

## SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES MAGNETOGASDINÁMICAS BIDIMENSIONALES MEDIANTE UN ESQUEMA TVD

<sup>§</sup>Livio S. Maglione, <sup>\*†</sup>Sergio A. Elaskar y <sup>†</sup>Héctor H. Brito

<sup>§</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto.  
smaglione@ing.unrc.edu.ar

<sup>\*</sup>Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba  
Av. Velez Sarfield 1601, Córdoba (5000), Argentina  
selaskar@efn.uncor.edu

<sup>†</sup>Centro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico  
Ruta 20, km. 5.5, Córdoba (5022), Argentina  
hbrito@make.com.ar

**Key words:** Magnetogasdynamics, Riemann solver, TVD.

**Resumen.** *El principal objetivo de este trabajo es presentar los resultados obtenidos mediante un código computacional que resuelve las ecuaciones de la magnetogasdínámica ideal, inestacionaria y bidimensional (MGD). Las ecuaciones que gobiernan los flujos magnetogasdínámicos son la de continuidad, cantidad de movimiento, energía, inducción magnética y una ecuación de estado. En este trabajo dichas ecuaciones son escritas en forma conservativa. El método numérico empleado consiste en un seguidor de Riemann aproximado junto al esquema TVD propuesto por Yee. Además se ha implementado la técnica de ocho ondas dada por Powell y la normalización de los vectores propios. Finalmente para verificar el adecuado comportamiento del código se simula el problema de Riemann introducido por Brio y Wu pero con la malla rotada con respecto a la dirección principal del flujo. Los resultados obtenidos satisfacen los hallados en la simulación unidimensional.*

**Abstract.** *The main objective of this work is to present the results obtained with a computational code, which solves the ideal magnetogasdynamics equations (MGD). The equations that govern MGD flows are continuity, momentum, energy and magnetic induction together with a state equation. The numerical approach consists of an approximate Riemann solver together with the TVD scheme proposed by Yee. The “eigensystem” technique presented by Powell has also been used and the eigenvectors normalization has been carried out. To check the accuracy of the computational code a Riemann problem introduced by Brio and Wu has been simulated. The obtained results are in close agreement with those reported by other authors.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El principal objetivo de este trabajo es presentar los resultados obtenidos mediante un código computacional desarrollado para resolver las ecuaciones inestacionarias en dos dimensiones espaciales de la magnetogasdinámica ideal (MGD). Esta investigación se realiza con la intención de avanzar hacia una mayor comprensión del comportamiento del flujo de plasma dentro de la cámara de reacción de un propulsor de plasma pulsante ablativo de Teflón (APPT).

Existen trabajos en la literatura en los cuales se utilizan o desarrollan códigos numéricos para simular el flujo dentro de propulsores de plasma. Por ejemplo, códigos bidimensionales han sido desarrollados por Toki *et al.*<sup>1</sup>, y Ao y Fujiwara<sup>2</sup>. Los efectos de la geometría en las performances del motor han sido estudiados por LaPointe<sup>3</sup>, y Mikellides y Turchi<sup>4</sup> usando los códigos MACH2 y MACH3 que simulan el flujo inestacionario de plasma en dos y tres dimensiones espaciales respectivamente. Sin embargo ninguna de dichas investigaciones implementa técnicas de alta resolución utilizadas con éxito en dinámica de gases y que permiten la captura de discontinuidades. La presente investigación explora la capacidad de estas técnicas para simular el flujo del plasma.

Es importante destacar que Sankaran y Choueiri de la Universidad de Princeton<sup>5,6</sup> están trabajando con técnicas similares a las utilizadas en la presente investigación, sin embargo las técnicas numéricas presentan diferencias debido a la utilización del esquema LED desarrollado por Jameson<sup>7</sup> en lugar de esquemas TVD de alta resolución.

La propulsión eléctrica en vehículos espaciales es en nuestros días una alternativa competitiva frente a la propulsión convencional o química. La propulsión eléctrica está siendo utilizada en la actualidad para impulsar satélites, sin embargo existen planificaciones y desarrollos para enviar naves propulsadas eléctricamente a la Luna y a Marte<sup>8</sup>. La principal ventaja de la propulsión eléctrica es que reduce considerablemente el peso de lanzamiento y con ello el costo del mismo (disminuye en peso hasta un 70%). Sin embargo posee limitaciones, entre las que se destacan la necesidad de contar con una fuente externa de potencia eléctrica, siendo este tipo de propulsión por lo general de bajo rendimiento y empuje. Según la física subyacente en los fenómenos que producen el empuje, los propulsores eléctricos pueden ser agrupados en tres categorías: electrotérmica, electrostática y electromagnética. Dentro de la tercera categoría se encuentran los módulos propulsivos de plasma pulsante ablativos de Teflón (PPPA) como el que se está desarrollando por gente del Instituto Universitario Aeronáutico, de la Universidad Nacional de Córdoba y de la Universidad Nacional de Río Cuarto<sup>9</sup>.

Las ecuaciones que gobiernan los flujos magnetogasdinámicos son continuidad, cantidad de movimiento, energía e inducción magnética junto con una ecuación de estado. En este trabajo dichas ecuaciones son escritas en forma conservativa, debido a que desde la perspectiva de la solución numérica esta formulación es necesaria para captar discontinuidades con altos niveles de exactitud. El sistema de ecuaciones resultante es hiperbólico-parabólico<sup>5</sup>. Los términos hiperbólicos representan los efectos convectivos y los parabólicos los difusivos. Si se desprecian las contribuciones difusivas o parabólicas el sistema de ecuaciones solamente corresponde al flujo magnetogasdinámico ideal.

La técnica numérica implementada consiste de un seguidor de Riemann aproximado que permite evaluar las variables dentro de cada célula por medio de la variación de los flujos a través del contorno de dicha célula. Por lo tanto, resulta relevante el adecuado cálculo de dichos flujos. Debido a las buenas performances mostradas por el esquema TVD propuesto por Yee, *et. al*<sup>10</sup> en la simulación del flujo supersónico de gases<sup>11</sup>, se implementó dicho esquema para evaluar numéricamente los flujos magnetogasdinámicos. Para que el sistema de ecuaciones tuviera ocho valores propios reales se utilizó la técnica de ocho ondas introducida por Powell<sup>12</sup> y con el fin de evitar inconvenientes en la implementación numérica se ha llevado a cabo la normalización de los vectores propios según los trabajos de Zarachay *et al.*<sup>13</sup>, Roe y Balsara<sup>14</sup>, y Bodgan<sup>15</sup>. Se destaca que esta metodología de cálculo ha sido usada con éxito para resolver las ecuaciones inestacionarias en una dimensión espacial en flujos magnetogasdinámicos ideales y reales<sup>16</sup>.

Para verificar el buen comportamiento del código del computacional se ha utilizado como “benchmark” un problema de Riemann introducido por Brio y Wu<sup>17</sup>. Se destaca que este es un problema unidimensional y para considerarlo bidimensional la malla está rotada un ángulo de 18,4° con respecto a la dirección principal del flujo.

## 2. ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINAMICA IDEAL

Las ecuaciones adimensionales de la magnetogasdinámica ideal, para flujos bidimensionales e inestacionarios, en forma conservativa se expresan como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \text{div} \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} - \tilde{I} \left( p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial y} = \underline{0}$$

donde  $\underline{U}$  es el vector de variables de estado

$$\underline{U} = \left( \rho, \rho u_x, \rho u_y, \rho u_z, B_x, B_y, B_z, e \right)^T \quad (2)$$

$\underline{F}$  y  $\underline{G}$  son los vectores que especifican los flujos hiperbólicos:

$$F = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 - B_x^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_x u_z - B_x B_z \\ 0 \\ u_x B_y - u_y B_x \\ u_x B_z - u_z B_x \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_x - (\underline{B} \underline{u}) B_x \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y - B_x B_y \\ \rho u_y^2 - B_y^2 + p + \frac{1}{2} B^2 \\ \rho u_z u_y - B_z B_y \\ u_y B_x - B_y u_x \\ 0 \\ u_y B_z - B_y u_z \\ \left( e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) u_y - (\underline{B} \underline{u}) B_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\rho$  indica la densidad;  $u_x$   $u_y$   $u_z$  son las componentes del vector velocidad;  $B_x$   $B_y$   $B_z$  representan los componentes del vector el campo magnético;  $p$  es la presión; y se define :

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \quad (4)$$

La energía total en forma adimensional se expresa en función del campo de velocidades, el campo magnético y la presión:

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \left( u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right) + \frac{1}{2} \left( B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \right) \quad (5)$$

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos.

El sistema de ecuaciones (1) puede escribirse en forma cuasi-lineal:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial U}{\partial x} + [B_c] \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$[A_c] = \frac{\partial F}{\partial U} \quad [B_c] = \frac{\partial G}{\partial U} \quad (7)$$

donde  $[A_c]$  ,  $[B_c]$  son las matrices Jacobianas de los flujos, la letra “c” indica que la derivación se ha llevado a cabo con respecto a las variables de estado conservativas. Sin embargo, la forma de estas son más simples si se escriben en función de las variables primitivas:

$$\underline{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T \quad (8)$$

Por consiguiente, la Eq. (7) queda expresada en términos de las variables primitivas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

La regla de transformación es:

$$[A_p] = \left( \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} \right) [A_c] \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \right) \quad [B_p] = \left( \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{U}} \right) [B_c] \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{W}} \right) \quad (10)$$

Debido a que las matrices  $[A_p]$   $[B_p]$  poseen un valor propio nulo, no es posible utilizar seguidores de Riemann basados en un sistema de ocho ondas. Es importante destacar que ambas formulaciones, tanto en variables primitivas como en variables conservativas son equivalentes, por consiguiente el valor propio nulo aparece en ambas formulaciones. Para poder subsanar este inconveniente se ha implementado la técnica de ocho ondas presentada en 1995 por Powell<sup>12</sup>. Claramente para flujos unidimensionales quedan bien definidos los siete valores propios y no es necesario utilizar esta técnica que introduce una nueva matriz Jacobiana. Los valores propios de la nueva matriz  $[A]$  son:

$$\lambda_e = u_x; \quad \lambda_a = u_x \pm c_a; \quad \lambda_f = u_x \pm c_f; \quad \lambda_s = u_x \pm c_s; \quad \lambda_d = u_x \quad (11)$$

Las velocidades de Alfvén y las magnetosónicas lentas y rápidas se expresan respectivamente como:

$$c_a = \frac{|B_n|}{\sqrt{\rho}} \quad c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_n^2}{\rho^2}} \right] \quad (12)$$

donde el signo positivo corresponde a las ondas magnetosónicas rápidas.

Finalmente, los vectores propios asociados se han normalizado para evitar problemas de degeneración del sistema., utilizando la propuesta de Zachary<sup>13</sup>.

### 3. MÉTODO NUMÉRICO

Las ecuaciones descriptas más arriba son resueltas usando un seguidor de Riemann aproximado junto con un esquema explícito de avance en el tiempo. Los flujos numéricos son evaluados por medio de la técnica TVD de Harten - Yee<sup>14</sup>, obteniendo una aproximación de

segundo orden. Este esquema es considerado para calcular los flujos numéricos en todas las células.

El método de TVD para el sistema dado en la Eq. (1), puede expresarse de la manera siguiente:

$$\underline{U}_{ij}^{n+1} = \underline{U}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \quad (15)$$

La función que determina los flujos numéricos se define como:

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} = \frac{1}{2} \left( F_{i+1}^n + F_i^n + \left( \sum_m R_{i+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right)^{(n)} \right) \quad (16)$$

siendo  $R$  los vectores propios derechos de la matriz  $[A_c]$ ,  $\Phi$  la función disipación cuyos elementos para el esquema TVD de segundo orden se expresan como:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = \left( g_{i+1}^m + g_i^m \right) - \sigma \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (17)$$

En función de los buenos resultados hallados para el caso unidimensional, se utilizó la siguiente función limitadora :

$$g_i^m = \text{sgn} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \max \left\{ 0, \min \left[ \sigma_{i+\frac{1}{2}}^m \left| \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right|, \sigma_{i-\frac{1}{2}}^m \frac{\text{sgn} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right)}{2} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right] \right\} \quad (18)$$

La función  $\sigma$  se define como:

$$\sigma(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} (z^2 + \varepsilon^2) & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (19)$$

y  $\gamma$  queda determinada por:

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} (g_{i+1}^m - g_i^m) & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Debido a que el proceso de cálculo gana en simplicidad, las variables primitivas han sido utilizadas para obtener:

$$\alpha^m = \underline{L}_p^m \cdot (W_{i+1} - W_i) \quad (21)$$

siendo  $\underline{L}_p^m$  el vector propio izquierdo de la matriz  $[A_p]$  asociado a la onda  $m$ .

#### 4. RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para el problema de Riemann propuesto por Brio y Wu<sup>17</sup>. Éste es un importante caso testigo, ampliamente usado por la comunidad científica, con el objetivo de evaluar el comportamiento de técnicas numéricas y códigos computacionales dentro de la magnetogasdínámica. Brio y Wu estudiaron la extensión a la MGD del problema de Riemann clásico considerado en dinámica de los gases (tubo de choque).

En el caso de la magnetogasdínámica este benchmark se denomina problema de Riemann coplanar debido a que únicamente existen dos componentes de los vectores velocidad y campo magnético.

Todas las variables están escritas en forma adimensional. Inicialmente existe una discontinuidad que separa dos estados constantes, uno izquierdo y otro derecho. Dichos estados quedan determinados por:

$$\begin{aligned} W_i &= (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, 1.0, 0.0, 0.1, 0)^T \\ W_d &= (0.125, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, -1.0, 0.0, 0.1)^T \end{aligned} \quad (22)$$

Los investigadores que deseen reproducir los resultados presentados en este trabajo deben tener en consideración que la condición inicial dada por la Ec. (22) debe ser rotada adecuadamente de acuerdo a la situación a considerar.

Para verificar el correcto funcionamiento del código computacional desarrollado la malla es girada un ángulo de  $18,4^\circ$  con respecto al eje longitudinal del flujo, ubicándose la discontinuidad inicial perpendicular a dicho eje. Debido a que la malla utilizada es regular la

dirección del flujo no coincide con ninguna de las direcciones normales de las celdas, obligando al código a resolver un problema de características netamente bidimensionales. En la discretización se utilizaron 1000 nodos en la dirección horizontal y 350 nodos en la dirección vertical con :

$$\Delta x = \Delta y = 0.001 \quad (23)$$

En lo referente a los incrementos temporales fueron necesarios utilizar 1500 pasos de tiempo con el número CFL igual a 0.4, lográndose así tener una visión adecuada del efecto producido en las variables primitivas por las ondas intervinientes. Bajo estas consideraciones es importante destacar que la simulación insume un tiempo de procesamiento del orden de 96 [horas] en un Pentium IV de 1.5 [Ghz] con 256 [Mb] de memoria RAM.

Algunos de los resultados obtenidos se observan en las Figuras 1, 2 y 3, estos se encuentran comparados con los obtenidos mediante simulaciones del problema unidimensional a través de un software de eficiencia y robustez ya comprobadas<sup>16</sup>.

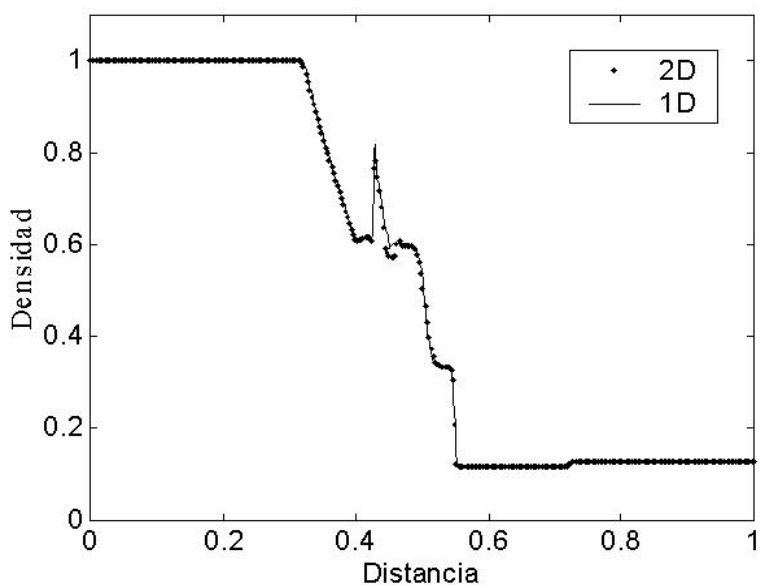


Figura 1: Variación de la densidad en función de la distancia longitudinal.

En la Figura 1 está graficada la distribución de densidad en función de la distancia longitudinal en el eje principal del flujo. La Figura 2 indica la distribución de campo



magnético transversal, y la Figura 3 la velocidad longitudinal. Se destaca de las tres graficas que hay buena concordancia con los resultados obtenidos sin rotar la malla.

En la Figura 1 se distinguen de izquierda a derecha, primero la onda de expansión que viaja hacia la izquierda, una onda compuesta, una discontinuidad de contacto, una onda de choque lenta y una onda de expansión que viaja hacia la derecha. Es evidente entonces que el método utilizado logra captar satisfactoriamente todas las discontinuidades y también es importante destacar que los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo satisfacen correctamente aquellos publicado por Brio y Wu<sup>17</sup> y Bodgan<sup>15</sup>.

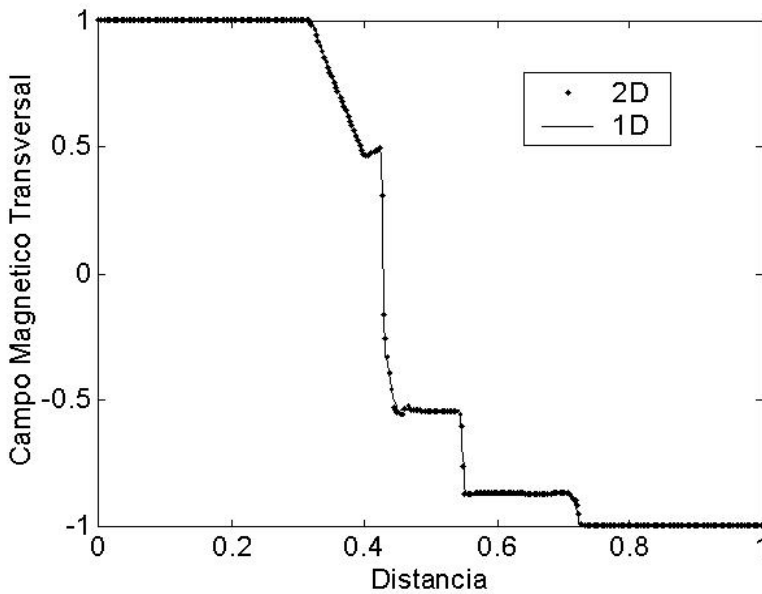


Figura 2: Variación de la componente del campo magnético transversal a la dirección del flujo principal en función de la distancia longitudinal.

## 5. CONCLUSIONES

Si bien los resultados obtenidos han sido satisfactorios y concordantes a los alcanzados por otros miembros de la comunidad científica, presentan en ciertas regiones pequeñas perturbaciones debidas principalmente al amortiguamiento numérico que introduce el método a través de la función de disipación, y ligado principalmente a la incapacidad de utilizar en la discretización de la geometría una mayor cantidad de nodos, problema que se encuentra asociado con el tiempo de cálculo. A pesar de esto el nuevo código bidimensional ha sido

validado con un benchmark muy exigente demostrando ser robusto, exacto y capaz de resolver flujos magnetogasdinámicos de interés en la propulsión por plasma, por lo que se pretende en un futuro cercano utilizarlo en geometrías más complejas.

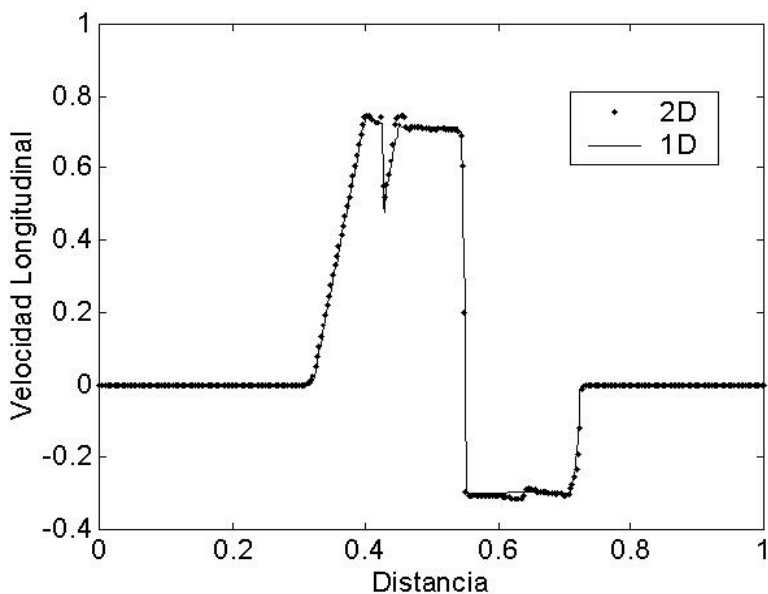


Figura 3: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo principal en función de la distancia longitudinal.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por medio de los proyectos PICT-99-10-07107 de la Agencia Nacional de Ciencia y Tecnología y por el proyecto “Estudio teórico-experimental de propulsores de plasma pulsantes” financiado por la Agencia Córdoba Ciencia.

A los miembros del Grupo de Mecánica computacional de la UNRC por los comentarios realizados, y al becario Tristan Gagliesi.

## 7. REFERENCIAS

1. Toki, K.; Kimura, I. and Tanaka, M., Current distribution on the electrodes of MPD arcjets, *AIAA Journal*, Vol 20 No 7, 1982, pp 889-897.

2. **Ao, T. and Fujiwara, T.**, *Numerical and experimental study of an MPD thruster*, IEPC-84-08, 1984.
3. **LaPointe, M.**, *Numerical simulation of geometric scale effects in cylindrical self-field MPD thrusters*, NASA-CR-189224, 1992.
4. **Mikellides, I. and Turchi, P.**, *Optimization of pulse plasma thrusters in rectangular and coaxial geometries*, IEPC-99-211, 1999.
5. **Sankaran, K.; Choueiri, E. and Jardin, S.**, *Application of the new numerical solver to the simulation of the MPD flows*, AIAA-2000-3537, 2000.
6. **Sankaran, K. and Choueiri, E.**, *An accurate characteristics-splitting scheme for numerical solution of MHD equations*, IEPC-99-208, 1999.
7. **Jameson, A.**, *Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 1: Artificial diffusion, upwing biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence*, Comp.Fluid Dyn. 1995.
8. **Currant, F.**, *Electric propulsion activities in U.S. industry*, IEPC Paper: IEPC-99-01, 1999.
9. **Brito, H.; Calcani, E.; Elaskar, S.; Brito, C.; Duelli, R.; Maglione, S. and Cravero, L.**, *A review of design and development works on the P4S-1 plasma thruster*. International Astronautical Federation Paper: IAF-01-S.4.03, 2001.
10. **Yee, H.; Warming, R. and Harten, A.**, *Implicit total variations diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations*, *Journal Computational Physics*, Vol. 57, 1985, pp. 327-360.
11. **Elaskar, S., Brito H. and Tamagno, J.**, *Numerical simulation of high enthalpy pulse facilities as an exploratory tool for PPT's modeling*. International Astronautical Federation Paper: IAF-00-S.4.10, 2000.
12. **Powell, K.**, *An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)*, NASA Contract No NAS1-19480, ICASE, NASA Langley Research Center, Hampton, 1995.
13. **Zarachay, A.; Malagoli, A. and Collela, P.**, *A higher order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics*, *SIAM Journal on Scientific Computation*, Vol. 15, 1994, pp. 263-284.

**14. Roe, P. and Balsara, D.**, Notes on the eigensystem of magnetohydrodynamics, *SIAM Journal Applied Mathematics*, Vol. 56, 1996, pp. 57-67.

**15. Bogdan, U.**, *An advanced implicit solver for MHD*, PhD Thesis, University of Washington, 1999.

**16. Elaskar, S. and Brito, H.**, *Solution of the magnetogasdynamics equations using a TVD scheme as a tool for electric propulsion*. IEPC paper: IEPC-01-141, 2001.

**17. Brio, M. and Wu, C.**, An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics, *Journal Computational Physics*, Vol. 45, , 1988, pp. 400-422.