

ANALISIS DE LOCALIZACION EN SOLIDOS ELASTOPLASTICOS MEDIANTE EL METODO GEOMETRICO

Ricardo H. Lorefice^{*}, Guillermo J. Etse[†], Juan M. Parnas[†] y Cesar G. Coronel^{*}

^{*} Depto. de Estructuras, Univ. Nacional de Santiago del Estero
Avda. Belgrano (s) 1912, (4200), Santiago del Estero, Argentina.
TE: 54-(0385)-4372354–Int. 1905 [e-mail: lorefice@unse.edu.ar](mailto:lorefice@unse.edu.ar)

[†] CEMNCI - Univ. Nacional de Tucumán - CONICET
Avda. Roca 1800, (4000), San Miguel de Tucumán, Argentina.
[e-mail: getse@herrera.unt.edu.ar](mailto:getse@herrera.unt.edu.ar)

Key words: Plasticity– Bifurcation analysis – Constitutive Equations

Resumen. *En los últimos años se han dedicado enormes esfuerzos para determinar y entender las propiedades de localización de falla en la mecánica de sólidos no lineal. Se han considerado diferentes formulaciones constitutivas tales como las basadas en la Teoría del Flujo de la Plasticidad y en la Mecánica del Daño. Distintos autores han presentado soluciones para el problema de bifurcación discontinua bajo diferentes estados de carga mediante desarrollos analíticos o numéricos. Las soluciones analíticas involucran complejos análisis de autovalores e implican un doble proceso de minimización que, en general conduce a soluciones válidas solo para una formulación constitutiva en particular. Por otro lado, las soluciones numéricas adolecen de varias desventajas, como ser la dependencia de la solución con el tipo de elemento finito empleado y con la alineación de la malla. Asimismo, el esquema de cálculo mediante el MEF implica el análisis en cada punto de Gauss de la condición de localización con el consiguiente empleo de un gran esfuerzo computacional. En este trabajo se presenta un criterio analítico-geométrico para resolver el problema de localización de falla en sólidos isótropos que combina el concepto de envolvente de falla desarrollado por Otto Mohr con una interpretación geométrica del proceso de minimización lo cual conduce a una solución directa del problema de bifurcación discontinua para una amplia gama de modelos constitutivos basados en superficies de fluencia cuadráticas.*

1 INTRODUCCION

Es sabido que un aspecto de fundamental importancia en el campo del análisis no lineal de sólidos y estructuras es la adecuada modelación del comportamiento material. En este sentido, la simulación numérica del comportamiento de falla de materiales ingenieriles, sobre todo en el rango no lineal se ha basado tradicionalmente en el empleo de formulaciones constitutivas como la Teoría del Flujo de la Plasticidad y la Mecánica del Daño Continuo, en las que tienen un soporte fundamental. Dependiendo de la complejidad de cada formulación material en particular, existen en general dos situaciones en las que podemos encuadrar el problema de la determinación de las propiedades de localización, a saber: modelos simples, para los cuales es relativamente simple el determinar los ángulos y módulos críticos en el inicio del proceso de bifurcación discontinua y por otro lado, los modelos complejos, basados por ejemplo en la teoría de la plasticidad combinada con la mecánica del daño y, muy frecuentemente cuando se trata de modelar el comportamiento de materiales tales como rocas, cerámicos u hormigón, incluyendo además conceptos de la teoría de la mecánica de fractura. Para estos modelos complejos, generalmente el único camino posible para obtener sus propiedades de localización es el del análisis numérico mediante el MEF. Sin embargo, existe una amplia gama de modelos constitutivos que no se encuentran entre los grupos anteriores, es decir, modelos de mediana complejidad, y que con una adecuada elección de sus parámetros materiales son útiles para representar correctamente el comportamiento no lineal de sólidos y estructuras. Entre estos modelos, se destaca principalmente el modelo de Drucker-Prager, basado originalmente en el conocido criterio de Mohr-Coulomb para caracterizar la falla de materiales cohesivo-friccionales.

Los primeros análisis teóricos empleando el concepto de tensor acústico o tensor de localización se deben a Hill¹, Rudnicki y Rice², Willam³, Borre y Maier⁴, Ottosen y Runesson^{5,6}, Bigoni y Hueckel⁷. Un común denominador de estos primeros trabajos es que los planteos fueron realizados en general para formulaciones constitutivas específicas, empleando los métodos clásicos del análisis matemático teórico y considerando sólo el caso del continuo de Boltzmann, es decir, tensores de tensión/deformación simétricos. Estas soluciones, si bien han sido obtenidas empleando criterios absolutamente válidos del análisis matemático, tales como la aplicación del método de los multiplicadores Lagrangianos combinado con procesos de doble minimización con el fin de hallar los valores del ángulo crítico de localización y el módulo de endurecimiento/ablandamiento, adolecen de la desventaja de que a medida que el modelo constitutivo es más complejo, es más difícil interpretar claramente el sentido físico e ingenieril de los resultados obtenidos, sin olvidar el hecho de que no siempre es posible el encontrar una solución cerrada para todos los casos que puedan presentarse.

Desde un punto de vista geométrico, es posible realizar una interpretación de la condición analítico de localización en el espacio de Mohr imponiendo la condición de tangencia entre el círculo principal de Mohr y la envolvente de localización. Este criterio fue presentado originalmente por Benallal⁸ para estudiar la influencia de procesos térmicos sobre las propiedades de localización. Posteriormente, fue desarrollado por Benallal y Comi⁹ para explorar el rol de la no asociatividad desviadora. Carol¹⁰, aplicó el criterio geométrico para el

análisis de localización en materiales que exhiben degradación elástica usando formulaciones constitutivas basadas en deformaciones. Iordache y Willam¹¹ extendieron los resultados analíticos de Ottosen y Runesson^{5,6} a continuos micropolares de Cosserat empleando el modelo lineal de Drucker-Prager. Rizzi¹², mostró que para modelos basados en la mecánica del daño continuo caracterizados por superficies de fluencia cuadráticas es posible obtener una clara interpretación geométrica de la condición analítica de localización mediante la tangencia entre el círculo principal de Mohr y la envolvente de localización, que en este caso es de forma elíptica. En la sección siguiente, se revisan los conceptos básicos del análisis de localización mediante el concepto de tensor acústico. Se presentan brevemente los fundamentos del método geométrico poniendo especial énfasis en la fuerte influencia que sobre la evaluación del ángulo crítico y el módulo crítico de endurecimiento/ablandamiento tiene el método de calibración de los parámetros materiales del modelo empleado. Esto se ilustra con diferentes ejemplos mediante extensiones no lineales de la formulación original presentada por Drucker y Prager¹³.

2 BIFURCACION DISCONTINUA

La deducción de la condición teórica de localización se basa en los trabajos de Hadamard¹⁴ y Hill¹. Dado un medio continuo ideal, la falla localizada se define como la aparición de discontinuidades espaciales en el mismo. Según la severidad de estas discontinuidades, podemos distinguir dos situaciones:

- *Falla localizada débil:*

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = 0 \quad [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \neq 0 \quad (1)$$

donde $[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-$ y $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^-$. La ecuación (1) indica que solo ocurren saltos en la tasa de deformación y no en la de desplazamientos.

- *Falla localizada fuerte:*

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0} \quad [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \neq \mathbf{0} \quad (2)$$

Aquí se admite la existencia de saltos en ambos campos. El punto de partida para la derivación de la condición de localización, $\det(\mathbf{Q}^{ep}) = 0$ es la aceptación de la existencia de una discontinuidad débil. Aplicando el teorema de Maxwell, la condición de existencia de una discontinuidad en el gradiente de desplazamientos conduce a

$$[[\nabla \dot{\mathbf{u}}]] = \gamma \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \quad (3)$$

donde, en el contexto del análisis clásico de localización, γ es la magnitud del salto, \mathbf{N} es el vector normal a la superficie de discontinuidad, y \mathbf{M} es un vector unitario que define la dirección del salto (ver Figura 1). Según la orientación de \mathbf{M} , es posible distinguir entre diferentes modos de falla. El denominado Modo I se obtiene cuando \mathbf{M} y \mathbf{N} son paralelos,

mientras que el Modo II de falla ocurre cuando \mathbf{M} es normal a \mathbf{N} . Entre estos dos extremos,

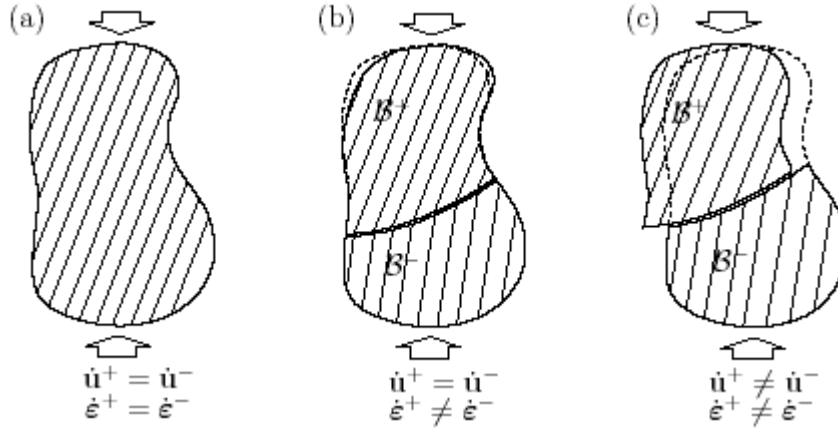


Figura 1: a) Medio continuo ideal b) Discontinuidad débil c) Discontinuidad fuerte

Se encuentra el llamado Modo Mixto de falla. Mediante el uso del tensor de deformación linealizado, el salto en la tasa de deformaciones puede expresarse como

$$[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = [[\nabla^{sym} \dot{\mathbf{u}}]] = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{M}) \quad (4)$$

En el inicio de la localización, en general se aceptan dos importantes hipótesis simplificativas, a saber: a) que a ambos lados de la superficie de singularidad se está en situación de carga plástica, y b) que el modulo elastoplástico tangente que caracteriza al material es el mismo a ambos lados de dicha superficie. Teniendo en cuenta la simetría menor del operador tangente, y aceptando las hipótesis anteriores, la tasa del tensor de tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ puede combinarse con la expresión del salto en el campo de deformaciones dado por la (4) para hallar la expresión del salto en la tasa del tensor de tensiones

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{E}^{ep} : \boldsymbol{\epsilon} = \dot{\gamma} \mathbf{E}^{ep} : (\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}) \quad (5)$$

De acuerdo con el lema de Cauchy, la tasa del vector tracción $\dot{\mathbf{t}}$ debe ser continua entre ambos lados de la superficie de discontinuidad en el interior del sólido considerado. Combinando esta condición con la (5) se obtiene

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = \mathbf{N} : [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{Q}^{ep} \cdot (\dot{\gamma} \mathbf{M}) = \mathbf{0} \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}^{ep} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}^{ep} \cdot \mathbf{N} \quad (6)$$

Finalmente, la condición de localización es

$$\det(\mathbf{Q}^{ep}) = 0 \quad (7)$$

El inicio de la bifurcación discontinua se produce cuando el tensor acústico elastoplástico \mathbf{Q}^{ep} exhibe una singularidad, es decir, cuando $\det(\mathbf{Q}^{ep}) = 0$. Considerando la forma de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan este problema, podemos decir que la ecuación (7) indica el cambio de la condición de equilibrio desde una forma elíptica a una forma hiperbólica. Por esta razón, la condición de singularidad del tensor de localización se denomina frecuentemente pérdida de elipticidad. En este sentido, en la teoría de propagación de ondas el tensor de localización es conocido como “tensor acústico” y expresado en la forma

$$\mathbf{Q}^{ep} \cdot \mathbf{M} = \rho c^2 \mathbf{M} \quad (8)$$

donde ρ es la densidad de masa y c la velocidad de propagación de la onda en el medio continuo. A partir de la forma de la ecuación anterior, puede verse que ρc^2 son los autovalores del tensor acústico \mathbf{Q}^{ep} . Por lo tanto, el desarrollo de una discontinuidad en un medio continuo puede interpretarse como una pérdida de positividad de la velocidad de la onda. En otras palabras, un autovalor nulo en el tensor acústico indica la formación de una onda estacionaria causada por la existencia de la discontinuidad en el cuerpo. En la (8), la desigualdad $\rho c^2 \leq 0$ sirve como un indicador de una pérdida fuerte de elipticidad en la condición de equilibrio incremental.

3 CRITERIOS DE RESISTENCIA CUADRATICOS

Consideremos una función de fluencia isotrópica general de los tres invariantes de tensión dada por $F(I_1, I_2, I_3)$. Si los gradientes de la función de carga n_{ij} (o m_{ij} para formulaciones no asociadas) se reemplazan en la condición de localización, se llega a una función de las tensiones de cuarto orden en el espacio σ - τ de Mohr, ver Rizzi¹². Sin embargo, si el modelo constitutivo no incluye al tercer invariante y el criterio de resistencia se expresa solo como $F(I_1, I_2)$, la representación en el plano de Mohr es una elipse. Teniendo esto en consideración, para una amplia gama de modelos constitutivos ingenieriles es posible la determinación de las propiedades de localización de modo directo mediante el método geométrico. Entre las formulaciones para las que este criterio es válido podemos incluir a los modelos de Beltrami, von Mises, Drucker-Prager, Cam-Clay, etc. Un aspecto importante a tener en cuenta es que la interpretación geométrica en el espacio de Mohr es válida también para criterios de resistencia basados en deformaciones, y tanto para modelos de daño como para modelos basados en la teoría de la plasticidad. Entre las formulaciones constitutivas mencionadas, es de particular interés la de Drucker-Prager, debido a que con una calibración adecuada de sus parámetros ésta es apta para modelar el comportamiento no lineal de materiales complejos. Las principales desventajas de la versión original de este modelo son la excesiva dilatación exhibida debido a la dirección constante del flujo plástico y la indefinición de la normal a la superficie de fluencia en el punto de tracción equitriaxial, lo que origina una mala

performance numérica cuando el estado de tensión cae en esta región de la superficie de carga. Con el fin de evitar estas dificultades, se presentan aquí variantes del modelo original. Una generalización de este criterio fue propuesta por Liebe y Willam¹⁵ como

$$F = F(I_1, J_2, \alpha, \beta) = J_2^m - z[c\alpha I_1 - \beta]^n + Cons \quad (9)$$

En la (9), $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$ es el primer invariante del tensor de tensiones y $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}$ el segundo invariante del tensor desviador $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}_2$ siendo p la presión media.

Los parámetros materiales α y β representan al ángulo de fricción y la cohesión respectivamente. La dependencia del modelo en los cuatro coeficientes adicionales z , c , m y n permite la representación de la formulación original y de las versiones parabólica, hiperbólica y elíptica. La constante $Cons$ sólo tiene significado en la representación de la función para los casos hiperbólico y elíptico. A diferencia de las formulaciones lineal y parabólica, para las cuales la determinación de los parámetros materiales α y β es directa, la calibración de las restantes versiones curvilíneas requiere de hipótesis adicionales. Estos aspectos se desarrollan en la sección siguiente.

4 CALIBRACION DE LOS MODELOS DE DRUCKER-PRAGER NO LINEALES

4.1 Modelo lineal de Drucker-Prager

Consideremos primeramente el modelo original propuesto por Drucker y Prager. Aplicando la (9) con $m = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $z = -1$ y $c = 1$ y $Cons = 0$ resulta la función lineal

$$F_{lin}^{DP} = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \beta \quad (10)$$

Una de las formas más convenientes para hallar los valores del ángulo de fricción α y la cohesión β es la de expresar estos parámetros en términos de características materiales que puedan ser determinadas de manera relativamente simple en laboratorio. En la práctica, los ensayos que sirven de base para la calibración son la resistencia a la compresión uniaxial f'_c y a la tracción uniaxial f'_t . Los tensores de tensión que corresponden a los estados uniaxiales de compresión y de tracción de máxima resistencia son

$$\boldsymbol{\sigma}'_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f'_t \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}'_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f'_c \end{bmatrix} \quad (11)$$

A partir de estos estados tensionales extremos, los dos puntos correspondientes a la condición de fluencia en tracción y compresión pueden determinarse en términos de la presión media p y $\sqrt{J_2}$ como:

- *Coordenadas del punto de tracción P_t*

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{f_t'}{3} ; \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2}{6}} = \frac{f_t'}{\sqrt{3}}$$

- *Coordenadas del punto de compresión P_c*

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\frac{f_c'}{3} ; \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2}{6}} = \frac{f_c'}{\sqrt{3}}$$

Entonces, las coordenadas de los puntos de paso de la recta en el espacio $p - \sqrt{J_2}$ son

$$P_t = \left(\frac{f_t'}{3}, \frac{f_t'}{\sqrt{3}} \right) ; P_c = \left(-\frac{f_c'}{3}, \frac{f_c'}{\sqrt{3}} \right) \quad (12)$$

Reemplazando los valores de p y $\sqrt{J_2}$ en la (10) resulta un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\frac{f_t'}{\sqrt{3}} + \alpha f_t' - \beta = 0 \quad i) \quad \frac{f_c'}{\sqrt{3}} - \alpha f_c' - \beta = 0 \quad ii) \quad (13)$$

Resolviendo el sistema en términos de α y β obtenemos

$$\alpha = \frac{f_c' - f_t'}{\sqrt{3}(f_t' + f_c')} ; \beta = \frac{2f_c'f_t'}{\sqrt{3}(f_t' + f_c')} \quad (14)$$

4.2 Modelo parabólico

Empleando nuevamente la (9) con $m = 1$, $n = 1$, $z = -1$ y $c = 1$ y $Cons = 0$ resulta la función cuadrática

$$F_{par}^{DP} = J_2 + \alpha I_1 - \beta \quad (15)$$

Nuevamente, podemos aplicar la condición de que en el espacio $p - \sqrt{J_2}$ la curva que define la función de carga pase por los puntos característicos que definen los estados tensionales de tracción y compresión uniaxial definidas ahora como

$$P_t = \left(\frac{f'_t}{3}, \frac{f'^2_t}{3} \right) \quad ; \quad P_c = \left(-\frac{f'_c}{3}, \frac{f'^2_c}{3} \right) \quad (16)$$

Particularizando la (16) para estos puntos y resolviendo el sistema obtenemos las siguientes expresiones para los parámetros materiales

$$\alpha = \frac{f'_c - f'_t}{3} \quad (17)$$

$$\beta = \frac{f'_c f'_t}{3} \quad (18)$$

La variante parabólica resulta en una superficie no lineal cuyo gradiente \mathbf{n}_{par} cambia de acuerdo con la posición del estado tensional respecto al eje hidrostático. Esta es la razón por la cual la variante parabólica exhibe una dilatación mucho menor que la dada por el modelo original de gradiente fijo.

4.3 Modelo de Drucker-Prager hiperbólico

Este se obtiene particularizando la función general dada por la (9) para $m = 1$, $n = 2$, $z = -1$ y $c = 1/3$

$$F_{hip}^{DP} = J_2 - \left(\alpha \frac{I_1}{3} - \beta \right)^2 + k^2 \alpha^2 \quad (19)$$

En la (19), $Cons = k^2 \alpha^2$ posibilita la representación de una hipérbola que intersecta en su vértice al eje hidrostático. Observando (19), vemos que para determinar todos los parámetros de la variante hiperbólica es necesario hacer hipótesis adicionales para poder resolver el sistema, dado que la curvatura k de la hipérbola también debe determinarse. A partir de aquí, podemos elegir diferentes caminos para llegar a la solución. Estos pueden resumirse en las siguientes alternativas:

- a) Hipérbola que pasa por puntos P_t y P_c y que cumple con la condición adicional de idéntica curvatura que la parábola ($k_{par} = k_{hip}$)
- b) Hipérbola que pasa por puntos P_t y P_c y que cumple con la condición adicional de idéntica α que la formulación lineal ($\alpha_{lin} = \alpha_{hip}$)
- c) Hipérbola que pasa por punto P_c y que cumple con la condición adicional de idéntica α que la formulación lineal ($\alpha_{lin} = \alpha_{hip}$) e idéntica curvatura que la parabólica ($k_{par} = k_{hip}$)

La Tabla 1 resume los valores de los parámetros α y β para la formulación hiperbólica de Drucker-Prager según las alternativas anteriores:

Tabla 1: Valores de α_{hip} y β_{hip}

	α_{hip}	β_{hip}
a)	$\alpha = \frac{\sqrt{6f_c'^2 + 6f_t'^2}}{f_c' + f_t'}$	$\beta = \frac{\sqrt{2f_t'\alpha^2 + (12f_t'^2\alpha^2 + 9(f_t'^2 + f_c'^2)) - 18f_c'f_t'}}{6\alpha}$
b)	$\alpha = \frac{f_c' - f_t'}{\sqrt{3}(f_c' + f_t')}$	$\beta = \frac{2}{3} \frac{(2f_t'^2 + 5f_c'f_t' + 2f_c'^2)}{\sqrt{3}(f_c' + f_t')}$
c)	$\alpha = \frac{f_c' - f_t'}{\sqrt{3}(f_c' + f_t')}$	$\beta = \frac{1}{18} \sqrt{3} \frac{[2f_c'f_t' - 2f_c'^2 + 3\sqrt{(9f_t'^2 + 18f_c'f_t' + 13f_c'^2)(f_c' + f_t')^2}]}{(f_c' + f_t')}$

4.4 Modelo de Drucker-Prager elíptico

La variante elíptica se obtiene con la función general dada por la (9) para $m = 1$, $n = 2$, $z = 1$ y $c = 1/3$

$$F_{elip}^{DP} = J_2 + \left(\alpha \frac{I_1}{3} - \beta \right)^2 - k^2 \alpha^2 \quad (20)$$

La extensión elíptica es muy usada en la modelación del comportamiento de suelos en los denominados modelos de capa. Al igual que en el caso hiperbólico, es necesario realizar hipótesis adicionales para despejar los parámetros materiales. Con el fin de realizar algunas comparaciones, las alternativas exploradas son las mismas que en el caso hiperbólico:

- a₂) Elipse que pasa por puntos P_t y P_c y que cumple con la condición adicional de *idéntica curvatura* que la parábola ($k_{par} = k_{elip}$)
- b₂) Elipse que pasa por puntos P_t y P_c y que cumple con la condición adicional de *idéntica pendiente de fricción* α que la formulación lineal ($\alpha_{lin} = \alpha_{elip}$)
- c₂) Elipse que pasa por punto P_c y que cumple con la condición adicional de *idéntica pendiente de fricción* α que la formulación lineal ($\alpha_{lin} = \alpha_{elip}$) e idéntica curvatura que la parabólica ($k_{par} = k_{elip}$)

Luego de resolver los sistemas de ecuaciones resultantes, se obtienen los resultados dados en la Tabla 2:

Tabla 2: Valores de α_{elip} y β_{elip}

	α_{elip}	β_{elip}
$A_2)$	α es imaginario	β es imaginario
$b_2)$	$\alpha = \frac{f'_c - f'_t}{\sqrt{3}(f'_t + f'_c)}$	β es negativo o nulo
$C_2)$	$\alpha = \frac{f'_c - f'_t}{\sqrt{3}(f'_t + f'_c)}$	$\beta = \frac{1}{18}\sqrt{3} \frac{[-2f'_c f'_t - 2f_c'^2 + 3\sqrt{(9f_t'^2 + 18f'_c f'_t + 5f_c'^2)}(f'_c + f'_t)^2]}{(f'_c + f'_t)}$

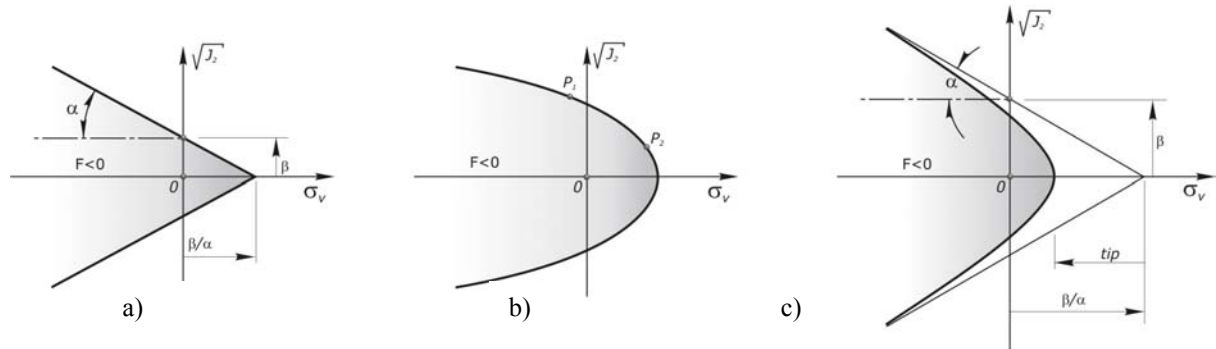


Figura 2: Criterio de Drucker-Prager a) lineal b) parabólico c) hiperbólico

Como vemos, en el caso elíptico no es posible hallar soluciones reales para la alternativa $a_2)$. En el caso $b_2)$, el valor de β que se obtiene es nulo para el caso en que $f'_c = f'_t$ y negativo cuando $f'_c > f'_t$. Estos dos casos son los que importan en la práctica, ya que el primero corresponde a una particularización del modelo de Drucker-Prager que resulta en el modelo de von Mises ($\alpha = 0$ en este caso). El caso $f'_c > f'_t$ es el que comprende a la mayoría de los materiales dado que en general, la resistencia a compresión es superior a la de tracción. Si bien matemáticamente es posible obtener una función elíptica para valores de β negativos, esto no tiene significado físico, ya que el ángulo de fricción y la cohesión se suponen parámetros positivos.

En la sección siguiente, mostraremos la influencia de las hipótesis realizadas con respecto a la pendiente de fricción y la cohesión sobre las propiedades de localización de un sólido elastoplástico de Drucker-Prager sometido a estados simples de tensión.

5 ANALISIS DE LOCALIZACIÓN – METODO GEOMÉTRICO

Partiendo de la expresión hallada por Ottosen y Runesson para el valor crítico del módulo de endurecimiento \bar{H} necesario para obtener la singularidad del tensor de localización \mathbf{Q} en función de la orientación de un plano determinado por el vector normal \mathbf{N}

$$\bar{H}^{crit}(\mathbf{N}) = \mathbf{n} : \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} (\mathbf{Q}^{-1}) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} : \mathbf{m} \quad (21)$$

Considerando el caso de elasticidad lineal isótropa en 3D, los tensores de rigidez elástica, el tensor acústico y su inversa pueden expresarse como:

$$\mathbf{E} = 2G \cdot \mathbf{I} + \Lambda \cdot \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad (22)$$

$$\mathbf{Q} = G \cdot \mathbf{I}_2 + (\Lambda + G) \cdot \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (23)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{\mathbf{I}_2}{G} - \left[\frac{\Lambda + G}{G(\Lambda + 2G)} \right] \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (24)$$

Para relacionar el análisis clásico de localización con el concepto de envolvente de falla de Mohr, es necesario evaluar los gradientes a la función de fluencia. Considerando los componentes de tensión normal y tangencial en el plano de normal \mathbf{N}

$$\sigma = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} \quad s = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N} \quad (25)$$

$$\tau^2 = (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N})^2 = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{N} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{N})^2 \quad (26)$$

Combinando las ecuaciones (21), (25) y (26), la condición de localización puede expresarse en la forma de una elipse

$$\bar{H}_{3D/Pe}^{crit}(\mathbf{N}) = \frac{\tau^2}{G} + \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{\Lambda + 2G} \quad (27)$$

La (27) es válida para estados tensionales tridimensionales y de deformación plana. Para el caso de tensión plana, esta toma la forma

$$\bar{H}_{P\sigma}^{crit}(\mathbf{N}) = \frac{\tau^2}{G} + \frac{(\Lambda + 2G)(\sigma - \sigma_0)^2}{4G(\Lambda + G)} \quad (28)$$

Como vemos, la diferencia entre los casos tridimensional o deformación plana y tensión plana, estriba sólo en la magnitud del coeficiente que afecta al término de las tensiones normales, el cual es menor para tensión plana. Entonces, en el caso de formulaciones constitutivas basadas en superficies de fluencia cuadráticas la condición de localización toma la forma de una elipse en el plano de Mohr de coordenadas $\sigma - \tau$. Hay que destacar aquí que

los semiejes de la elipse dependen sólo de los valores de las constantes elásticas y del estado tensional supuesto. La magnitud σ_0 representa el desplazamiento del centro de la elipse con respecto al origen de coordenadas, y debe evaluarse para cada modelo en particular.

Recordando el criterio de Mohr, en el cual la tangencia entre el círculo de tensiones y la envolvente de falla determina el ángulo crítico que define el plano de ruptura, puede verse que la interpretación geométrica de la condición de localización dada por las ecuaciones (27) o (28) implica que la tangencia entre elipse y círculo corresponde al caso en que $\det(\mathbf{Q}^{ep}) = 0$, que es la condición que determina el inicio de la localización de falla. El tamaño de la elipse depende del estado de tensión y de las variables de estado del modelo, ya que éstas influyen sobre el tensor de rigidez tangente elastoplástico y sobre el módulo de endurecimiento- ablandamiento del material. Para un cierto tamaño de la elipse, puntos en el plano de Mohr fuera de la elipse satisfacen la condición $\det(\mathbf{Q}^{ep}) < 0$. Puntos situados dentro de la elipse satisfacen la condición $\det(\mathbf{Q}^{ep}) > 0$. A medida que el valor de \bar{H}^{crit} disminuye según se avanza en el proceso de carga, la elipse se encoge y oscula sobre el círculo de tensiones de Mohr, el cual se expande con el avance del proceso de carga.

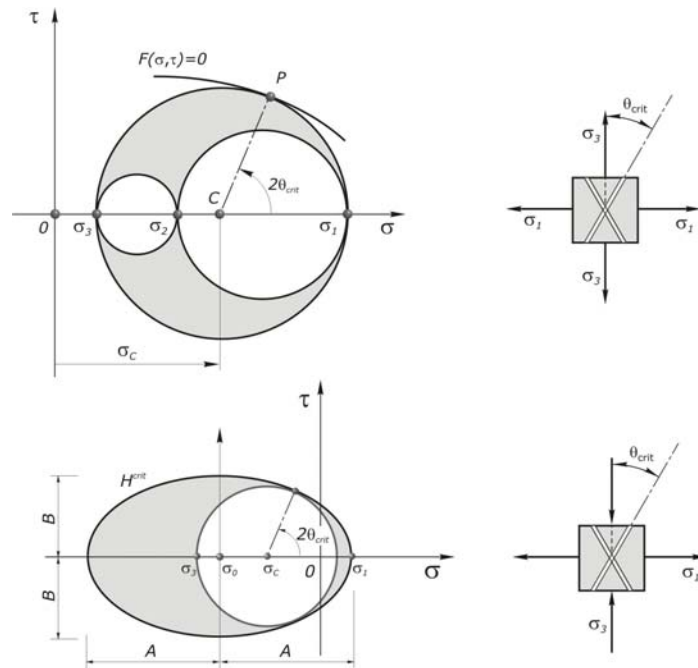


Figura 3: Criterio de falla de Mohr y elipse de localización

5.1 Condiciones de tangencia elipse-círculo

La tangencia entre elipse y círculo puede ocurrir en tres situaciones diferentes, dependiendo de la relación entre el tamaño del radio del círculo de Mohr y el radio de

curvatura de la elipse, definido como la relación $\rho = b^2/a = b^2/cb = b/c$, con $c^2 = a^2/b^2 = \Lambda + 2G/G$, la relación entre los semiejes de la elipse. Los tres casos pueden plantearse como (ver figura 4):

Caso a) Tangencia en el extremo derecho para círculos de radio menor al de curvatura de la elipse

$$\sigma_1 + \sigma_3 \geq \frac{\Lambda + G}{G}(\sigma_1 - \sigma_3) + 2\sigma_0 \quad (29)$$

Caso b) Tangencia en puntos intermedios de la elipse

$$-\frac{\Lambda + G}{G}(\sigma_1 - \sigma_3) + 2\sigma_0 < \sigma_1 + \sigma_3 < \frac{\Lambda + G}{G}(\sigma_1 - \sigma_3) + 2\sigma_0 \quad (30)$$

Caso c) Tangencia en el extremo izquierdo para círculos de radio menor al de curvatura de la elipse

$$\sigma_1 + \sigma_3 < -\frac{\Lambda + G}{G}(\sigma_1 - \sigma_3) + 2\sigma_0 \quad (31)$$

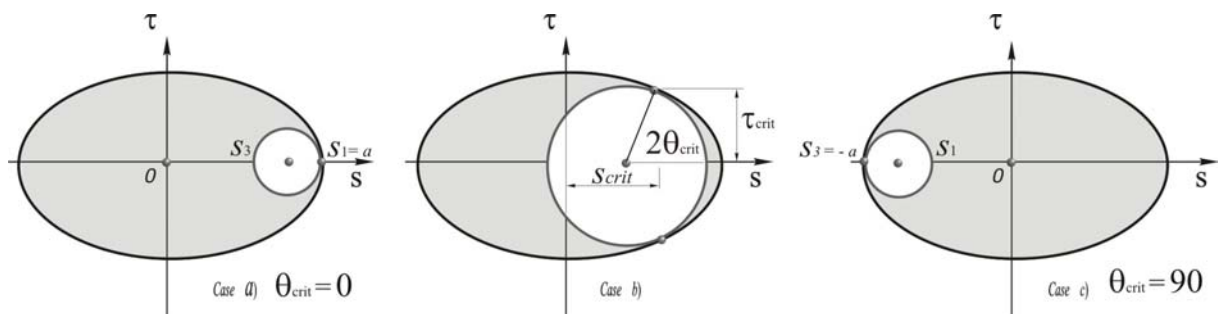


Figura 4 : Casos de tangencia elipse-círculo en el espacio normalizado $\tau - s$ ($s = \sigma - \sigma_0$)

Si el punto de tangencia se encuentra en el extremo derecho, caso a), el ángulo crítico de localización es $\theta^{crit} = 0^\circ$. El caso c) es análogo, pero con tangencia en el extremo izquierdo, por lo que $\theta^{crit} = 90^\circ$. El caso b) es el de mayor interés, ya que es el que implica estados de tangencia intermedios entre la elipse de localización y el círculo de Mohr. La expresión resultante para el ángulo crítico de localización resultante es (Carol – Rizzi – Willam¹⁵)

$$\tan^2 \theta_b^{crit} = \frac{(c^2 - 1)^2(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0)^2}{[c^2\sigma_1 + (2 - c^2)\sigma_3 - 2\sigma_0]^2} \quad (32)$$

Como vemos, el ángulo crítico de localización es independiente del valor del módulo

crítico H^{crit} . Si bien el tamaño de la elipse depende del valor del módulo crítico, la posición del centro de la elipse y la forma son independientes del mismo. Debido a que el valor del coeficiente de Poisson afecta a las constantes, el ángulo de localización y la forma y posición de la elipse cambian de acuerdo con el mismo.

5.2 Localización en modelos de Drucker-Prager no lineales

Consideremos ahora las variantes parabólica e hiperbólica del modelo de Drucker-Prager. La evaluación de los gradientes de las funciones normalizadas conduce a las siguientes expresiones de las cantidades \mathbf{n} , \mathbf{e}_n y σ_0 (K es el módulo de compresibilidad del material y $\sigma_v = \sigma_{kk}/3$)

- *Drucker-Prager parabólico*

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{par}^{DP} &= \frac{\partial F_{par}^{DP}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s} + z\boldsymbol{\alpha}}{2G} \\ \mathbf{e}_n^{par} &= \mathbf{n} : \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{s}^n + \frac{K}{2G} z\boldsymbol{\alpha} \mathbf{N} \\ \sigma_0^{par} &= \sigma_v - \frac{K}{2G} z\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

En base a estas expresiones, puede evaluarse el módulo crítico para los casos de tangencia descritos anteriormente ($R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\sigma_c = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$):

- *Casos a) y c) de Tangencia*

$$\begin{aligned}H_{a,c}^{crit} &= \frac{1}{G} \left[(R + \sigma_c - \sigma_0^{par})^2 \frac{G}{\Lambda + 2G} - J_2 - \frac{3\Lambda + 2G}{3G} \alpha^2 \right] \\ \theta_a^{crit} &= 0^\circ \quad (\theta_c^{crit} = 90^\circ)\end{aligned}\tag{33}$$

- *Caso b) Tangencia intermedia*

$$\begin{aligned}H_b^{crit} &= \frac{1}{G} \left[R^2 + (\sigma_c - \sigma_0^{par})^2 \frac{G}{\Lambda + G} - J_2 - \frac{3\Lambda + 2G}{3G} \alpha^2 \right] \\ \tan^2 \theta_b^{crit} &= \frac{(c^2 - 1)^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0^{par})^2}{[c^2 \sigma_1 + (2 - c^2) \sigma_3 - 2\sigma_0^{par}]^2}\end{aligned}\tag{34}$$

- *Drucker-Prager hiperbólico*

$$\mathbf{n}_{hip}^{DP} = \frac{\partial F_{hip}^{DP}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s}}{2G} - \frac{(2\alpha^2 \sigma_V - 2cz\alpha)}{6G} \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{e}_n^{hip} = \mathbf{n}_{hip}^{hip} : \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{s}^n - \frac{K}{G} \alpha (\alpha \sigma_V - cz) \mathbf{N}$$

$$\sigma_0^{hip} = \sigma_V \left[1 - \frac{K}{G} z\alpha \right] + \frac{czK\alpha}{G}$$

El módulo crítico para el caso hiperbólico es:

- *Casos a) y c) de Tangencia*

$$H_{a,c}^{crit} = \frac{1}{G} \left[(R + \sigma_c - \sigma_0^{hip})^2 \frac{G}{\Lambda + 2G} - J_2 - \frac{4}{9} (3z\sigma_V\alpha - c)^2 \frac{K}{G} \alpha^2 \right] \quad (35)$$

$$\theta_a^{crit} = 0^\circ \quad (\theta_c^{crit} = 90^\circ)$$

- *Caso b) Tangencia intermedia*

$$H_b^{crit} = \frac{1}{G} \left[R^2 + (\sigma_c - \sigma_0^{hip})^2 \frac{G}{\Lambda + G} - J_2 - \frac{4}{9} (3z\sigma_V\alpha - c)^2 \frac{K}{G} \alpha^2 \right] \quad (36)$$

$$\tan \theta_b^{crit} = \frac{(c^2 - 1)^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_0^{hip})^2}{[c^2 \sigma_1 + (2 - c^2) \sigma_3 - 2\sigma_0^{hip}]^2}$$

6 EJEMPLOS

Como aplicaciones del método geométrico, se presentan a continuación los resultados obtenidos para los ángulos críticos de localización y el módulo crítico considerando estados tensionales de tracción y compresión uniaxial y corte simple. Las relaciones $f'_c : f'_t$ consideradas son: 2:1, 5:1 y 10:1. Con el fin de resaltar la influencia que sobre las propiedades de localización ejerce el módulo de Poisson, en los análisis se tomaron los valores 0.0, 0.3 y 0.5.

Tabla 3: Análisis geométrico de localización – DP parabólico ($E = 3000$)

Drucker Prager Parabólico – $f_c : f_t = 2:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Ángulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	b	0.00	0.00	-2.00	45.00° $-6.049 \cdot 10^{-4}$	36.27° $-6.059 \cdot 10^{-4}$	30.03° 0.069
Corte	b	0.77	0.00	-0.77	32.174° $2.246 \cdot 10^{-4}$	27.88° $5.408 \cdot 10^{-4}$	35.27° 0.071
Tracción	a	1.00	0.00	0.00	0.00° $6.173 \cdot 10^{-5}$	0.00° $2.608 \cdot 10^{-4}$	0.00° 0.069

Drucker Prager Parabólico – $f_c : f_t = 5:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Ángulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	b	0.00	0.00	-3.00	39.23° $-2.012 \cdot 10^{-3}$	27.97° $-8.972 \cdot 10^{-4}$	24.14° 0.275
Corte	b	1.5	0.00	-1.5	13.63° $1.395 \cdot 10^{-3}$	0.00° $4.471 \cdot 10^{-3}$	24.11° 0.279
Tracción	a	1.00	0.00	0.00	0.00° $3.21 \cdot 10^{-4}$	0.00° $2.563 \cdot 10^{-3}$	0.00° 0.277

Drucker Prager Parabólico – $f_c : f_t = 10:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Ángulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	b	0.00	0.00	-10.00	37.27° $-8.37 \cdot 10^{-3}$	24.86° $-1.471 \cdot 10^{-3}$	13.00° 5.587
Corte	a	1.5	0.00	-1.5	0.00° $2.25 \cdot 10^{-3}$	0.00° 0.014	0.00° 5.603
Tracción	a	1.00	0.00	0.00	0.00° $2.593 \cdot 10^{-4}$	0.00° $9.679 \cdot 10^{-3}$	0.00° 5.596

Los resultados de Tabla 3 corresponden a muestran que a medida que la relación de resistencias crece, disminuyen progresivamente los valores del ángulo crítico de localización. En Tabla 4, se dan los resultados para el modelo hiperbólico, calculados con las expresiones del ángulo de fricción y cohesión dados por el caso c) de Tabla 1. En este caso, es más evidente aún que para relaciones altas de resistencia compresión / tracción el ángulo de localización tiende a cero. Esto significa que el modo de falla se aproxima cada vez mas al modo I. En las figuras 5 y 6 se dan las gráficas de las variantes parabólica e hiperbólica respectivamente. El caso a) de Tabla 1, proporciona valores muy altos para la fricción, con la

desventaja de que para igual resistencia a tracción que a compresión no se anula, por lo cual no puede particularizarse para el caso de fricción nula (modelo de von Mises). El caso b) presenta muy poca variación con respecto al c) de la misma tabla. Lo mismo puede inferirse del análisis de la variante elíptica c).

 Tabla 4: Análisis geométrico de localización – DP hiperbólico ($E = 3000$)

Drucker Prager – Hiperbólico – $f_c : f_t = 2:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Angulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	b	0.00	0.00	-2.00	44.10° $-2.216 \cdot 10^{-4}$	35.04° $-3.721 \cdot 10^{-4}$	28.42° 0.1496
Corte	b	0.77	0.00	-0.77	31.55° $3.444 \cdot 10^{-4}$	26.99° $7.867 \cdot 10^{-4}$	23.64° 0.1365
Tracción	a	1.00	0.00	0.00	0.00° $1.156 \cdot 10^{-4}$	0.00° $4.885 \cdot 10^{-4}$	0.00° 0.1301

Drucker Prager – Hiperbólico – $f_c : f_t = 5:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Angulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	B	0.00	0.00	-5.00	36.97° $-1.07 \cdot 10^{-3}$	24.36° $4.089 \cdot 10^{-3}$	11.98° 2.606
Corte	B	1.5	0.00	-1.5	12.44° $2.234 \cdot 10^{-3}$	0.00° $8.078 \cdot 10^{-3}$	0.00° 2.080
Tracción	A	1.00	0.00	0.00	0.00° $1.103 \cdot 10^{-3}$	0.00° $5.856 \cdot 10^{-3}$	0.00° 1.980

Drucker Prager – Hiperbólico – $f_c : f_t = 10:1$							
Caso de carga	Caso de Tangencia	Componentes de tensión			Angulo crítico θ^{crit} Módulo crítico H^{crit}		
		σ_1	σ_2	σ_3	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.5$
Compresión	b	0.00	0.00	-10.00	34.20° $-3.297 \cdot 10^{-3}$	19.43° 0.026	0.00° 12.841
Corte	a	1.5	0.00	-1.5	0.00° $6.285 \cdot 10^{-3}$	0.00° 0.031	0.00° 5.655
Tracción	a	1.00	0.00	0.00	0.00° $4.167 \cdot 10^{-3}$	0.00° 0.026	0.00° 4.849

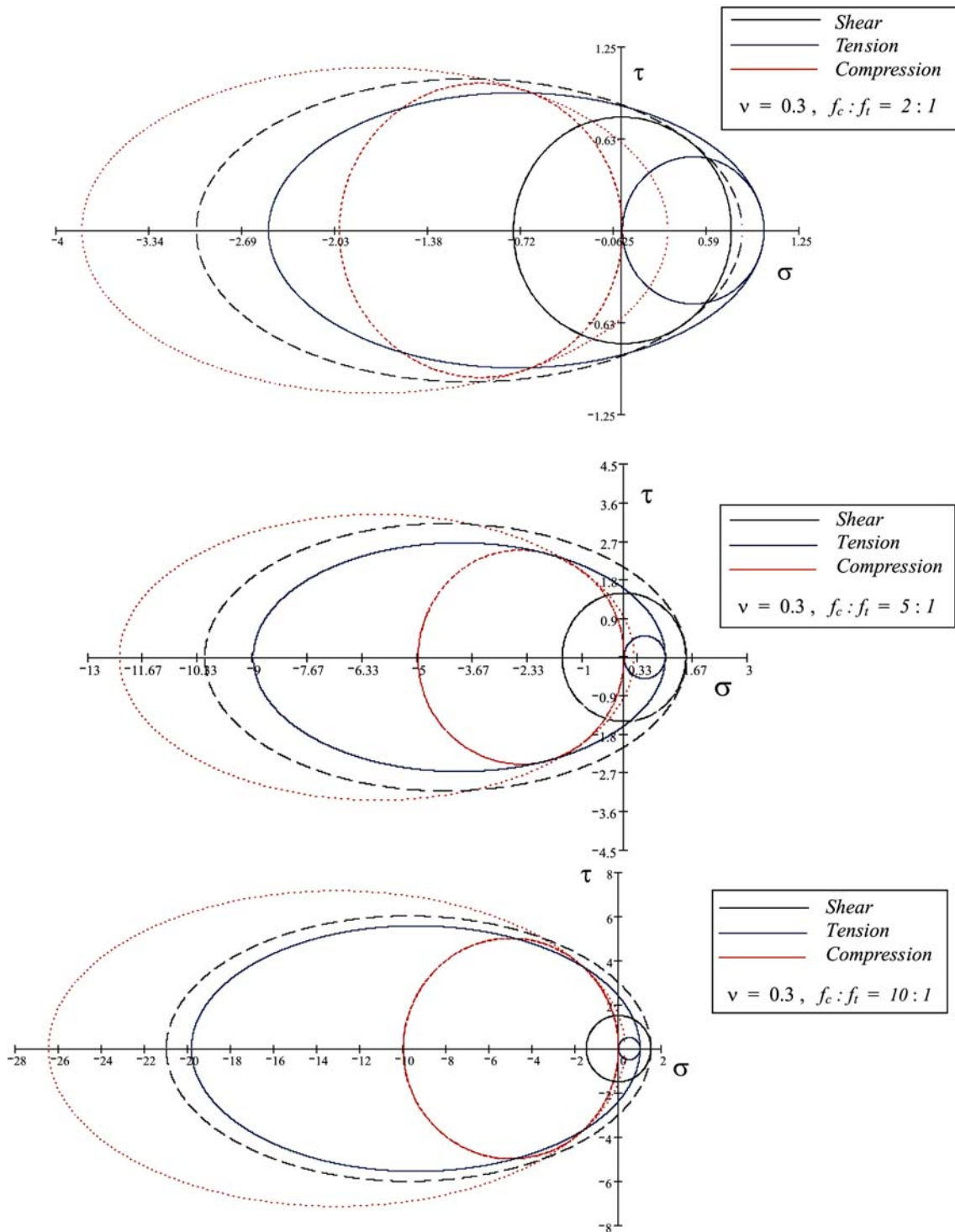


Figura 5: Análisis geométrico de localización - Drucker – Prager parabólico

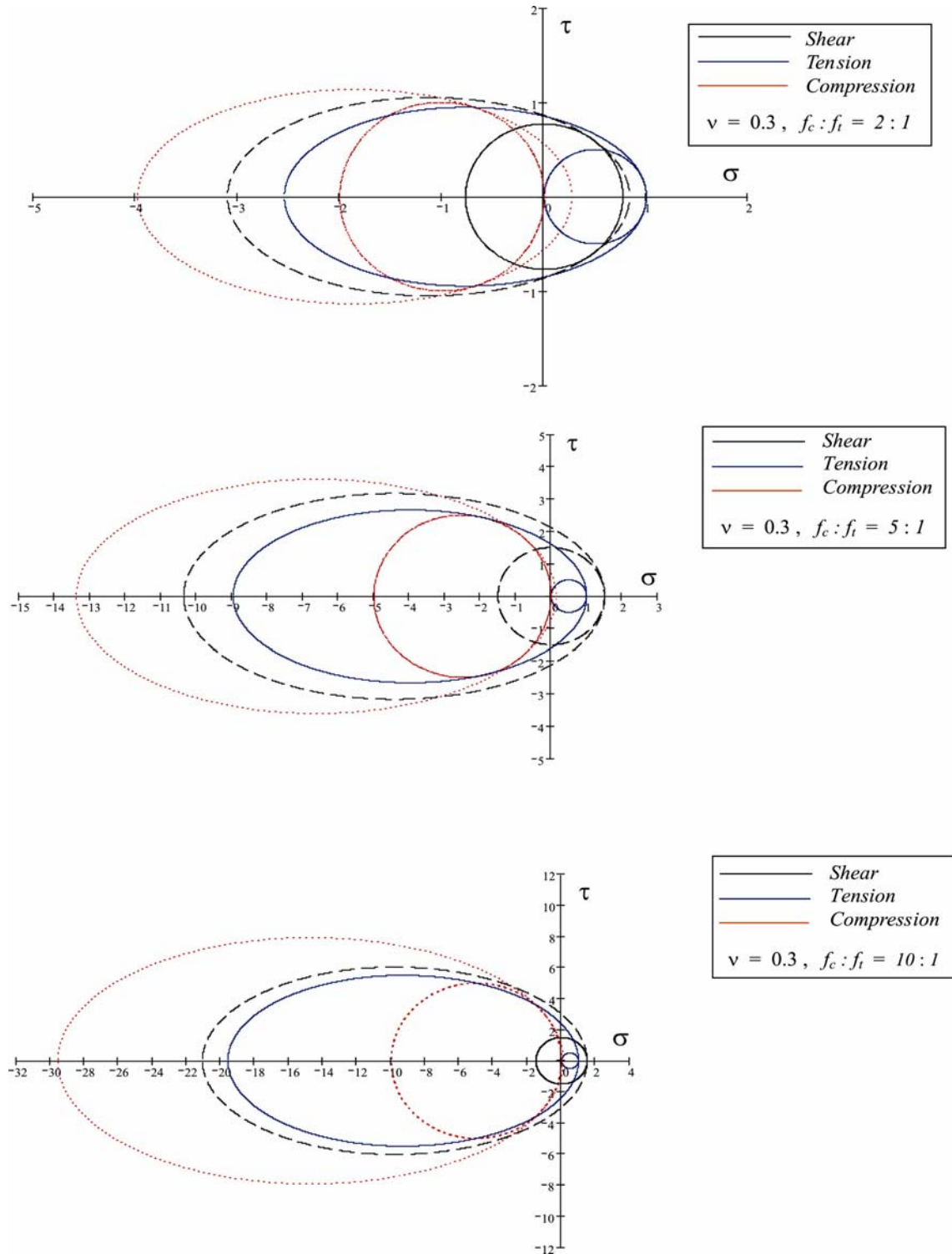


Figura 6: Análisis geométrico de localización - Drucker – Prager hiperbólico

7 CONCLUSIONES

Dependiendo de los valores supuestos para el estado tensional y los parámetros materiales, el caso de tangencia entre elipse de localización y círculo de falla de Mohr puede cambiar de intermedio a extremo, lo que indica que existe una transición continua de modo mixto de falla a modo I (tracción pura). Esta tendencia es mucho más evidente en el caso del modelo hiperbólico, ver figura 6 y tabla 4. La formulación parabólica tiene las ventajas de poder calibrarse con solo dos parámetros, sin necesidad de realizar hipótesis adicionales. El formato hiperbólico implica establecer condiciones adicionales para hallar los parámetros materiales en forma consistente. El método geométrico empleado se muestra como una poderosa herramienta de análisis de las propiedades de localización de sólidos elastoplásticos cuyas leyes constitutivas estén formuladas en base a funciones de fluencia cuadráticas, remarcando el hecho de que es aplicable también a modelos de daño y a modelos que combinan daño y plasticidad.

8 REFERENCIAS

- [1] R. Hill, "Acceleration waves in solids", *J. Mech. Phys. Solids* 10, 1-16, (1962)
- [2] J. W. Rudnicki and J.R. Rice, "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", *Int. J. Solids and Structures*, 23 (4), 371-394, (1975)
- [3] K.J. Willam, T. Munz, G. Etse and Ph. Menetrey, "Failure conditions and localization in concrete", *Proc. Euro-C Conference*, H. Mang, N. Bicanic and R. de Borst Eds., Pineridge Press Swansea, 263-282, (1994)
- [4] G. Borré and G. Maier, "On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis", *Meccanica*, 24, 36-41
- [5] N.S. Ottosen and K. Runesson, "Discontinuous bifurcations in a nonassociated Mohr material", *Mechanics of Materials* 12, 255-265, (1991)
- [6] N.S. Ottosen and K. Runesson, "Properties of discontinuous bifurcations solutions in elastoplasticity", *Int. J. of Solids and Struc.*, 27 (4), 401-421, (1991)
- [7] D. Bigoni and T. Hueckel, "Uniqueness and localization I", *Int. J. of Solids and Struc.*, 28 (2), 215-224, (1991)
- [8] A. Benallal, "On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity", *Arch. Mech.* 44 (1), 15-29, (1992)
- [9] A. Benallal and C. Comi, "Localization analysis via a geometrical method", *Int. J. Solids and Structures*, 33 (1), 99-119 (1996)
- [10] E. Rizzi, I. Carol, and K.J. Willam, "Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage", *ASCE J. Eng. Mechanics* 121 (4), 541-554, (1995)
- [11] K. J. Willam and M.M. Iordache, "Fundamental aspects of failure modes in brittle solids", *Proc. Euro-US Workshop on Fracture and Damage in Quasibrittle Materials*, Prague, Sept., 20-23, (1994)
- [12] E. Rizzi, "Localization analysis of damaged materials", *Int. Rep. CU/SR/-93/5, CEAE*

- Dept., University of Colorado, Boulder, Colorado.*
- [13] D.C. Drucker and W. Prager, “Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design”, *Quarterly of Applied Mathematics*, 10, 157-175, (1952)
- [14] J. Hadamard, “Leçons sur la Propagation des Ondes”, *Librairie Scientifique*, A. Hermann et. Fils, Paris.
- [15] T. Liebe and K. Willam, “Localization results of generalized Drucker-Prager elastoplasticity”, *Technical Note*, University of Colorado at Boulder.
- [16] K. Willam and M.M. Iordache, “Localized failure modes in cohesive-frictional materials”, *Dept. of Civil, Env. and arch. Engrg*, Boulder, Colorado.
- [17] I. Carol and K. Willam, “Application of analytical solutions in elasto-plasticity to localization analysis of damage models”, en Owen, D.R.J., Oñate, E. y Hinton, E. (eds.), *Computational Plasticity, (COMPLAS IV)*, pp. 714-719, Barcelona, España, Pineridge Press. ISBN 84-87867-87-1, (1997).