

## UM MODELO PARA A AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DO SOLO EM FUNDAÇÕES PROFUNDAS

Newton C. P. Ferro\*, Antonio C. Rigitano\*, Heitor M. Bottura\*, Lauro H. M. Chueiri\*

\* Departamento de Engenharia Civil - Faculdade de Engenharia - Campus de Bauru  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP  
Av. Luiz Edmundo Coube, s/n - Bauru, São Paulo, Brasil  
e-mail: [ferro@feb.unesp.br](mailto:ferro@feb.unesp.br), web page: <http://www.feb.unesp.br>

**Key words:** Plasticidade, Interação Solo-Estrutura, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos.

**Abstract.** *A interação solo-estaca tem sido objeto de estudo de inúmeros pesquisadores, que têm tratado a questão por diversos procedimentos numéricos. Neste trabalho, apresenta-se uma combinação do método dos elementos de contorno (MEC) com o método dos elementos finitos (MEF) para a análise da interação entre estacas e o solo, considerado como um meio infinito tridimensional e homogêneo. As estacas concebidas como elementos reticulares são tratadas pelo método dos elementos finitos, enquanto o meio contínuo é modelado pelo método dos elementos de contorno. As equações das estacas oriundas do método dos elementos finitos são combinadas como as do meio contínuo, obtidas a partir do método dos elementos de contorno, resultando um sistema completo de equações que convenientemente tratado permite considerar-se a interação solo-fundação-superestrutura. A este modelo foi implementada uma formulação para a análise do comportamento não-linear do solo na interface com as estacas. Utiliza-se, para tanto, um modelo elastoplástico, de natureza incremental, baseado no processo das tensões iniciais, para a modelagem do comportamento das forças de interação entre a superfície da estaca e do solo.*

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo, utilizando uma combinação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o Método dos Elementos Finitos (MEF), ao abordar a interação solo-fundação, considerar o comportamento não-linear do solo na interface com as estacas. Para tanto, a fundação, constituída por estacas, dispostas no meio contínuo, são discretizadas como elementos reticulares pelo Método dos Elementos Finitos. O solo é modelado pelo Método dos Elementos de Contorno empregando a solução fundamental de Mindlin, cuja grande vantagem é discretizar apenas as regiões carregadas, tendo em vista que a superfície do meio está livre de forças.

As equações oriundas do Método dos Elementos de Contorno são reescritas em forma equivalente à empregada pelo Método dos Elementos Finitos, preparando dessa maneira a combinação dos sistemas de equações. Para a combinação desses sistemas de equações é imposta a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças na interface solo-estaca. Este enfoque para a combinação MEC-MEF foi apresentado por FERRO & CHUEIRI<sup>1</sup> e será sintetizado no próximo item.

Para a análise não-linear do solo, que é o tema central deste trabalho, um modelo elastoplástico é utilizado para considerar o comportamento das forças interativas entre a superfície da estaca e do solo. Para o tanto, apresenta-se, inicialmente, alguns conceitos da teoria da plasticidade para casos unidimensionais que são a seguir generalizados para estados multidimensionais e, que governam o comportamento elastoplástico dos materiais, bem como, são introduzidas as expressões necessárias ao equacionamento do problema.

Em seguida são apresentadas as hipóteses e simplificações introduzidas tendo em vista sua aplicação em problemas de interação solo-fundação em estacas, assim como, o procedimento para a solução numérica de tais problemas.

Ao final são apresentados alguns exemplos numéricos, considerando-se o comportamento não-linear do solo, com o objetivo de se avaliar a adequação da formulação proposta.

## 2 A COMBINAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para um corpo tridimensional de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , admitindo-se o domínio com  $N_b$  linhas de carga, correspondentes às estacas, a representação integral de deslocamentos é dada por:

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(S)u_j(S) &= -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(S, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) + \\
 &+ \int_{\Gamma} U_{ij}^*(S, Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} U_{ij}^*(S, q)b_j(q)d\Omega(q) + \\
 &+ \sum_{b=1}^{N_b} \int_{\Gamma_b} U_{ij}^*(S, Q)q_j^b(Q)d\Gamma(Q)
 \end{aligned} \tag{1}$$

sendo,  $u_j$  e  $p_j$  os deslocamentos e forças de superfície respectivamente. As variáveis indicadas com “\*” correspondem à solução fundamental, cujos valores podem ser encontrados na literatura. O termo independente  $C_{ij}(S)$  é definido geometricamente. O termo  $q_j^b(Q)$  representa as forças de interação aplicadas ao sólido tridimensional,  $N_b$  é o número total de barras correspondentes às estacas e  $\Gamma_b$  as linhas onde essas forças estão aplicadas.

Na equação (1), a parcela correspondente às forças volumétricas pode ser negligenciada, para as aplicações a serem aqui desenvolvidas. Dessa forma, a equação integral de deslocamentos, pode ser escrita como:

$$C_{ij}(S)u_j(S) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(S, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} U_{ij}^*(S, Q)p_j(Q)d\Gamma(Q) + \sum_{b=1}^{N_b} \int_{\Gamma_b} U_{ij}^*(S, Q)q_j^b(Q)d\Gamma(Q) \quad (2)$$

A equação integral (2), pode ser transformada em uma representação algébrica, bastando para isso dividir a superfície de interação ou de carga, por um número finito de elementos, e aproximar as variáveis reais do problema, utilizando-se valores nodais e funções de forma. Estendo esta representação algébrica ao todos os pontos nodais do contorno do sólido, estabelece-se um sistema de equações, que convenientemente arranjado pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{R} \underline{Q} \quad (3)$$

sendo que, a matriz  $\underline{G}$  resulta do cálculo da integral da equação (2),  $\underline{Q}$ , o vetor que contém os valores das componentes nodais das forças de interação em todos os nós e  $\underline{R}$  a matriz dos coeficientes de influência calculados a partir da integral correspondente na equação (2).

Como as novas incógnitas  $\underline{Q}$ , são admitidas no domínio, equações adicionais precisam ser escritas selecionando apropriados pontos de colocação, isto é,

$$\underline{u} = -\underline{H} \underline{U} + \underline{G} \underline{P} + \underline{R} \underline{Q} \quad (4)$$

sendo que,  $\underline{u}$  é o vetor que contém todos os deslocamentos associados aos pontos tomados ao longo das linhas internas.

Considerando-se que, usualmente, apenas forças são prescritas para o problema sob consideração, a partir da equação (3) pode-se escrever:

$$\underline{U} = \underline{U}^o + \underline{S} \underline{Q} \quad (5)$$

onde  $\underline{U}^o$  representa os efeitos das forças prescritas e,

$$\underline{S} = \underline{H}^{-1} \underline{R} \quad (6)$$

Substituindo-se, a expressão de  $\underline{U}$  dada na equação (5) na equação (4), tem-se:

$$\underline{u} = \underline{u}^0 + \underline{S} \underline{Q} \quad (7)$$

em que,

$$\underline{S} = \underline{R} - \underline{H} \underline{S} \quad (8)$$

e,

$$\underline{u}^0 = \underline{G} \underline{P} - \underline{H} \underline{U}^0 \quad (9)$$

A equação (7) relaciona todos os deslocamentos para pontos com forças de interação atuando ao longo das estacas, que são as linhas internas.

A partir desta formulação originada do método dos elementos de contorno, consegue-se a interação entre o meio semi-infinito e as estacas que nele se encontram.

As estacas, são tratadas como elementos estruturais de barras, dispostas no espaço tridimensional, pelo método dos elementos finitos, cujo sistema de equações lineares, que relaciona deslocamentos nodais,  $\underline{U}_F$  e forças nodais equivalentes de interação  $\underline{F}_F$  e  $\underline{F}_F^0$  que é o vetor independente de forças prescritas, pode ser escrito como:

$$\underline{K}_F \underline{U}_F = \underline{F}_F + \underline{F}_F^0 \quad (10)$$

sendo  $\underline{K}_F$ , a matriz de rigidez do conjunto de estacas referida ao sistema global de referência.

No vetor  $\underline{U}_F$ , são considerados os deslocamentos e rotações segundo as três direções coordenadas.

Para se considerar a interação do meio contínuo com os elementos de barras, emprega-se uma formulação que permite a combinação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos.

Neste trabalho optou-se por transformar o sistema de equações obtido a partir do método dos elementos de contorno em um sistema similar, em forma, ao proveniente do método dos elementos finitos, visto que, um dos objetivos é o de se obter uma matriz de rigidez da fundação. Para tanto, vamos inicialmente reescrever a equação (7), apresentando-a em termos de valores de componentes de forças nodais de interação:

$$\underline{Q} = \underline{S}^{-1} \underline{u} - \underline{Q}^0 \quad (11)$$

sendo,

$$\tilde{Q}^o = \tilde{S}^{-1} \tilde{u}^o \quad (12)$$

Lembrando-se que  $\tilde{F}$  na equação (10) representa forças nodais equivalentes, enquanto  $\tilde{Q}$  na equação (11) corresponde a valores de componentes de forças, portanto de diferentes naturezas. Assim, é necessário alterar-se a equação (11) para se obter sistemas de equações de formas análogas. Isso é feito multiplicando-se a equação (11) pela matriz  $\tilde{T}$  que transforma componentes de forças nodais, em forças nodais equivalentes, podendo-se desta forma escrever:

$$\tilde{K}_B \tilde{u} = \tilde{F} + \tilde{F}_B^o \quad (13)$$

sendo,

$$\tilde{K}_B = \tilde{T} \tilde{S}^{-1} \quad (14)$$

$$\tilde{F}_B = \tilde{T} \tilde{Q} \quad (15)$$

e,

$$\tilde{F}_B^o = \tilde{T} \tilde{Q}^o \quad (16)$$

A equação (13) é uma representação algébrica para domínios semi-infinitos, na qual as forças nodais (conhecidas e incógnitas) são aplicadas ao longo das linhas internas. Outras forças conhecidas, atuando sobre o contorno ou sobre a superfície do meio contínuo, são consideradas por meio de  $\tilde{Q}^o$  (ou  $\tilde{F}_B^o$ )

Assim, a matriz  $\tilde{K}_B$  representa, no sistema de coordenadas global, uma matriz de rigidez equivalente, oriunda do método dos elementos de contorno.

A associação do meio contínuo semi-infinito e as estacas é agora efetuada combinando-se adequadamente os sistemas expressos pelas equações (10) e (13), levando-se em consideração as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio, ao longo das interfaces estacas-meio contínuo, isto é:

$$\tilde{U}_F^I = \tilde{U}_B^I \quad (17)$$

e,

$$\tilde{F}_F^I + \tilde{F}_B^I = 0 \quad (18)$$

em que, o índice I, indica a interface.

### 3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA TEORIA DA PLASTICIDADE

Basicamente, o comportamento plástico de um material fica caracterizado pelo aparecimento de deformações irreversíveis  $\epsilon^p$ , mesmo quando se anula a solicitação a que o corpo está submetido. Essas deformações plásticas, que são consideradas independentes do tempo de aplicação do carregamento, aparecem depois de atingida a tensão de início de escoamento do material  $\sigma_0$ . Na Figura 1 apresenta-se esquematicamente uma possível curva tensão-deformação, no caso de um ensaio uniaxial, para um material com estas características.

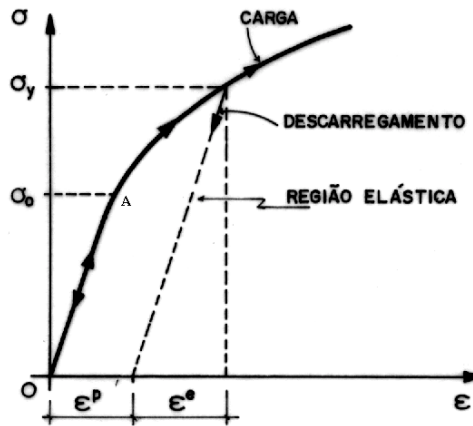


Figura 1: Diagrama tensão-deformação para um ensaio uniaxial.

Para que se obtenha uma formulação de uma teoria que permita modelar o comportamento elastoplástico de um material, devem ser conhecidas relações explícitas entre tensão e deformação que descrevam este comportamento em regime elástico, e também, outras relações que representem o comportamento do material pós-escoamento, que caracteriza o regime plástico. Finalmente, é indispensável também ser conhecido, um critério de escoamento que indique o nível de tensão a partir do qual surgem deformações plásticas.

### 4 PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS UNIDIMENSIONAIS

Para situações unidimensionais, o modelo é facilmente definido apenas em função da curva tensão-deformação, obtida a partir de ensaio uniaxial de um corpo de prova do material em estudo. Usualmente, algumas curvas tensão-deformação idealizadas são admitidas para representar o comportamento do material, objetivando simplificar a análise elastoplástica. A idealização mais simples corresponde ao comportamento elastoplástico perfeito, que não será abordado neste trabalho.

Um outro comportamento consiste em assumir uma curva bilinear, conforme apresentada na Figura 2, com endurecimento linear do material após o escoamento. Neste caso, para tensões abaixo da tensão inicial de escoamento  $\sigma_0$ , (ponto A da curva), o comportamento do material é elástico e seu módulo de elasticidade igual a  $E$ . Atingida a tensão de escoamento, um incremento de tensão acarreta um incremento de deformação, com o aparecimento de deformações plásticas,  $\epsilon^p$ , segundo uma inclinação denominada de módulo tangente  $E_T$ . Assim, após o escoamento inicial, conforme mostrado na Figura 2, tem-se:

$$d\sigma = E_T d\epsilon \quad (19)$$

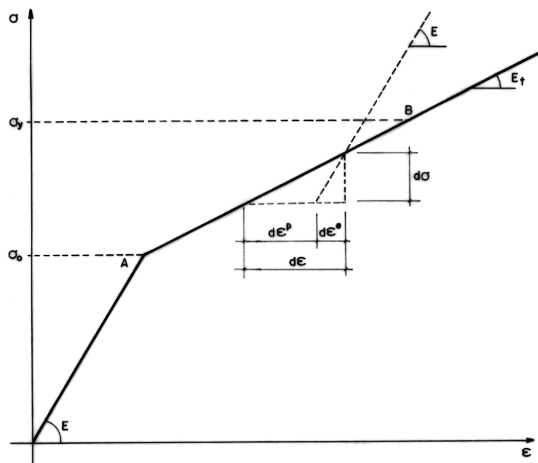


Figura 2: Diagrama tensão-deformação para um material elastoplástico com endurecimento linear.

Com o incremento de deformação total  $d\epsilon$ , podendo ser decomposto em uma componente elástica e outra plástica, ou seja:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (20)$$

A partir da observação da Figura 2, pode-se constatar que, mesmo após o início do escoamento, incrementos de tensão correspondem a incrementos de deformação elástica, dada por:

$$d\sigma = E d\epsilon^e \quad (21)$$

No caso do material em estudo que apresenta curva tensão-deformação bilinear, define-se o parâmetro  $H'$ , denominado de parâmetro de endurecimento, como a relação entre os incrementos de tensão que excedem a tensão de escoamento e os correspondentes incrementos de deformação plástica, isto é:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (22)$$

ou seja,

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^c} \quad (23)$$

Substituindo-se as equações (19) e (21) na equação (23), resulta:

$$H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (24)$$

A tensão de escoamento  $\sigma_y$ , em um ponto qualquer **B**, pode ser escrita em função da tensão de início de escoamento, somada aos incrementos de tensão entre os pontos **A** e **B**, como:

$$\sigma_y = \sigma_0 + H' \varepsilon^p \quad (25)$$

sendo  $\varepsilon^p$  a deformação plástica acumulada no intervalo  $\overline{AB}$ .

O nível de tensão para o material elastoplástico descrito está limitado a seguinte condição:

$$\sigma - \sigma_y \leq 0 \quad (26)$$

O primeiro membro desta inequação pode ser entendido como uma função de escoamento que não pode assumir valores positivos, ou seja:

$$F(\sigma, k) \leq 0 \quad (27)$$

ou,

$$\sigma - Y(k) \leq 0 \quad (28)$$

Comparando-se as expressões (26) e (28), constata-se que  $Y(k)$  é uma função que representa a tensão de escoamento atual,  $\sigma_y$ . Portanto, pode-se verificar, a partir da equação (25), que a função  $Y(k)$  depende apenas do parâmetro  $k$ , associado à história e ao comportamento quanto ao endurecimento do material.

## 5 TEORIA DA PLASTICIDADE NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

A generalização da análise elastoplástica para estados multiaxiais de tensão pode ser feita por meio das hipóteses básicas da teoria da plasticidade juntamente com os conceitos para o caso unidimensionais apresentados anteriormente.

No meio contínuo, as relações entre tensão e deformação podem ser estabelecidas através das suas componentes tensoriais  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$ . Assim, os incrementos de deformação total  $d\varepsilon_{ij}$ , de forma análoga ao caso uniaxial, podem ser expressos através das componentes elásticas e plásticas, ou seja:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^p \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (29)$$



A relação tensão-deformação, que descreve o comportamento do material na fase elástica, é expressa como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (30)$$

onde  $C_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem das constantes elásticas, que para materiais isotrópicos, é dado por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (31)$$

sendo,  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker.

Para estados de tensão multiaxiais, um critério de escoamento determina o estado de tensão para o qual iniciam-se as deformações plásticas e pode ser escrito, genericamente, sob a forma:

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - Y(k) = 0 \quad (32)$$

sendo que,  $f(\sigma_{ij})$  é a função do estado de tensão atual  $\sigma_{ij}$ , podendo ser interpretada como uma tensão efetiva ou equivalente uniaxial  $\bar{\sigma}$ . A função  $Y(k)$  depende apenas do parâmetro de endurecimento do material,  $k$ , podendo ser entendido como um valor convencional da tensão de escoamento, obtida a partir de ensaios uniaxiais.

O critério de escoamento definido pela função  $F$  pode ser representado no espaço das tensões por uma superfície, denominada de superfície de escoamento, que separa os estados de tensões elásticas daqueles que geram deformações permanentes ou plásticas.

O desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento é definido a partir da variação da função de escoamento do material  $Y(k)$ , que pode ser relacionada à deformação plástica por meio do parâmetro de endurecimento  $k$ . A hipótese conhecida como *work hardening*, estabelece o parâmetro  $k$  como uma função do trabalho plástico,  $W_p$ , acumulado durante as deformações plásticas, isto é:

$$k = W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (33)$$

em que  $d\epsilon_{ij}^p$  é a componente da deformação plástica ocorrida durante o incremento de deformação.

Para a formulação de um modelo elastoplástico, é necessário estabelecer relações constitutivas que representem o comportamento do material na fase pós-escoamento. Assim, faz-se uso de uma hipótese adicional da teoria de plasticidade que consiste em considerar que o incremento de deformação plástica seja proporcional ao gradiente de tensão de uma grandeza escalar denominada *potencial plástico*  $Q$ , podendo-se escrever:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (34)$$

sendo  $d\lambda$  uma constante denominada *multiplicador plástico*.

A equação (34) é denominada *regra de fluxo*, uma vez que indica o fluxo plástico após o escoamento. Quando se considera o potencial plástico  $Q$  coincidente com a função de escoamento  $F(\sigma_{ij}, k)$ , tem-se a regra de fluxo denominada associativa, e neste caso a equação (34) pode ser escrita como:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (35)$$

ou,

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (36)$$

uma vez que  $Y(k)$  não é dependente do estado de tensão.

Após o início do escoamento, o material passa a apresentar um comportamento elastoplástico. Para a determinação da relação tensão-deformação pós-escoamento, substituiu-se o incremento de deformação elástica da equação (29) na equação (30), de forma que o incremento de tensão seja expresso por:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (37)$$

Substituindo-se na equação (37) o incremento de deformação plástica dado na equação (36), tem-se:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - a_{kl}d\lambda) \quad (38)$$

sendo,

$$a_{kl} = \frac{\partial F(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{kl}} \quad (39)$$

O multiplicador plástico  $d\lambda$  pode ser determinado em função do incremento total de deformação, resultando:

$$d\lambda = \frac{a_{ij}C_{ijkl}}{a_{ij}d_{ij} + H'}d\epsilon_{kl} \quad (40)$$

sendo,

$$d_{ij} = C_{ijkl}a_{kl} \quad (41)$$

Finalmente, substituindo-se a equação (40) na equação (38), obtém-se a relação incremental entre tensão e deformação, dada por:

$$d\sigma_{ij} = \left( C_{ijkl} - \frac{d_{ij}a_{mn}C_{mnkl}}{a_{mn}d_{mn} + H'} \right) d\epsilon_{kl} \quad (42)$$

Visando a implementação computacional, é conveniente expressar o incremento de tensão em suas componentes elástica e plástica, ou seja:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p \quad (43)$$

sendo a parcela elástica do incremento dada por:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (44)$$

enquanto a componente plástica resulta em:

$$d\sigma_{ij}^p = \frac{d_{ij} a_{mn}}{a_{mn} d_{mn} + H'} d\sigma_{mn}^e \quad (45)$$

Nesta última equação,  $d\sigma_{mn}^e$  representa o incremento de tensão, devido ao incremento total de deformação, admitindo-se o comportamento elástico, de acordo com a equação (44).

## 6 CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

Um critério de escoamento tem por finalidade interpretar as solicitações combinadas, indicando o início das deformações plásticas. Assim, a teoria da plasticidade faz uso das mesmas superfícies de escoamento  $F$ , definidas na equação (32), interpretando-as, de outro modo, como critérios de plastificação do material.

Dada a grande variedade de materiais empregados (dúcteis, frágeis e outros não tão bem caracterizados), que apresentam comportamentos distintos, não é possível ter um único critério.

Neste trabalho tendo em vista que, o solo apresenta resistência à ruptura à tração simples diferente da resistência à compressão, serão considerados apenas os critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager que mais se adaptam a este comportamento.

## 7 FORMULAÇÃO MATRICIAL DAS RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Visando a implementação computacional, é conveniente que algumas expressões anteriormente apresentadas, sejam escritas na forma matricial. Inicialmente, a equação (32) que representa o critério de escoamento é reescrita na sua forma original,

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - Y(k) = 0 \quad (32)$$

que por diferenciação, obtém-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (46)$$

ou, na forma matricial,

$$\tilde{a}^T d\tilde{\sigma} - H' d\lambda = 0 \quad (47)$$

sendo  $\underline{a}$ , o vetor de fluxo, dado por:

$$\underline{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{31}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} \right\} \quad (48)$$

A equação (42), que relaciona os incrementos de tensão e deformação após o escoamento, fica:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_{ep} d\underline{\varepsilon} \quad (49)$$

sendo,  $\underline{D}_{ep}$  a matriz elastoplástica, dada por:

$$\underline{D}_{ep} = \left[ \begin{array}{c} \underline{E} \underline{a} \underline{a}^T \underline{E} \\ \underline{a}^T \underline{E} \underline{a}^T + H' \end{array} \right] \quad (50)$$

onde  $\underline{E}$  é a matriz de constantes elásticas do material.

Portanto, para a determinação da matriz elastoplástica, indicada na equação (50), basta que se conheça o vetor de fluxo  $\underline{a}$  para cada critério de escoamento, que como já descrito, pode ser denotado em função dos invariantes. De acordo com NAYAK & ZIENKIEWICZ<sup>2</sup>, o vetor  $\underline{a}$  pode ser expresso de forma geral, como:

$$\underline{a} = C_1 \underline{a}_{-1} + C_2 \underline{a}_{-2} + C_3 \underline{a}_{-3} \quad (51)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \underline{a}_{-1}^T &= \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} \\ \underline{a}_{-2}^T &= \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \underline{\sigma}} \\ \underline{a}_{-3}^T &= \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} \end{aligned} \quad (52)$$

Assim, somente as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são necessárias para definir o critério de escoamento. No caso do critério de Mohr-Coulomb, estas constantes valem:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{3} \text{sen } \phi \\ C_2 &= \cos \theta \left[ (1 + \text{tg} \theta \text{tg} 3\theta) + \text{sen } \phi (\text{tg} 3\theta - \text{tg} \theta) / \sqrt{3} \right] \end{aligned} \quad (53)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi}{2J_2 \cos 3\theta}$$

## 8 UM MODELO SIMPLES PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE SOLOS NA INTERFACE COM ESTACAS

Ao formular o presente modelo matemático para a análise da interação solo-fundação em estacas, no espaço tridimensional, vários são os fatores que contribuem para um comportamento não-linear, podendo-se citar: a não linearidade inerente ao comportamento do próprio solo, além de efeitos que se revelam na interface estaca-solo, como o escorregamento ou deslizamento, que se caracteriza pela não compatibilidade de deslocamentos entre o solo e a estaca, e a separação que pode ocorrer em razão do tipo de carregamento a que a estaca está submetida.

Estes dois efeitos não serão tratados neste trabalho, embora seja possível resolvê-los, também via tratamento numérico.

Neste modelo, a solução é obtida a partir de uma combinação MEC-MEF. Assim, as equações vistas anteriormente, após serem convenientemente modificadas, podem ser utilizadas na análise do comportamento não-linear do solo.

Para um incremento de carga genérico,  $d\tilde{F}$ , e admitindo-se o comportamento elástico, o incremento de deslocamentos correspondente,  $d\tilde{U}^e$ , é obtido, como:

$$d\tilde{U}^e = \tilde{K}^{-1} d\tilde{F} \quad (54)$$

sendo,  $\tilde{K}$  a matriz de rigidez equivalente do sistema solo-estaca.

Os incrementos de deslocamentos determinam na interface solo-estaca o aparecimento de incrementos de componentes de forças nodais, que podem ser calculados a partir da equação (11) e expressa como:

$$d\tilde{Q}^e = \tilde{S}^{-1} d\tilde{U}^e - d\tilde{Q}^0 \quad (55)$$

sendo que,  $d\tilde{Q}^e$ , representa os incrementos de componentes de forças de interação e  $d\tilde{Q}^0$ , os incrementos de forças conhecidas atuando sobre o contorno ou sobre a superfície do meio, nas três direções coordenadas.

As componentes de forças nodais determinam no solo em sua interface com a estaca o seguinte estado de tensão. No plano  $x_1$ - $x_2$ , as componentes de forças são somadas vetorialmente, obtendo-se uma resultante. A tensão normal neste plano é obtida pela divisão desta resultante pelo diâmetro da estaca. A componente de força na direção  $x_3$ , por sua vez, ao ser dividida pelo perímetro da estaca, determina uma tensão de cisalhamento em um plano vertical. Uma outra componente de tensão normal, na direção vertical, pode ser incluída ao modelo, como consequência do peso próprio do solo. Assim, fica definido um estado plano de tensões, dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{12}^e \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Diferentemente de outros modelos de comportamento não-linear onde se estabelecem relações entre tensões e deformações, neste caso as tensões estão relacionadas diretamente aos deslocamentos, como mostram as equações (54) e (55).

Após o escoamento, as relações incrementais apresentadas na equação (42), podem ser escritas na forma:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{C}} - \frac{\underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} \underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{C}}}{\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} + H'} \end{bmatrix} d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (57)$$

sendo que  $\underline{\underline{C}}$  a matriz de constantes elásticas dada por:

$$\underline{\underline{C}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (58)$$

onde, E e  $\nu$  são o módulo de deformação e o coeficiente de Poisson do solo, respectivamente. O vetor de fluxo,  $\underline{\underline{a}}$ , por sua vez, para o estado plano de tensão é dado por:

$$\underline{\underline{a}}^T = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} \right\} \quad (59)$$

Tendo em vista as equações (40) e (41), pode-se escrever a equação (57) como:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = d\underline{\underline{\sigma}}^e - d\lambda \underline{\underline{a}} \quad (60)$$

sendo que:

$$d\lambda = \frac{\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{C}}}{\underline{\underline{a}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} + H'} d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (61)$$

e,

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{a}} \quad (62)$$

A partir da equação (62), o vetor  $\underline{\underline{d}}$ , pode ser explicitado na forma:

$$\underline{\tilde{d}} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ G a_3 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

na qual,  $G$  é o módulo de deformação transversal do solo,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as componentes do vetor  $\underline{a}$  e  $M_1$ , vale:

$$M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2)}{1 - \nu^2} \quad (64)$$

Pode-se observar que a parcela  $d\lambda \underline{\tilde{d}}$  da equação (60) representa a componente plástica do incremento de tensões, que deverá ser reaplicada ao sistema como incremento de carga. Assim, as componentes plásticas de tensão são transformadas em incrementos de componente de forças nodais, segundo um procedimento inverso ao efetuado anteriormente ao se converter componentes de forças nodais em tensões. Determinados os incrementos de componentes de forças nodais, estes são transformados em incrementos de forças nodais equivalentes, utilizando-se a matriz  $\underline{\tilde{T}}$ , como indicado na equação (14), ou seja:

$$d\underline{\tilde{F}} = \underline{\tilde{T}} d\underline{Q} \quad (65)$$

Assim, a resultante dos incrementos de forças nodais equivalentes, obtida a partir da equação (65), será reaplicada ao sistema como um incremento de carga.

## 9 PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA NÃO-LINEAR

Utilizando-se o equacionamento descrito nos itens anteriores, é apresentado a seguir um procedimento numérico para a solução de problemas elastoplásticos, baseado no processo das tensões iniciais proposto por ZIENKIEWICS et al.<sup>3</sup>, para o método dos elementos finitos.

Tendo em vista a natureza incremental da relação tensão-deformação para o comportamento pós-escoamento, dada pela equação (49), o processo numérico para a solução do problema requer que o carregamento aplicado à estaca seja feito de forma incremental. Utiliza-se, então, um algoritmo incremental-iterativo, sem a atualização das matrizes envolvidas, conhecido como método da rigidez inicial, análogo ao apresentado por OWENS & HINTON<sup>4</sup>. Nesta referência, está detalhada a abordagem numérica que é empregada no presente trabalho, apresentando-se a seguir apenas os aspectos gerais do algoritmo.

Para um incremento de carga genérico e admitindo-se o comportamento elástico, pode-se determinar o incremento de deslocamentos aplicando-se a equação (54), e as componentes de forças nodais, por meio da equação (55), que conforme mostrado no item anterior, resultam em incremento de tensões no solo, nos pontos da interface estaca-solo. Este incremento de

tensões é acumulado ao estado de tensões atual. Se algum ponto atinge o escoamento, o incremento de tensões reais, que verifica a condição de escoamento, deve ser calculado e o excesso de tensões, que consiste no incremento de tensões plásticas,  $\Delta \underline{\sigma}^p$ , deve ser reaplicado ao sistema na forma de incremento de cargas.

Um procedimento que pode ser utilizado é o de se obter a solução elástica para um carregamento total previsto e definir os incrementos de cargas a partir de uma fração  $\beta_i$  do carregamento. Assim, para um incremento de carga genérico  $\mathbf{i}$ , o incremento nas tensões elásticas, vale:

$$\Delta \underline{\sigma}_{\sim i}^e = \beta_i \underline{\sigma}_{\sim}^e \quad (66)$$

À medida que o carregamento vai sendo aplicado, os fatores  $\beta_i$  vão sendo acumulados.

A seqüência básica utilizada para cada incremento de carga pode ser resumidamente descrita como:

(a) Calcula-se o incremento elástico das tensões,  $\Delta \underline{\sigma}_{\sim i}^e$ , por meio da equação (66), para a primeira iteração, a partir do incremento de carga. Para as demais iterações,  $\Delta \underline{\sigma}_{\sim i}^e$  é calculado a partir do excesso de tensões, que corresponde ao incremento plástico,  $\Delta \underline{\sigma}_{\sim i-1}^p$ , que transformado em componentes de cargas nodais, é aplicado como incremento do carregamento, de acordo com a equação (65):

$$\Delta \underline{\Gamma}_{\sim i}^e = \underline{T} \Delta \underline{Q}_{\sim i-1}^p \quad (67)$$

(b) Em cada ponto do solo, calcula-se o estado de tensões supõe-se o comportamento elástico, somando-se o incremento  $\Delta \underline{\sigma}_{\sim i}^e$  as tensões verdadeiras da iteração anterior, ou seja:

$$\underline{\sigma}_{\sim i}^e = \underline{\sigma}_{\sim i-1} + \Delta \underline{\sigma}_{\sim i}^e \quad (68)$$

(c) O próximo passo consiste em se verificar a condição de escoamento. Ou seja, se  $f(\underline{\sigma}_{\sim i}^e) < \sigma_y(k)$ ; o ponto ainda está em regime elástico e o valor de  $\underline{\sigma}_{\sim i}^e$  está correto. Na desigualdade acima,  $\sigma_y(k)$  é a tensão de escoamento atualizada no final da iteração anterior, sendo dada por:

$$\sigma_y(k) = \sigma_0 + H' \bar{\epsilon}_{i-1}^p \quad (69)$$

sendo que,  $\bar{\epsilon}_{i-1}^p$  é a deformação plástica acumulada até a (i-1)-ésima iteração.

(d) Se no entanto,  $f(\underline{\sigma}_{\sim i}^e) \geq \sigma_y(k)$  e  $f(\underline{\sigma}_{\sim i-1}) = \sigma_y(k)$ , então o ponto sob consideração já havia escoado na iteração anterior e as tensões ainda estão sendo aumentadas. Portanto, todo o excesso de tensões deve ser reduzido, de forma que o ponto permaneça na superfície de



escoamento. Neste caso, o incremento de tensões deve ser calculado por intermédio da equação (60), isto é:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}} = \Delta \underline{\underline{\sigma}}^e - d\lambda d \quad (70)$$

e o estado de tensões nesta iteração, que satisfaz o critério de escoamento, será:

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \underline{\underline{\sigma}}_{i-1} + \Delta \underline{\underline{\sigma}}^e - d\lambda d \quad (71)$$

O último termo da equação (71), corresponde à componente plástica do incremento de tensões na iteração em curso, ou seja:

$$\Delta \underline{\underline{\sigma}}_i^p = d\lambda d \quad (72)$$

Este incremento de tensão plástica é acumulado com  $\underline{\underline{\sigma}}^p$  e é aplicado na próxima iteração como incremento de carga.

O cálculo do incremento da deformação plástica efetiva é feito a partir do conceito do trabalho plástico, dado na equação (33), ou seja:

$$d w_p = \underline{\underline{\sigma}}_i d \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p = d\lambda \underline{\underline{a}}_i^T \underline{\underline{\sigma}}_i \quad (73)$$

ou, reescrevendo-se em termos de tensão efetiva e deformação efetiva, tem-se:

$$\bar{\sigma} d \bar{\varepsilon}_i^p = d\lambda \underline{\underline{a}}_i^T \underline{\underline{\sigma}}_i \quad (74)$$

Portanto, a deformação plástica efetiva ou equivalente, será:

$$\bar{\varepsilon}_i^p = \bar{\varepsilon}_i^p + d\lambda \frac{\underline{\underline{a}}_i^T \underline{\underline{\sigma}}_i}{\bar{\sigma}_i} \quad (75)$$

onde, a tensão efetiva ou equivalente,  $\bar{\sigma}_i$ , é igual ao valor de  $f(\underline{\underline{\sigma}}_i)$ .

**(e)** Se  $f(\underline{\underline{\sigma}}_i^e) \geq \sigma_y(k)$  e  $f(\underline{\underline{\sigma}}_{i-1}) < \sigma_y(k)$ , significa que o ponto estava em regime elástico no início e houve escoamento durante a iteração corrente. Determinam-se, então os valores de tensão que satisfazem o critério de escoamento. A parcela acima destes valores deve ser reduzida à superfície de escoamento, de modo análogo ao apresentado no item anterior.

**(f)** Verifica-se a convergência. Caso não tenha ocorrido retorna-se ao passo **(a)** para uma nova iteração. Quando ocorre a convergência, um novo incremento de carga é aplicado, repetindo-se todos os passos descritos, até que o carregamento total seja aplicado. Considera-se, neste trabalho, que a convergência é verificada quando o excesso de tensões efetivas fica abaixo de uma certa percentagem da tensão de plastificação da iteração atual.

## 10 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Apresentam-se, a seguir, alguns exemplos simples para análise do comportamento não-linear do solo, na interface com a estaca. O modelo desenvolvido é comparado, com ensaios realizados, ou com valores obtidos a partir de outros métodos.

### 10.1 Exemplo 1 – Ensaio de Whitaker e Cooke

Este ensaio está apresentado em POULOS & DAVIS<sup>5</sup>. Uma estaca vertical em concreto, com comprimento de 12,2 m e diâmetro igual a 0,61 m, é submetida a uma carga vertical. O solo é caracterizado com argiloso, com módulo de deformação de  $8.10^4$  kN/m<sup>2</sup> e coeficiente de Poisson igual a 0,5 e uma resistência ao atrito lateral igual a 37,9 kN/m<sup>2</sup>. O concreto da estaca apresenta módulo de deformação igual a  $2,067.10^7$  kN/m<sup>2</sup>.

A estaca foi discretizada em sete pontos nodais e o problema foi processado com 22 incrementos de carga. Considerou-se o solo com comportamento elastoplástico perfeito. A carga para a qual ocorre o escoamento do solo nos sete pontos nodais é de 886 kN. Para qualquer incremento de carga aplicado à estaca após alcançado este valor, não se obtém mais a convergência, como era de se esperar. Para a carga de 886 kN, o valor do deslocamento vertical medido no ensaio foi de 4,45 mm, enquanto este valor calculado a partir do modelo proposto alcançou 5,37 mm.

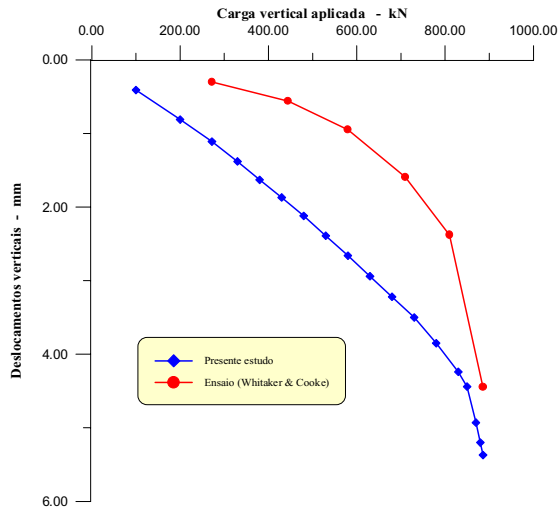


Figura 3: Curva carga-deslocamento no topo da estaca.

Os resultados do ensaio e da presente análise estão apresentados na Figura 3. Este exemplo tem a finalidade básica de aferir o modelo e verificar o comportamento das curvas carga-recalque. Assim, tendo em vista o fato ser um material com características e propriedades que não permitem classificá-lo como homogêneo e isótropo, hipóteses

assumidas ao desenvolver o modelo, entende-se que os resultados obtidos são bastante satisfatório.

### 10.2 Exemplo 2 – Estaca vertical com carga vertical

Neste exemplo, uma estaca de concreto protendido, pré-moldada, com comprimento de 8,5 m e seção transversal quadrada de lado 0,4 m é considerada. Segundo CHEUNG et al.<sup>6</sup>, para efeito de modelagem, admitiu-se um diâmetro de 0,451 m, dando a mesma área de seção transversal. A estaca foi cravada em um solo siltoso com módulo de deformação igual a 5500 kN/m<sup>2</sup>, coeficiente de Poisson de 0,35 e resistência de atrito lateral de 44,84 kN/m<sup>2</sup>. O solo foi admitido tendo comportamento elastoplástico perfeito. A estaca é vertical, sob carga vertical, aplicada em seu topo, tendo módulo de deformação igual a  $2,068 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>. Neste exemplo também a estaca foi discretizada em 7 nós, e foram aplicados 23 incrementos de carga, sendo que no último não se obteve a convergência. Na Figura 4, indica-se, em curva carga-deslocamento, os resultados da prova de carga, a solução obtida com a utilização do modelo de Duncan-Chang, usado para análise não-linear pelo método dos elementos finitos e os resultados obtidos pelo modelo proposto.

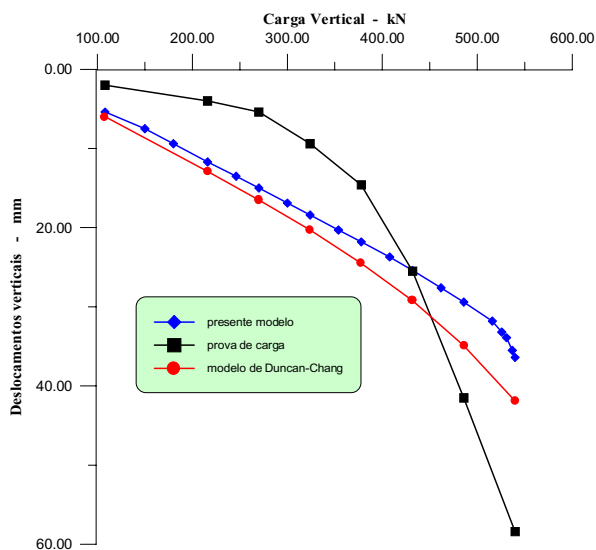


Figura 4: Curva carga-deslocamento no topo da estaca.

Para a carga de 540 kN, correspondente a carga de ruptura, o deslocamento determinado em ensaio é de 58,4 mm, enquanto o calculado pelo modelo de Duncan-Chang e pelo modelo proposto são 41,9 mm e 36,4 mm, respectivamente. Pode-se constatar uma boa concordância entre os dois modelos, mas que, no entanto, diferem bastante dos resultados obtidos em

ensaio. A Figura 4 mostra que os deslocamentos calculados para pequenas cargas aplicadas são maiores do que aqueles medidos em ensaios. Isto demonstra que o solo sofreu um pré-adensamento quando da instalação da estaca. O efeito de pré-adensamento pode vir a ser considerado no modelo, tornando o modelo mais realista.

## 9 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresenta-se uma combinação entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) para analisar o comportamento não-linear do solo na interface com estacas em fundações profundas. O solo é modelado pelo Método dos Elementos de Contorno empregando a solução fundamental de Mindlin, cuja grande vantagem é discretizar apenas as regiões carregadas, tendo em vista que a superfície do meio está livre de forças. As estacas, dispostas no meio contínuo, são discretizadas como elementos reticulares pelo Método dos Elementos Finitos. As equações oriundas de ambos os métodos são convenientemente combinadas resultando em uma matriz que representa a rigidez do conjunto solo-fundação.

A este modelo foi implementada uma formulação para a análise do comportamento não-linear do solo na interface com as estacas. Utiliza-se, para tanto, um modelo elastoplástico, de natureza incremental, baseado no processo das tensões iniciais, para a modelagem do comportamento das forças de interação entre a superfície da estaca e do solo. Esta extensão ao modelo permite análises mais abrangentes, apresentando resultados, bastante satisfatórios, quando comparados a outras formulações existentes.

## 10 REFERÊNCIAS

- [1] FERRO, N.C.P., CHUEIRI, L.H.M. Um modelo para análise de interação solo-fundação-superestrutura. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 29., 2000, Punta Del Leste. *Anais...* Punta Del Leste, 2000, 20p., CD-ROM.
- [2] NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. Convenient form of stress invariants for plasticity. **Journal of Structure Div., Proc. ASCE**, p.949-954, 1972.
- [3] ZIENKIEWICZ, O.C; VALLIAPPAN, S.; KING, I.P. Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach. **Int. Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.1, p.75-100, 1969.
- [4] POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. Pile foundation analysis and design. New York: John Wiley & Sons, 1980.
- [5] CHEUNG, Y.K.; LEE, P.K.K.; ZHAO, W.B. Elastoplastic analysis of soil-pile interaction. **Computers and Geotechnics**, v.12, p.115-132, 1991.