método de los elementos discretos. El mismo consiste en modelar el medio continuo mediante un conjunto de barras de reticulado espacial con rigidez equivalente al continuo que representan, formando módulos de geometría regular, la masa se concentra en los nodos, y la ley constitutiva de las barras es uniaxial, simulando la fractura en forma natural desactivando las barras que están en la región dañada y teniendo en cuenta el balance energético durante el proceso. Este método fue utilizado con suceso en el modelado de materiales frágiles como se presenta en Riera e Iturrioz [6].

El método integra en el tiempo la ecuación de movimiento resultante utilizando un esquema explícito.

2 FUNDAMENTOS TEORICOS

La mecánica de fractura dinámica incorpora al problema de mecánica de la fractura tradicional tres características adicionales, la necesidad de considerar las fuerzas de inercia, el hecho que algunos materiales tengan un comportamiento que depende de la velocidad de carga y el efecto de las ondas de tensión dentro del sistema en estudio, como ya fue discutido por Anderson [7].

Mott en 1948 presenta uno de los primeros trabajos que permite encarar el estudio teórico de este problema, adiciona al balance energético de Griffith, la energía cinética que en este caso entra en juego, permitiendo deducir una expresión para la velocidad de propagación inestable de una fisura.

$$V_{\max} = C_r \left(1 - \frac{a_o}{a(t)} \right) \quad (1)$$

dónde:

c_r es la velocidad de la onda de superficie (onda de Raleigh).

a_o y $a(t)$ representan la longitud de la fisura inicial y en el tiempo t .

Para un coeficiente de Poisson de 0.3 se verifica que $c_r / c_o = 0.57$

Siendo:

c_o la velocidad de propagación de la onda de compresión en la dirección uniaxial.

$$(c_o = (E/\rho)^{1/2})$$

Expresiones más sofisticadas para la determinación de la velocidad de propagación de fisuras pueden ser encontradas en Kaninen y Popelar [8] y, la propuesta por Riera y Rocha [9] que utiliza el método de los elementos discretos.

Comparaciones numéricas y experimentales permiten determinar que la velocidad máxima de propagación es de aproximadamente $0.38c_o$.

Como es descrito en Ewalds [16], existen dos aspectos básicos en el crecimiento de la fisura que deben ser estudiados: la velocidad de propagación de la fisura y la ramificación de la fisura.

El desarrollo de la fisura dinámica puede ser considerada en términos de un balance de energía, puesto que antes de la iniciación de la fisura inestable existe un exceso de energía el cual se incrementa durante el desarrollo de la misma. Este exceso de energía es almacenada como energía cinética, y puede ser determinada a partir del desplazamiento de apertura de los lados de la fisura. Así se llega a la conclusión que la velocidad de propagación de la fisura será siempre una fracción de la velocidad de la onda longitudinal.

El crecimiento dinámico de la fisura puede ser acompañado por múltiples ramificaciones de la fisura. Algunas experiencias han demostrado que la bifurcación de la fisura ocurre solo cuando es excedido el factor de intensidad de tensiones. Esto puede ser explicado cualitativamente, ya que cuando el factor de intensidad de tensiones es excedido, nuevas fisuras se inician en la cabeza de la fisura principal. Eventualmente, la iniciación de las nuevas fisuras está alejada de la fisura principal las cuales pueden acelerarse a una velocidad que no pueden ser alcanzadas y ocurre la bifurcación.

En este aspecto la forma de la punta de la fisura tiene gran influencia, habiéndose demostrado experimentalmente que puntas más redondeadas requieren de tensiones mayores para iniciar la fisura, aumentando el factor de intensidad de tensiones resultando una mayor bifurcación de la fisura que en los casos de mayor agudeza.

3 METODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

Este método está basado en la discretización espacial del continuo, utilizando elementos de barra que forman un reticulado espacial, se hace una equivalencia mecánica entre el comportamiento de esas barras y el medio continuo que se desea representar.

Las ecuaciones de movimiento resultantes son desacopladas (la matriz de masa es diagonal y el amortiguamiento es proporcional a la masa) y son integradas en el tiempo, utilizando el Método de las Diferencias Finitas Centrales.

Cada nodo tiene 3 grados de libertad (desplazamientos en las 3 direcciones), las masas son concentradas en dichos nodos y unidas por elementos longitudinales y diagonales de longitud L_c y $\sqrt{3}L_c/2$ respectivamente. El reticulado es formado por un conjunto de módulos cúbicos regulares mostrados en la Figura (1).

Si el medio es isotrópico elástico lineal, y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0,25$, el área de las barras longitudinales internas es calculada con la Ecuación. (2), dónde $n=8\nu(4-8\nu)$ y ν es el módulo de Poisson.

$$A_n = L_c \frac{9+8n}{18+24n} \quad (2)$$

Para los elementos diagonales el área de las barras es calculada con la Ecuación (3), donde n tiene el mismo significado que en la ecuación anterior:

$$A_n = L_c \frac{2n(9+8n)}{\sqrt{3}(18+24n)} \quad (3)$$

En el caso en que ν sea diferente de 0.25, la equivalencia entre el modelo sólido y el reticulado no es perfecta y son introducidos en el modelo pequeños errores.

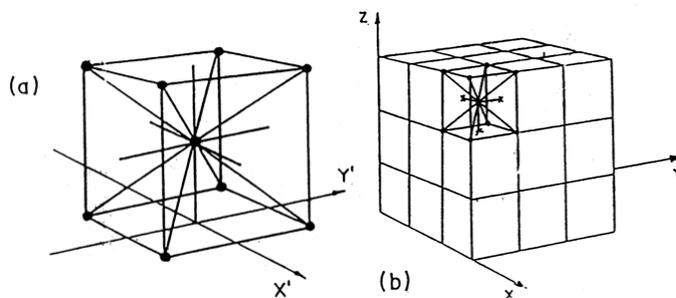


Figura 1: a) Módulo cúbico utilizado. b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos.

En el dominio del tiempo se utiliza un esquema explícito de integración numérica. En cada paso de integración, se resuelve para cada nodo una ecuación de equilibrio del tipo:

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} + c \frac{du_i}{dt} = f \quad (4)$$

dónde:

m: masas nodales;
 c: coeficiente de amortiguamiento proporcional a la masa;
 u_i : son las componentes del vector de coordenadas nodales en relación a los tres ejes de referencia X_i ;
 f: componente de las fuerzas internas (aplicadas por las barras que concurren a un nodo) y externas.

Este método ha sido aplicado con suceso en el estudio de materiales susceptibles de fracturarse, donde la hipótesis de medio continuo, base de los métodos numéricos tradicionales (elementos finitos y de contorno) es violada.

3.1 Definición del Criterio de Ruptura y de la Relación Constitutiva Elemental (RCE).

La relación constitutiva de cada barra tiene la siguiente forma

$$\text{Fuerza} = \text{función (deformación de la barra)} \quad (5)$$

Esta ley es uniaxial y en general simple. Lo que resulta crucial en el método es poder, a través de esta ley uniaxial, representar el comportamiento de una porción del sistema en estudio.

Considerando que el material en estudio tiene un comportamiento frágil resulta válido aplicar la mecánica lineal de fractura, escribiendo entonces el factor de intensidad de tensiones, parámetro de comparación de la mecánica de la fractura K_{IC} como:

$$K_{IC} = \chi \cdot f_i \cdot a^{1/2} \quad (6)$$

Siendo f_i una tensión de control crítica, χ un parámetro que depende de la geometría del problema en estudio y a el tamaño de la fisura.

Considerando un comportamiento lineal hasta la ruptura se verifica que ($f_i = \epsilon_p E$) se puede escribir una expresión para la deformación crítica en estado plano de deformaciones:

$$\epsilon_p = R_f \left[\frac{Gf}{E(1-\nu^2)} \right] \quad (7)$$

en que R_f es un "factor de falla" definido como:

$$R_f = \left(\chi \cdot a^{1/2} \right)^{-1} \quad (8)$$

A partir de estas definiciones, se puede adoptar un diagrama bilineal para la relación constitutiva elemental (RCE), conforme lo ilustrado en la Figura (2).

El comportamiento a compresión de la barra es lineal elástico, la ruptura del modelo global, cuando está comprimido, deberá ocurrir por tracción indirecta (efecto de Poisson).

Es importante destacar que la forma como se modela el efecto de "strain-softening" es fundamental para una correcta representación del fenómeno de ruptura de un material frágil. El ablandamiento ("strain-softening") presente en el diagrama adoptado, tiene como principal

objetivo condicionar la cantidad de energía a ser consumida en la ruptura del material.

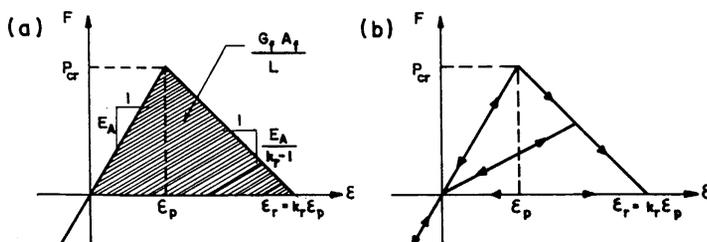


Figura 2: Relación Constitutiva Elemental de las barras del reticulado: a) Diagrama constitutivo adoptado con sus parámetros de control; b) Esquema para la carga y descarga. Rocha [10].

Los símbolos empleados en el diagrama de la Figura (2) tienen el siguiente significado:

F [fuerza]: Fuerza axial que actúa en la barra, función de la deformación ε_p , siendo P_{cr} el valor de esta fuerza asociado a ε_p .

E_A [fuerza]: Rigidez axial por la longitud de la barra, E_n o E_d conforme el tipo de barra (normal o diagonal).

ε_p : Deformación crítica de ruptura, es la deformación para la cual una microfisura se inestabiliza y se propaga.

k_r : Ductilidad; Se trata de un parámetro que permite calcular la deformación para la cual la barra no transmite más esfuerzos de tracción $\varepsilon_r = k_r \cdot \varepsilon_p$

L_C [longitud]: longitud de las barras normales.

A_f [área]: Área de influencia de la barra, o sea, área de fractura asociada a su ruptura; puede expresarse en la forma $A_f = c_A \cdot L_C^2$, donde c_A es un coeficiente geométrico propio del modelo, con valor calculado en 0,1385, Hayasi [11].

G_f [fuerza/longitud]: Energía de fractura específica del material.

Es importante observar que ε_p , E , P_{cr} e G_f son considerados propiedades exclusivas del material; A_f e L_C son propiedades exclusivas del modelo y finalmente los parámetros k_r e E_A dependen tanto del modelo como del material.

Es interesante observar que cuando una barra rompe, no toda la energía elástica es consumida en el proceso de ruptura, sino que parte de esta se preserva bajo la forma de energía cinética y elástica en las dos porciones en que se divide el elemento. Como no es posible tener en cuenta esta subdivisión para el elemento aislado, ya que las masas están concentradas en los nodos y no distribuidas en la longitud de la barra, esto se traduce en una limitación del tamaño de L_C . Esta restricción se refleja en el hecho que toda la energía elástica debe ser consumida por el proceso de fractura de la barra y para que esto se verifique el factor de ductilidad k_r (ecuación 9) debe ser mayor que 1. Se puede definir entonces una longitud de barra crítica L_{cr} (ecuación 10) como un límite máximo en el nivel de discretización para que el modelo computacional funcione correctamente.

$$k_r = \frac{L_{cr}}{L_c} \quad (9)$$

en la cuál

$$L_{cr} = \frac{2.C_A.(1-v^2)}{\alpha.Rf^2} \quad (10)$$

Es posible incorporar al modelo las características de la aleatoriedad del material considerando la energía específica de fractura G_f como una campo aleatorio. En este caso es importante destacar que la longitud de las barras toma también un sentido estadístico definiendo la longitud de correlación de dicho campo aleatorio. Detalles sobre este y otros aspectos de la formulación presentada pueden encontrarse en Rocha [10], Hayasi [11] y Iturrioz [12]

4 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALIZADO

El ejemplo modelado consiste en una placa plana con una fisura central, de material PMMA (Polimetacrilato de Metil-Acrílico), como se indica en la Figura 3. Este ejemplo fue propuesto por Nedleman en [13] y posteriormente por Ferdrigo [14] utilizando una propuesta basada en el método de los elementos finitos con leyes de interface entre elementos.

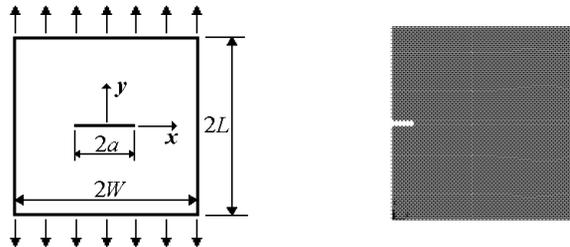


Figura 3.1: Pieza rectangular con fisura central [14]: $L=1.5\text{mm}$, $W=3\text{mm}$, $a=0.3\text{mm}$, $E=3240\text{ Mpa}$, $\nu=0.35$, $\rho=1190\text{ kg/m}^3$. Figura 3.2: Modelo Numérico - Número de barras: 37751, Long.Barras Normales: $6.0\text{e-}5\text{m}$, Tenacidad $G_c=352.3\text{J/m}^2$, $\epsilon_p=0.0106$, $K_r=12.15$, $R_{fc}=30\text{m-}1/2$, Incremento de tiempo: $1.0\text{e-}8\text{seg}$, Velocidad de desplazamiento prescrito $VF=15\text{m/seg}$.

Se tuvo en cuenta la simetría geométrica y de cargas del modelo considerando solamente la mitad del mismo con 50 módulos de lado con una longitud de $6.0\text{e-}5\text{m}$ cada uno. La pieza fue considerada en estado Plano de Deformaciones y sometida una velocidad de desplazamientos prescrito de $VF=15\text{m/seg}$, con variación lineal hasta el tiempo t_r , de $0,1\ \mu\text{s}$.

La fisura inicial fue introducida en el modelo debilitando los elementos en correspondencia con la fisura, disminuyendo su módulo de elasticidad para que posean una resistencia mecánica despreciable. El modelo discretizado es presentado en la Figura 3.

5 RESULTADOS OBTENIDOS

5.1 De la velocidad de propagación de la fisura:

En la Figura 4, se ha representado la variación de la coordenada radial de la punta de la fisura en el tiempo y la velocidad de propagación de la fisura.

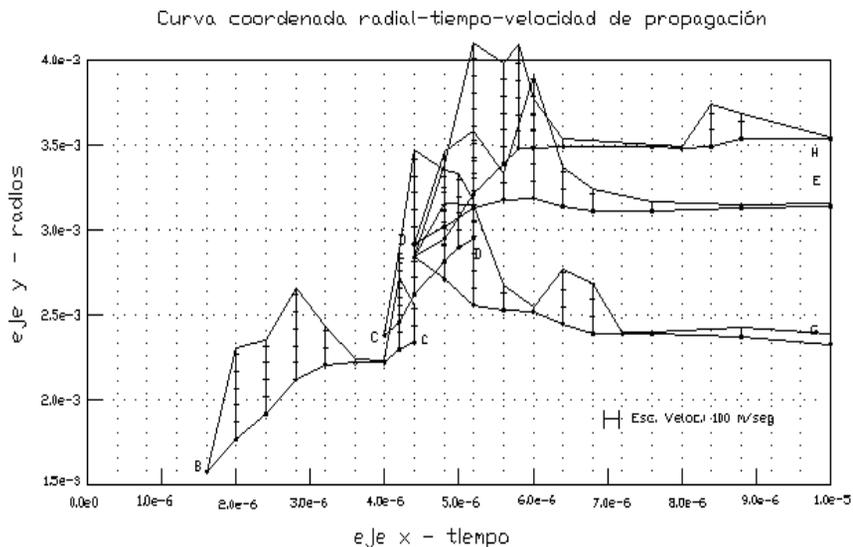


Figura 4. Curva de coordenada radial-tiempo-velocidad de propagación

5.2 Descripción de la grafica obtenida:

Para la mejor comprensión de la gráfica coordenada radial-tiempo, se enuncian las siguientes características:

Esta coordenada radial ha sido calculada como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas x e y de la punta de la fisura en la placa. A su vez, para cada punto de la coordenada radial-tiempo, se ha representado la velocidad de propagación de la fisura correspondiente a cada intervalo de tiempo.

En el gráfico se observarán puntos con igual coordenada radial, pero que ocurren en tiempos diferentes. Esto evidencia una discontinuidad de la curva coordenada radial - tiempo que indica un nuevo frente de avance de la fisura.

Una bifurcación de la curva coordenada radial - tiempo indica que la fisura se propaga en dos direcciones opuestas.

La pendiente positiva de la curva coordenada radial - tiempo representa la propagación de la fisura hacia la derecha o hacia arriba, es decir hacia valores crecientes de la coordenada radial.

La pendiente negativa de la curva coordenada radial - tiempo indica que la fisura se propaga hacia la izquierda o hacia abajo, es decir hacia valores decrecientes de la ordenada radial.

5.3 Descripción de la propagación de la fisura:

La propagación de la fisura se inicia en el punto B con dirección BC hasta que la propagación de la fisura se detiene. En este instante se inicia en el punto C un nuevo frente de fisura que luego es alcanzado por la fisura BC cuando inicia nuevamente su propagación. Durante el periodo en que la fisura BC no ha avanzado se observa un valor constante de la coordenada radial de la punta de la fisura en el tiempo.

El frente de fisura originado en C se propaga con dirección CD hasta alcanzar un nuevo frente de fisura que se originó en D. Así, la fisura originada en D se propaga con dirección DE hasta prácticamente detenerse a los $8.8e-6$ seg.

En el instante que aparece en D un nuevo frente de fisura, también aparece en F, que se propaga en dos direcciones opuestas indicadas con el trazo FG (con pendiente negativa) y FH (con pendiente positiva).

Esta gráfica denota una cierta tendencia a que se originen nuevos frentes de fisura luego del instante en que la fisura en propagación haya alcanzado su velocidad máxima y comienza a detenerse y que para los instantes en que en algunas fisuras aumentan su velocidad de propagación en otras disminuyan.

Lo que llama la atención, es que la velocidad de propagación en ciertos picos ha resultado superior a la velocidad límite teórica establecida por Mott, de $0,38.C_0$ y que para los valores del ejemplo resulta de 627 m/seg, tema que precisa ser analizado con mayor atención.

5.4 Patrones de fisuración

En las Figuras 5 se han representados los patrones de fisuración para diferentes instantes del proceso de propagación de la fisura. En ellos pueden observarse la formación de zonas de nucleación antes de la aparición de un nuevo frente de fisura. Así, el modelado de la propagación de la fisura a través del DEM permite captar ciertos fenómenos reales que se producen durante la propagación de la fisura, como la abertura de las fisuras en la frente de la fisura principal y la propagación de la fisura secundaria al encuentro de la fisura principal..

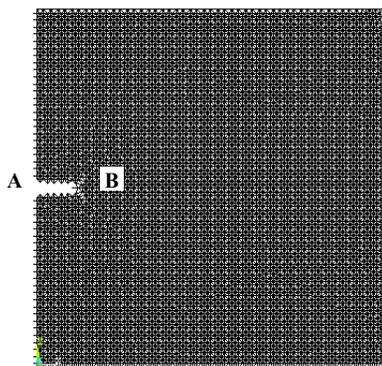


Fig. 5.1 – Tiempo: 1,60e-6seg

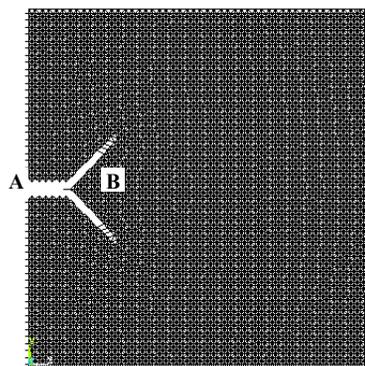


Fig. 5.2 – Tiempo: 2,40e-6seg

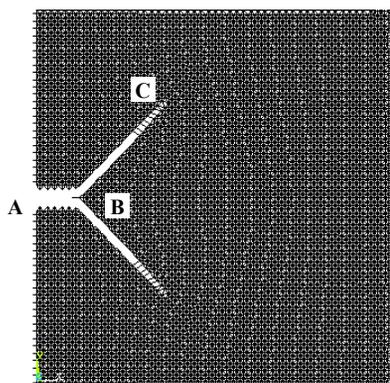


Fig. 5.3 – Tiempo: 3,20e-6seg

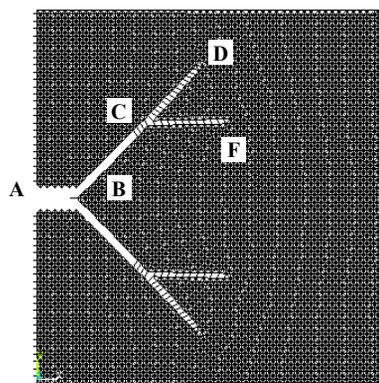


Fig. 5.4 – Tiempo: 4,00e-6seg

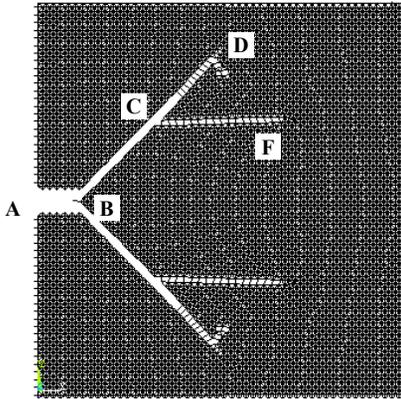


Fig. 5.5 – Tiempo: 4,40e-6seg

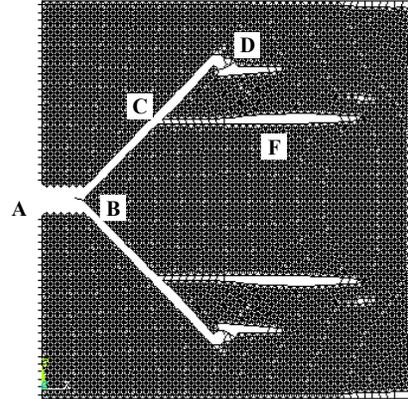


Fig.5.6 – Tiempo: 5,20e-6seg

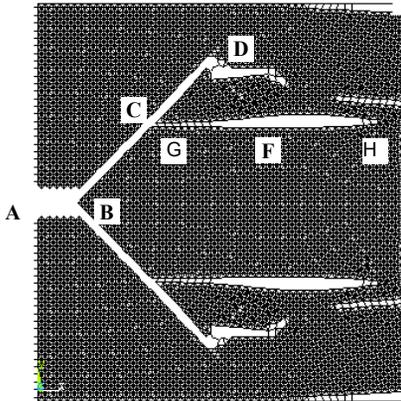


Fig. 5.7 – Tiempo: 5,70e-6seg

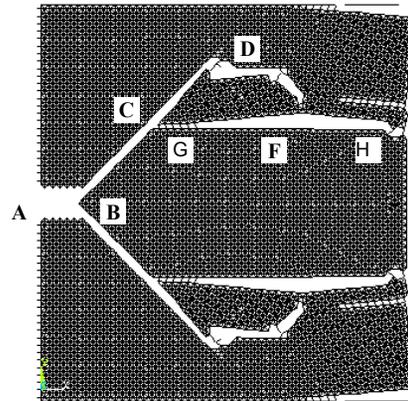


Fig. 5.8 – Tiempo: 6,40e-6seg

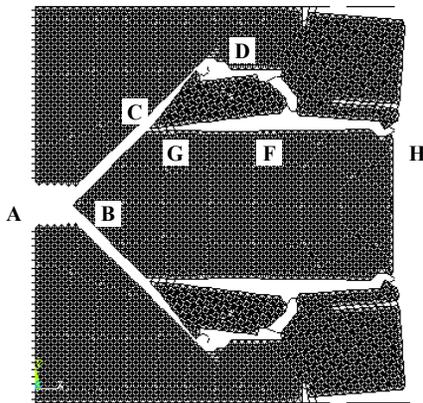


Fig. 5.9 – Tiempo: 7,60e-6seg

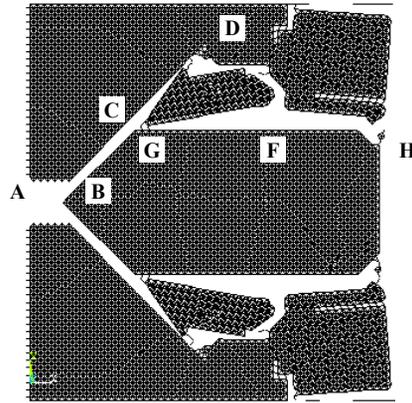


Fig. 5.10 – Tiempo: 1,00e-5seg

5.5 Relación de la propagación de la fisura con el balance de energías interno:

En la Figura 6, se muestra la variación de las energías internas en el sistema con el tiempo. Se ha representado la energía elástica (ENEL), la energía cinética (ENCN), la energía de fractura (ENGD) y la energía interna del sistema (ENIN), esta última determinada como la suma de todas las formas de energía acumuladas y disipadas en el sistema.

Es importante destacar que la excitación externa es aplicada como una velocidad de deformación prescrita, cuando la placa pierde su capacidad de absorber energía elástica de deformación los fragmentos de placa próximos a los bordes se moverán como cuerpos rígidos lo que aumenta la energía cinética del sistema. El balance energético y la Figura 4 dejan en claro el comportamiento espasmódico en el crecimiento de las fisuras, presentándose variaciones bruscas en la velocidad de propagación de las fisuras y en los gradientes de las curvas de energía elástica y cinética en el tiempo.

También puede observarse como se estabiliza la energía de fractura cuando el fenómeno de fisuración se ha detenido (o por lo menos disminuido significativamente).

Es posible correlacionar el balance energético con la forma en que se produce el proceso de ramificación de la fisura. Comparando la Figura 6, en donde se representa el balance energético, con las diferentes configuraciones presentadas en las figuras 5.1 a 5.10 y con la grafica de la Figura 4, en donde se representa la forma en que se produce el proceso de fractura, puede observarse que los gráficos son coherente entre sí.

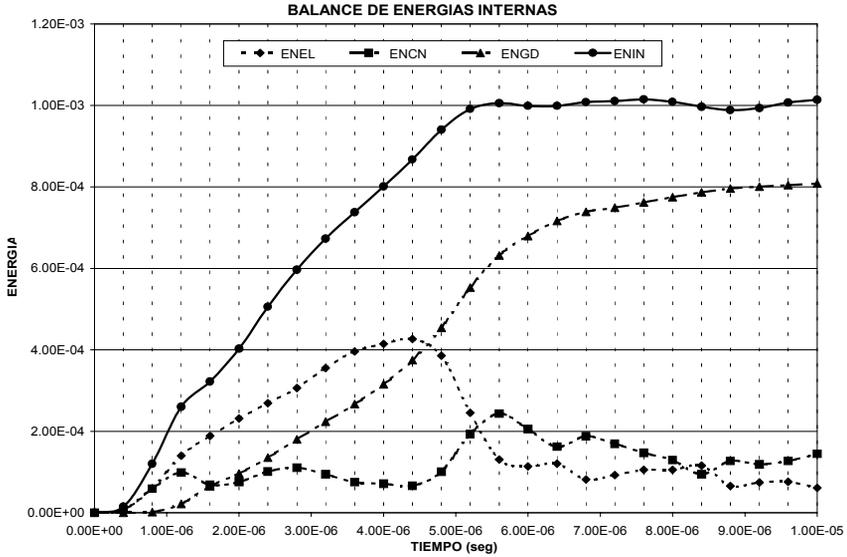


Figura 6. Balance de energías internas

5.6 De la influencia del modelado de la punta de la fisura en el patrón de fisuración:

Se ha observado que al disminuir la discretización de la placa, es decir aumentando el número de elementos en que se discretiza, el modelado de la punta de la fisura influye en los patrones de fisuración obtenidos.

En la figura 7 se representan los dos modelos de punta de fisuras analizados.

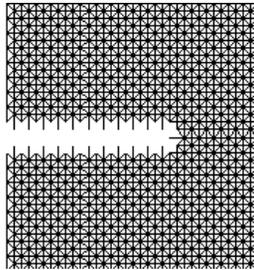


Fig. 7.1- Punta Tipo A-redondeada

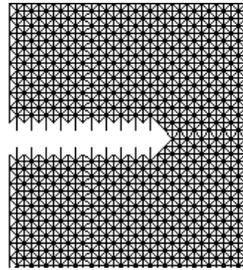


Fig. 7.2- Punta Tipo B-aguda

En la figura N° 8, se han representado los diferentes patrones de fisuración obtenidos para discretizaciones de la malla con diferentes número de elementos.

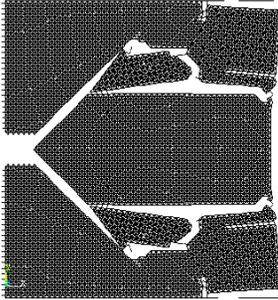


Fig. 8.1-Discretización 50x50 módulos - Punta Tipo B

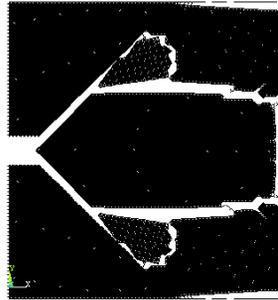


Fig. 8.2-Discretización 75x75 módulos - Punta Tipo B

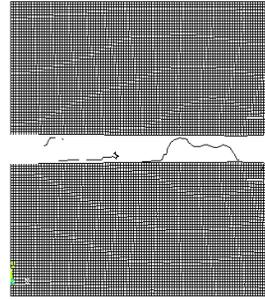


Fig. 8.3-Discretización 100x100 módulos - Punta Tipo A

En la Figura 9, se han representado los patrones de fisuración obtenidos para una discretizaciones de la malla en 100x100 elementos, teniendo en cuenta el modelado de la punta de la fisura. El patrón de la figura 9.a se ha obtenido para una punta de fisura tipo A y el patrón de la figura 9.b se ha obtenido para una punta de fisura tipo B.

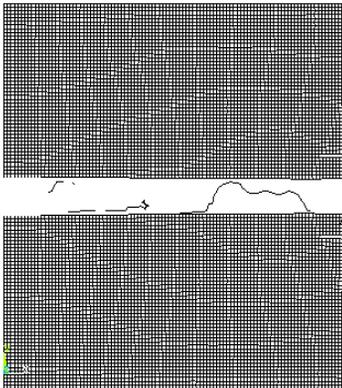


Fig. 9.1-Discretización 100x100 módulos - Punta Tipo A

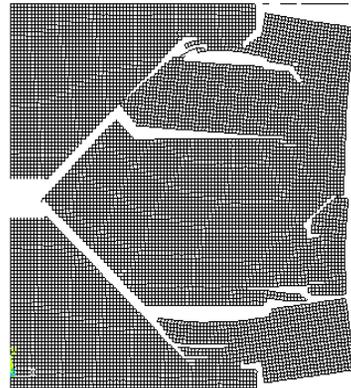


Fig. 9.2-Discretización 100x100 módulos - Punta Tipo B

Como puede observarse en los patrones de fisuración, la forma de la punta de la fisura influye sustancialmente en el padrón de fisuración esperado.

Otro punto a ser destacado es la pérdida de simetría en los resultados obtenidos al aumentar el tamaño de la discretización

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el estudio de propagación de la fisura sometida a una excitación dinámica aplicando el método de los elementos discretos. De los resultados obtenidos se concluye que:

El método permite capturar varios fenómenos relacionados con la propagación dinámica de las fisuras, como el fenómeno de nucleación frente a la fisura principal y su avance al encuentro de la fisura principal

La correlación entre el balance energético y el mapeado del proceso de ruptura se presentó de acuerdo a lo esperado.

La dependencia entre la forma de la punta de la fisura (radio de la punta de fisura) y el padrón de fisuración también fue levantado mostrándose su gran influencia.

Del trabajo surgieron varios temas que deben ser tenidos en cuenta para un mayor estudio, como los picos de velocidades de propagación de la fisura mayores que $0.38C_0$ y la relación entre discretización forma de la punta de la fisura y padrón de fisuración.

Además, contar con ensayos experimentales resultará una ayuda inestimable en la calibración de este modelo de análisis.

7 REFERENCIAS

- [1] **Sih, G., C.**, "Mechanics of Fracture, Initiation and Propagation.", Kluwer Academic Publishers.(1991).
- [2] **Freund, L. B.** "Dynamic fracture mechanics", Cambridge University Press, 1998, 563p. UK.
- [3] **Branco, C.M., Fernandez, A. A., Castro, P. T.** "Fadiga de Estruturas Soldadas", Fundação Calouste Gubelkian. 901p. 1986.
- [4] **Bittencourt, T. N., Wawrzynek, P. A., Ingraffea, A. R. e Souza, J. L.**, 1996, "Quase automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, No. 2, pp. 321-334.
- [5] **Portela, A.**, "Dual Boundary Element Incremental Analysis of Crack Growth". Wessex Instituted Technology, Phd Thesis, Shuampton, feb 1992.
- [6] **Riera, J.D. and Iturrioz, I.**(1998): "Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading", *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 179, 135-144.
- [7] **Anderson, T., L.** "Fracture Mechanics, Fundamentals and Applications", CRC Press, Boston 1995.

- [8] **Kanninen, M. F., Popelar, C. H.** “Advanced Fracture Mechanics. New York, Oxford University, 1985. 573p.
- [9] **Riera, J. D., Rocha, M., M.**, “A note on the velocity of crack propagation in tensile fracture”, *Journal of The Brazilian Society of mechanical Sciences*, v.13,n.3,p.217-240,1991.
- [10] **Rocha, M.M.** “Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil”. Porto Alegre, 123 p. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1989.
- [11] **Hayashi, Y.** “Sobre um modelo de discretização de estruturas tridimensionais aplicado em dinâmica não linear”. Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982.
- [12] **Iturrioz, I.** “Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado”. Porto Alegre, 176 p. Tese (Doutorado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1995.
- [13] **Needleman, A.** , ‘A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, v.54, p525-531,1987.
- [14] **Fedrico, F** “Aplicação de Interfaces coesivas na Mecânica da Fratura Via Método dos Elementos Finitos”, Porto Alegre. Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- [15] **Riera, J.D. and Iturrioz, I.**(1998): "Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading", *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 179, 135-144.
- [16] **Ewalds, H.L.**, “Fracture Mechanics”,1996, Co-publication of Edwar Arnold and Delftse Uitgevers Maatschappij.
- [17] **Spellmeyer, Barrios D’Ambra, Iturrioz**, “Simulación Numérica de la propagación de fisuras en sólidos utilizando el método de los elementos discretos”, (2001), *Mecánica Computacional*, Vol.20, pp 506-513.