

UN MÉTODO DE MOLIFICACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS INVERSOS MAL CONDICIONADOS: APLICACIONES

Rubén D. Spies ^{†,*}, Karina G. Temperini ^{‡,*}

[†] Fac. de Ingeniería Química - Universidad Nacional del Litoral

[‡] Fac. de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral

*Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - CONICET

Güemes 3450, S3000GLN, Santa Fe, Argentina

E-mail: rspies@imalpde.ceride.gov.ar

E-mail: ktemperini@ceride.gov.ar

Palabras clave: problema inverso, inversa aproximada, ecuación del calor “backwards”, ecuación del calor “sideways”.

Resumen. En este artículo se presentan aplicaciones del método de la inversa aproximada a la resolución de problemas inversos en conducción del calor. En particular se estudian la “backwards heat equation” (BHE) o ecuación del calor hacia atrás en el tiempo y la “sideways heat equation” (SHE) o ecuación del calor hacia un lado. Se muestran ejemplos y varios resultados numéricos para datos con y sin ruido.

1. INTRODUCCIÓN

En un contexto general, un problema inverso se puede formular como la necesidad de hallar f en una ecuación de la forma

$$Af = g, \quad (1)$$

donde $A : X \rightarrow Y$ es un operador lineal y continuo, X, Y son espacios de Hilbert y g es el dato. Generalmente, los problemas inversos son “mal condicionados” en el sentido de Hadamard: hay pérdida de existencia, pérdida de unicidad y/o pérdida de dependencia continua de los datos. En el estudio de problemas inversos en general, los dos primeros no constituyen problemas graves. Casi siempre puede forzarse la existencia relajando el concepto de solución y la no unicidad en ciertos casos hasta puede ser ventajosa. Es la pérdida de dependencia continua, puesta de manifiesto en la no acotación de la inversa generalizada de Moore-Penrose, la que origina los mayores inconvenientes pues en tal caso, pequeños errores o ruidos en la medición del dato g pueden producir errores muy grandes en las soluciones del problema inverso, haciendo inestables todos los procedimientos numéricos de aproximación tradicionales.

Una solución parcial para esta pérdida de estabilidad es el uso de métodos de regularización. Sin embargo debe tenerse presente que ningún truco matemático puede hacer estable un problema que es intrínsecamente inestable. Todo lo que un método de regularización puede hacer es recuperar la mayor cantidad de información sobre la solución como sea posible sin perder la estabilidad. El “arte” de aplicar métodos de regularización consiste precisamente en hallar el compromiso justo entre exactitud y estabilidad.¹

En 1990, A. Louis y P. Maass² propusieron un método de inversión que calcula una *versión molificada* de la solución del problema inverso mal condicionado. El operador solución, llamado “*inversa aproximada*”, transforma el dato g en una aproximación estable de la solución. Una de las ventajas más importantes de este método, que presentamos en la Sección 2, es que el operador solución es precalculado antes de la medición del dato g . Se puede probar³ que la inversa aproximada es un método de regularización, es decir, que la solución regularizada converge a la solución exacta cuando el nivel de ruido tiende a cero.

En la sección 3 se presentan dos casos de aplicación del método de la inversa aproximada a los siguientes problemas inversos en conducción del calor: la “backwards heat equation” (BHE) o ecuación del calor hacia atrás en el tiempo y la “sideways heat equation” (SHE) o ecuación del calor hacia un lado. Finalmente se muestran ejemplos y varios resultados numéricos para datos con y sin ruido.

2. LA INVERSA APROXIMADA

Consideremos un problema inverso como el planteado en (1) y supongamos que $\mathcal{R}(A)$ no es cerrado. Es bien sabido¹ que entonces A^\dagger , la inversa generalizada de Moore-Penrose de A , no es acotada y por lo tanto el problema es mal condicionado. Generalmente, X e Y son espacios de funciones definidas sobre algún conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

El método de la inversa aproximada se basa en la idea de que el cálculo de momentos de la solución es estable, es decir, en lugar de f se calcula una aproximación $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_\Omega$, donde

$m_\gamma(s, \cdot)$ es un molificador adecuado para cada $s \in X$ y γ es un cierto parámetro de regularización. De este modo se reducen las componentes de altas frecuencias en la solución, las cuales se ven afectadas principalmente por el ruido en los datos.

Resulta claro que $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_X$ no se puede calcular explícitamente debido a que f es desconocida. Para que este cálculo sea posible, la idea es aproximar m_γ por un elemento en el rango del operador adjunto A^* , es decir, determinar $\psi_\gamma^s \in Y$ tal que $m_\gamma(s, \cdot) \simeq A^*\psi_\gamma^s$. En particular, observar que si la ecuación

$$m_\gamma(s, \cdot) = A^*\psi_\gamma^s \quad (2)$$

tiene solución ψ_γ^s , entonces

$$\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_X = \langle f, A^*\psi_\gamma^s \rangle_X = \langle Af, \psi_\gamma^s \rangle_Y = \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_Y. \quad (3)$$

Si (2) no tiene solución, hallamos ψ_γ^s minimizando $\|A^*\psi_\gamma^s - m_\gamma(s, \cdot)\|$. Puede probarse¹ que esto es equivalente a resolver la ecuación normal

$$AA^*\psi_\gamma^s = Am_\gamma(s, \cdot). \quad (4)$$

En cualquier caso es necesario seleccionar el molificador adecuadamente de modo que esta ecuación tenga solución. Se puede lograr unicidad, por ejemplo, seleccionando la solución de mínima norma. Luego de obtener ψ_γ^s , aproximamos $\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_X$ por

$$\langle f, m_\gamma(s, \cdot) \rangle_X \simeq \langle f, A^*\psi_\gamma^s \rangle_X = \langle Af, \psi_\gamma^s \rangle_Y = \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_Y.$$

Siguiendo A. K. Louis,⁴ definimos entonces a continuación los conceptos de inversa aproximada y kernel de reconstrucción.

Definición 2.1 Sean m_γ un molificador dado y ψ_γ^s solución de (4). El operador $S_\gamma : Y \rightarrow X$ definido por

$$(S_\gamma g)(s) \doteq \langle g, \psi_\gamma^s \rangle_Y,$$

se denomina ***inversa aproximada del operador A asociada al molificador m_γ y ψ_γ^s se llama kernel de reconstrucción en el punto s .***

La utilización del método de la inversa aproximada presenta varias ventajas con respecto a los métodos de regularización tradicionales. En primer lugar, si bien la ecuación (2) es también mal condicionada (con el mismo grado de mal condicionamiento que el problema original), en este caso el dato es el molificador m_γ , el cual se elige en forma arbitraria y por lo tanto se conoce exactamente. En segundo lugar, la determinación del kernel de reconstrucción es independiente de g y por lo tanto puede ser calculado “a-priori”, antes de la medición de los datos. Además, la molificación de f reduce los efectos en las componentes de altas frecuencias producidos por ruido en el dato g . Finalmente el proceso de inversión consiste en resolver un producto escalar y, en caso de grandes dimensiones, este se puede obtener por procesamiento en paralelo.

Entre los molificadores más usuales mencionamos:

$$m_\gamma(x, y) = \frac{d}{\text{vol}(S^{d-1})\gamma^d} \chi_\gamma(x - y), \quad (5)$$

donde χ_γ es la función característica de la bola con centro en el origen y radio γ y $\text{vol}(S^{d-1})$ es la medida de la superficie de la bola unitaria en \mathbb{R}^d . La utilización de este molificador resulta en el cálculo de promedios locales de la solución.

El molificador

$$m_\gamma(x, y) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^d \text{sinc}(\gamma(x - y))$$

actúa como un filtro pasa-bajas, eliminando las altas frecuencias de la solución. También puede usarse un molificador de decaimiento rápido definido por el kernel Gaussiano

$$m_\gamma(x, y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \gamma^{-d} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2\gamma^2}\right). \quad (6)$$

Finalmente mencionamos el molificador lineal por tramos

$$m_\gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} - \frac{y-x}{\gamma^2}, & x \leq y \leq x + \gamma \\ \frac{1}{\gamma} + \frac{y-x}{\gamma^2}, & x - \gamma \leq y \leq x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (7)$$

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA INVERSA APROXIMADA A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS EN CONDUCCIÓN DE CALOR

Los problemas “directos” en conducción de calor son los problemas clásicos que consisten en calcular la evolución temporal ó la distribución espacial, en un cierto tiempo final prefijado, de la temperatura de un cuerpo dados los parámetros térmicos, la distribución inicial de la temperatura del mismo y las condiciones en la frontera. Es bien sabido que todos estos problemas, bajo condiciones bien generales, son bien condicionados en el sentido de Hadamard.

Planteamos a continuación dos problemas inversos asociados a estos problemas.

3.1. La ecuación del calor hacia atrás en el tiempo (BHE)

Por simplicidad, consideraremos sólo el caso unidimensional. El problema consiste en: sabiendo que $u(x, t)$ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0, \quad (8)$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet homogéneas:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

y dada la temperatura final en $t = T$

$$g(x) \doteq u(x, T), \quad x \in [0, \pi], \quad (10)$$

con $g(0) = g(\pi) = 0$, determinar la temperatura inicial

$$f(x) \doteq u(x, 0), \quad x \in [0, \pi]. \quad (11)$$

Usando la técnica usual de separación de variables se obtiene inmediatamente que la solución del problema directo (8), (9), (11) está dada por

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \text{sen}(nx) \int_0^{\pi} f(\tau) \text{sen}(n\tau) d\tau.$$

Luego, se deduce de (10) que

$$g(x) = \int_0^{\pi} k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (12)$$

donde

$$k(x, \tau) \doteq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \text{sen}(n\tau) \text{sen}(nx).$$

Definimos el operador integral

$$\begin{aligned} K : L^2[0, \pi] &\rightarrow L^2[0, \pi] \\ f(\cdot) &\rightarrow (Kf)(x) \doteq \int_0^{\pi} k(x, \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

se tiene entonces que el problema inverso consiste en resolver la ecuación integral de primera clase (12), es decir,

$$Kf = g. \quad (13)$$

Como $[0, \pi]$ es compacto y $k(x, \tau) \in L^2([0, \pi] \times [0, \pi])$ resulta que el operador K es compacto. Además, puesto que $k(x, \tau)$ es *no degenerado*, el problema inverso (13) es en efecto mal condicionado, a pesar de que K es inyectivo. Dado que K es, además, autoadjunto, el sistema singular asociado al operador K es

$$\left\{ \left(e^{-n^2 T}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx) \right), n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Sea $g_n \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} g(\tau) \text{sen}(n\tau) d\tau$ el n -ésimo coeficiente de Fourier generalizado del dato g . Según el criterio de Picard (ver Engl *et al*¹), el problema inverso tiene solución si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{(e^{-n^2 T})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |g_n|^2 < \infty. \quad (14)$$

En tal caso, la solución está dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 T} g_n \operatorname{sen}(nx). \quad (15)$$

De (14) y (15) se puede observar que este problema es severamente mal condicionado: existe una solución sólo para los datos g tales que sus coeficientes de Fourier $\{g_n\}$ tienden a cero más rápido que $e^{-n^2 T}$, es decir, para datos muy suaves. Por otra parte, un error en el n -ésimo coeficiente de Fourier de g es amplificado por un factor $e^{n^2 T}$. Así por ejemplo, si $T = 1$, un error del orden de 10^{-12} en el sexto coeficiente de Fourier del dato resultaría en un error del orden de 10^3 en el sexto coeficiente de Fourier de la solución. Aquí se ve claramente el fuerte mal condicionamiento del problema. No es válido pedir más de cuatro coeficientes de Fourier de la solución del problema inverso si se ha de concebir, como sucede siempre en la práctica, la existencia de errores en los datos, aunque éstos puedan en principio considerarse despreciables. Cualquier intento por resolver numéricamente este problema con métodos tradicionales resulta entonces infructuoso, aún en el hipotético caso en que g se conozca en forma exacta. Los errores introducidos por la necesidad de discretización y los errores numéricos de redondeo son suficientes para hacer inestable cualquier método clásico de aproximación.

Veremos a continuación cómo se resuelve este problema utilizando el método de la inversa aproximada. En primer lugar se debe hallar para cada punto $s \in [0, \pi]$ el kernel de reconstrucción $\psi_\gamma^s(\cdot)$ tal que $K^* \psi_\gamma^s(\cdot) = m_\gamma(s, \cdot)$, donde m_γ es el molificador elegido. Dado que en este caso el operador K es autoadjunto, resulta que el kernel de reconstrucción ψ_γ^s es solución de la ecuación $K \psi_\gamma^s(\cdot) = m_\gamma(s, \cdot)$. Es decir, tenemos un problema inverso similar al original, pero ahora con dato exacto. Usando (15) se obtiene que

$$\psi_\gamma^s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 T} m_{\gamma,n}^s \operatorname{sen}(nx), \quad (16)$$

donde $m_{\gamma,n}^s \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi m_\gamma(s, \tau) \operatorname{sen}(n\tau) d\tau$, es el n -ésimo coeficiente de Fourier del molificador $m_\gamma(s, \cdot)$. Por último, con el kernel de reconstrucción y el dato se calcula para cada $s \in [0, \pi]$ la solución molificada del problema inverso utilizando (3).

La aplicación del método de la inversa aproximada se puede entonces dividir en dos partes: primero, el cálculo del kernel de reconstrucción a partir del molificador elegido (lo cual se realiza “a-priori” de la medición del dato) y segundo, la inversión propiamente dicha a partir del dato, de la cual se obtiene una versión molificada de la solución o solución “regularizada” o “reconstruida”.

Resultados numéricos

Consideraremos N nodos o puntos de reconstrucción equidistantes en el intervalo $[0, \pi]$ a los que denotaremos con s_j , $j = 1, \dots, N$ y aproximaremos (16) con la suma finita $\psi_\gamma^s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^M e^{n^2 T} m_{\gamma,n}^s \operatorname{sen}(nx)$. En primer lugar presentaremos varios ejemplos en los que se

calcula una versión molificada de la temperatura inicial a partir del dato exacto. Luego, se obtendrán soluciones regularizadas a partir de datos perturbados con ruido. Supongamos además que se tienen mediciones del dato g en los nodos s_1, s_2, \dots, s_N . Los puntos de reconstrucción pueden no coincidir con los de medición. Mas aún, la cantidad de ambos puede no ser la misma.

A modo de ilustración consideraremos los siguientes perfiles de temperaturas iniciales $u(x, 0)$:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 3 - x, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in [2, 2.5] \\ \frac{x-\pi}{2.5-\pi}, & x \in (2.5, \pi] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x, & x \in [0, 1.5] \\ \frac{2,25(x-\pi)}{1.5-\pi}, & x \in (1.5, \pi]. \end{cases}$$

Para obtener datos artificiales del problema inverso se resolvió primero el problema directo con temperatura inicial f_1, f_2 o f_3 y tiempo final $T = 1$. En la Figura 1 se muestra la distribución de la temperatura para el perfil inicial f_2 .

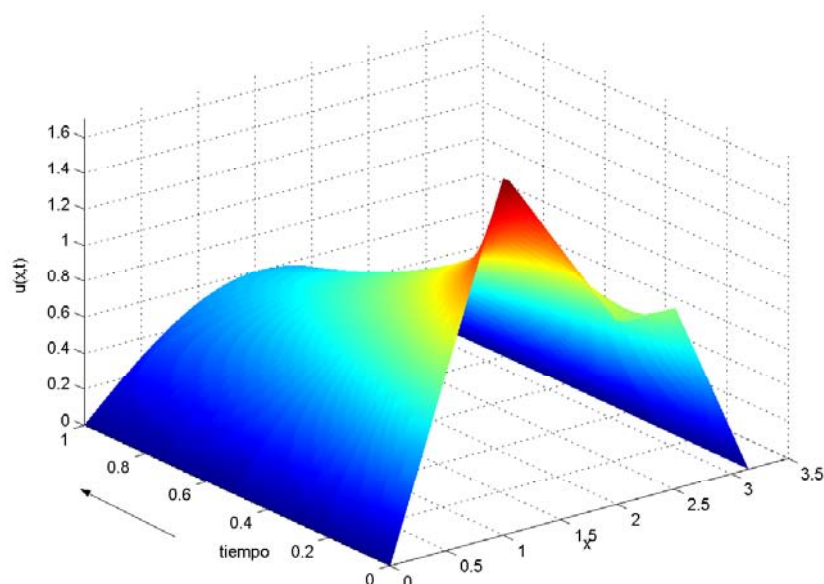


Figura 1: Evolución de la temperatura $u(x, t)$ con temperatura inicial f_2 .

Para aproximar la solución del problema inverso tomamos $N = 55$ puntos de reconstrucción y $M = 6$. Consideramos el molificador de promedios locales $m_\gamma(s_j, x)$ dado por (5),

cuyo enésimo coeficiente de Fourier generalizado es $m_{\gamma,n}^{s_j} = (\sqrt{2\pi} \gamma n)^{-1} [\cos(n(s_j - \gamma)) - \cos(n(s_j + \gamma))]$. La Figura 2 muestra el kernel de reconstrucción en el punto $s_{30} \approx 1,6872$ calculado a partir de (16) con $\gamma = 0,04$.

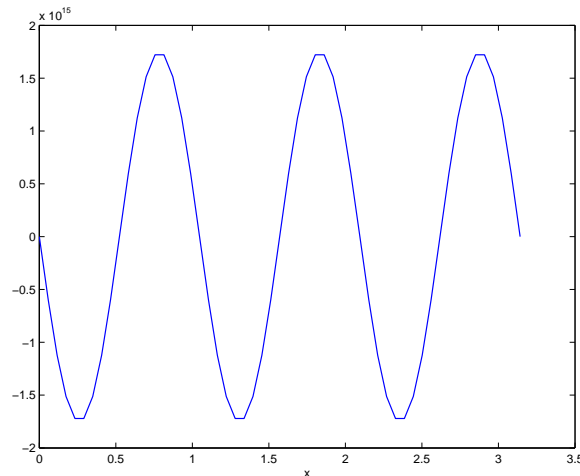


Figura 2: Kernel de reconstrucción $\psi_{\gamma}^{s_{30}}(x)$ con $\gamma = 0,04$.

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran las temperaturas iniciales f_1 , f_2 y f_3 con sus versiones modificadas obtenidas aplicando el método de la inversa aproximada a partir de cada uno de los correspondientes datos exactos (perfiles de temperatura en el tiempo $T = 1$), con parámetro γ igual a 0.04, 0.035 y 0.012, respectivamente. Se observa en estas gráficas que las reconstrucciones obtenidas son buenas aproximaciones de las soluciones exactas. El método de la inversa aproximada también resulta robusto ante la presencia de ruido. Para mostrar esto consideraremos datos perturbados de la forma

$$\tilde{g} = g + \epsilon,$$

donde ϵ es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y desviación estandar

$$\sigma = (k/100) \|g\|_{\infty}.$$

Aquí k es el porcentaje de ruido como función de $\|g\|_{\infty}$ que se adiciona al dato g para simular errores de medición. Las Figuras 6 y 7 muestran las temperaturas iniciales f_1 y f_2 y las reconstrucciones obtenidas a partir de datos con 5% de nivel de ruido ($k = 5$), $N = 35$, $M = 2$, $\gamma = 0,018$ y $T = 1$ en el primer caso, y $k = 3$, $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,042$ y $T = 1$ en el segundo. En ambos casos se utilizó el molificador de promedios locales (5).

Por último, analizamos otro ejemplo en el que la solución de (8), (9), (11) está dada por $u(x, t) = \text{sen } x \exp(-t)$, $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, T]$. Este ejemplo es bastante riguroso a los efectos de poner a prueba la eficacia del método, debido a que $u(x, \cdot)$ decae rápidamente a cero a medida que t crece. La temperatura inicial en este caso es $f(x) \doteq u(x, 0) = \text{sen } x$.

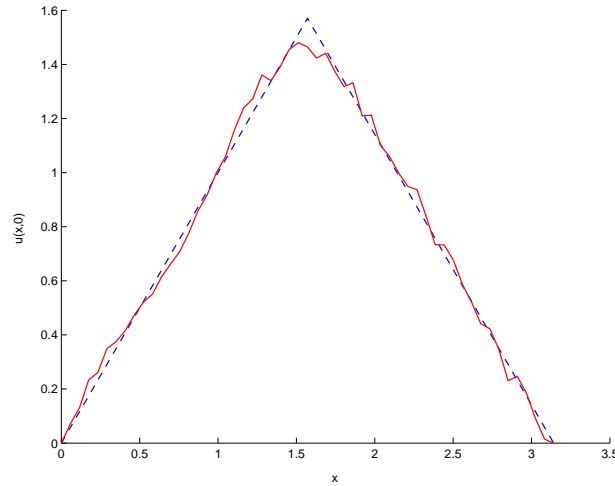


Figura 3: Solución exacta f_1 (- -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,04$.

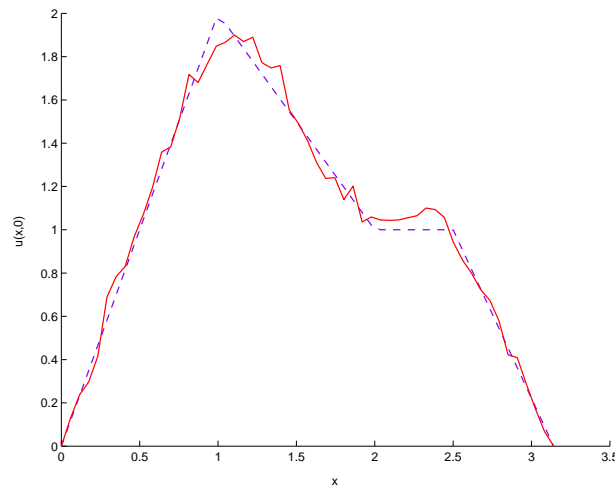


Figura 4: Solución exacta f_2 (- -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,035$.

Consideramos el molificador lineal por tramos $m_\gamma(s_j, x)$ dado por (7), cuyo enésimo coeficiente de Fourier generalizado puede probarse que es

$$m_{\gamma,n}^{s_j} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\gamma n)^2} [2 \operatorname{sen}(ns_j) - \operatorname{sen}(n(s_j - \gamma)) - \operatorname{sen}(n(s_j + \gamma))].$$

La Figura 8 muestra la temperatura inicial y la reconstruída a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,015$ y tiempo final $T = 11$. Observamos que a pesar de que la magnitud

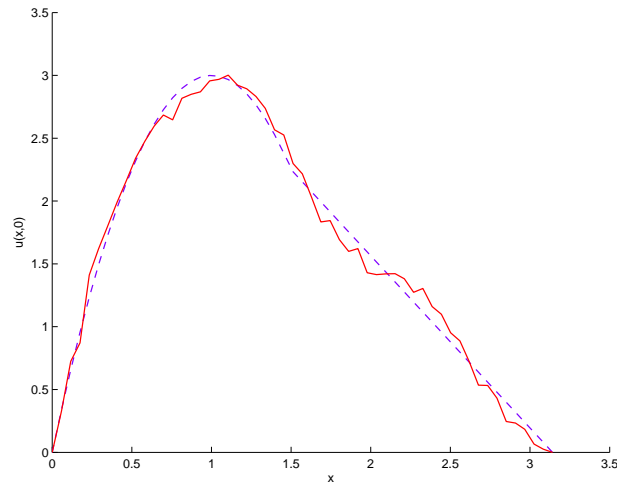


Figura 5: Solución exacta f_3 (- - -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 6$, $T = 1$ y $\gamma = 0,012$.

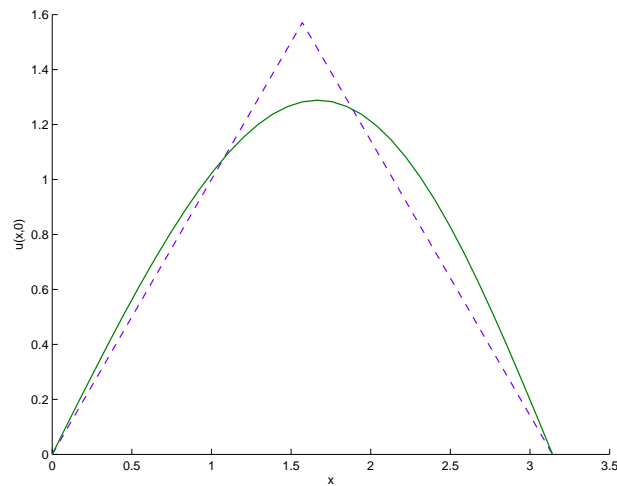


Figura 6: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato con un 5 % de nivel de ruido ($k = 5$), $N = 35$, $M = 2$, $\gamma = 0,018$ y $T = 1$.

del dato es del orden de $\mathbf{O}(10^{-5})$, lo cual es despreciable en comparación con la magnitud de la temperatura inicial que es $\mathbf{O}(1)$, el método permite hallar una muy buena aproximación de la temperatura inicial. En la Figura 9 se muestran la temperatura inicial y la reconstrucción que se obtuvo a partir de un dato con un 2 % de nivel de ruido ($k = 2$), $N = 65$, $M = 2$ y $\gamma = 0,005$ y $T = 2$, observándose, aún en estas condiciones, una aproximación razonablemente buena.

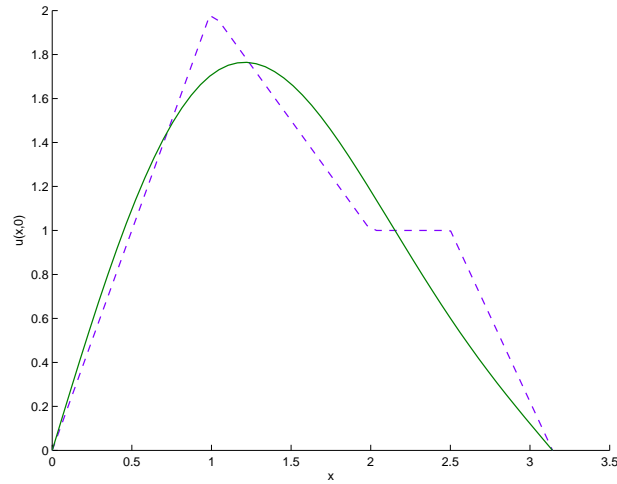


Figura 7: Solución exacta (- -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato con un 3 % de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,042$ y $T = 1$.

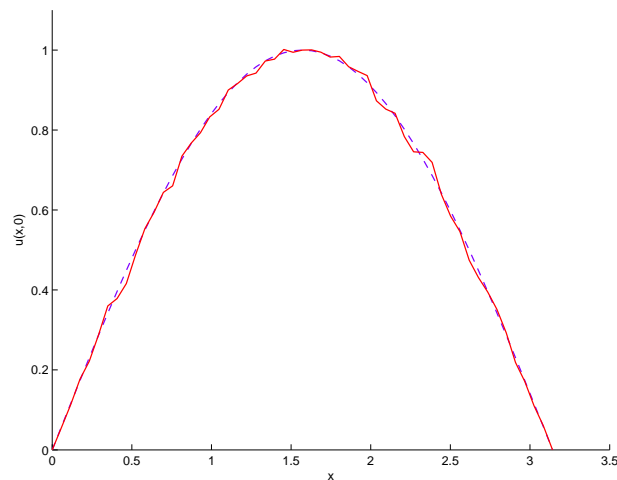


Figura 8: Solución exacta (- -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 55$, $M = 2$, $\gamma = 0,015$ y $T = 11$.

3.2. La ecuación del calor hacia un lado (SHE)

A continuación consideraremos el problema de determinar el flujo de calor en un extremo de una barra metálica a partir de mediciones de la temperatura ó del flujo en el otro extremo. Este problema es fuertemente mal condicionado: pequeñas perturbaciones en los datos pueden causar errores muy grandes en la solución (ver Engl *et al*¹ y D. N. Hào y H.-J. Reinhardt⁵).

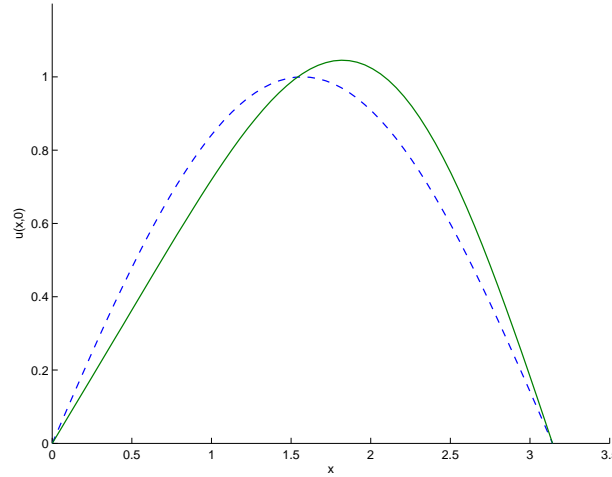


Figura 9: Solución exacta (- - -) y solución reconstruida (—) a partir de dato con un 2% de nivel de ruido ($k = 2$), $N = 65$, $M = 2$, $\gamma = 0,005$ y $T = 2$.

Siguiendo los resultados de P. Jonas y A. K. Louis,⁶ definimos

$$\begin{aligned} Q_T &\doteq (0, 1) \times (0, T) \\ H^{1,0}(Q_T) &\doteq \{u \in L^2(Q_T) : u_x \in L^2(Q_T)\} \\ H^{1,1}(Q_T) &\doteq \{u \in L^2(Q_T) : u_x \text{ y } u_t \in L^2(Q_T)\} \\ V^{1,0}(Q_T) &\doteq C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2((0, T); H^1(0, 1)) \end{aligned}$$

y consideramos el problema de valores iniciales y de frontera

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & (x, t) \in Q_T \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = f(t), & 0 < t \leq T \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x \leq 1 \end{array} \right. \quad (17)$$

donde $f \in L^2(0, T)$. Una solución débil de este problema es una función $u \in V^{1,0}(Q_T)$ que satisface

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u_x\eta_x) dx dt = \int_0^T u_x(1, t)\eta(1, t) dt$$

para cada $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$. D. N. Hào⁷ probó que si $f \in L^2(0, T)$, entonces existe una única solución débil del problema (17). Definimos ahora el operador $L : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ que mapea el flujo en el extremo derecho en la temperatura en el extremo izquierdo, es decir $L(f) = u|_{x=0}$ donde u es la única solución débil del problema (17). Entonces L está bien definido

porque u es única y el mapeo $H^{1,0}(Q_T) \rightarrow L^2(0, T)$ sobre la frontera es continuo. El problema inverso consiste en determinar el flujo de calor $f(t) = u_x(1, t)$ en el extremo derecho de la ecuación $Lf = g$, donde $g(t) \doteq u(0, t)$ es la temperatura conocida en el extremo izquierdo. Se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), & (x, t) \in Q_T \\ u(0, t) = g(t), & 0 < t \leq T \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & 0 < t \leq T. \end{cases}$$

La unicidad de la solución del problema inverso está probada en D. N. Hào y H.-J. Reinhardt.⁵

Para aplicar el método de la inversa aproximada necesitamos hallar para cada tiempo $t \in (0, T)$ el kernel de reconstrucción ψ_γ^t tal que

$$L^* \psi_\gamma^t(\cdot) = m_\gamma(t, \cdot), \quad (18)$$

donde m_γ es el molificador previamente elegido. Para ello definimos el problema adjunto:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t') = -\frac{\partial v}{\partial t'}(x, t'), & (x, t') \in Q_T \\ v(x, T) = 0, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, t') = 0, & 0 < t' \leq T \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t') = \tilde{f}(t'), & 0 < t' \leq T \end{cases} \quad (19)$$

donde $\tilde{f} \in L^2(0, T)$. Una solución débil del problema (19) es una función $v \in V^{1,0}(Q_T)$ que satisface

$$\int_{Q_T} (v\eta_t + v_x\eta_x) dx dt = \int_0^T v_x(0, t)\eta(0, t) dt$$

para cada $\eta \in H^{1,1}(Q_T)$. Si reemplazamos t' en (19) por $t = T - t'$ obtenemos el mismo problema que en (17). Luego, el operador $L^* : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$, dado por $L^*(\tilde{f}) = v|_{x=1}$ donde v es la solución débil del problema (19) está bien definido. Una consecuencia directa del Teorema 1.11.1 de D. N. Hào⁷ es que el operador L^* es el operador adjunto de L con respecto al producto interno en L^2 . Para aproximar de manera estable la solución f del problema inverso por los momentos $\langle f, m_\gamma(t, \cdot) \rangle$, resolvemos el problema adjunto con

$$L^* v_x(0, t, t') = m_\gamma(t, t') \quad (20)$$

donde $t \in (0, T)$ es el tiempo de reconstrucción. De (18) y (20), el kernel de reconstrucción en el tiempo t está dado por $\psi_\gamma^t(t') = \frac{\partial}{\partial x} v(0, t, t')$.

Puesto que el molificador m_γ se conoce exactamente es posible calcular la función $v_x(0, t, t')$ usando separación de variables o descomposición Adomiana.⁶ Así se obtiene que

$$\psi_\gamma^t(t') = \frac{\partial}{\partial x} v(0, t, t') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma^t(t')}{\partial t'^n}. \quad (21)$$

Por último, a partir del kernel y el dato se calcula la solución molificada del flujo en el extremo derecho utilizando (3).

Resultados numéricos

En forma similar a lo realizado para resolver la BHE, aplicaremos aquí el método de la inversa aproximada para obtener aproximaciones estables del flujo a derecha a partir de datos exactos en el extremo izquierdo en primer lugar y luego, a partir de datos con ruido. En este caso, utilizaremos el molificador Gaussiano (6) debido a que posee propiedades de invariancia que pueden utilizarse para reducir los esfuerzos computacionales.⁶ Si definimos $\Psi_\gamma(t') \doteq \psi_\gamma(0, t')$ se tiene que $\psi_\gamma(t, t') = \Psi_\gamma(t - t')$. Así, sólo es necesario calcular el kernel de reconstrucción en $t = 0$. Aproximaremos (21) con la suma finita

$$\psi_\gamma^t(t') = \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \frac{\partial^n m_\gamma^t(t')}{\partial t'^n}.$$

En la Figura 10 se muestra el kernel de reconstrucción calculado en $t = 0$ usando (21) con $M = 20$ y $\gamma = 0,02$. En L. Eldén⁸ se observa que es imposible reconstruir el flujo de calor en

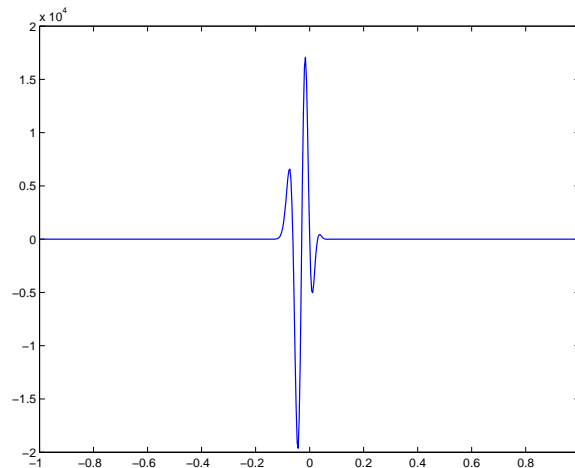


Figura 10: Kernel de reconstrucción en $t = 0$ con $\gamma = 0,02$.

$t = T$ a partir de datos conocidos solamente en $[0, T]$. P. Jonas y A. Louis⁶ sugieren trabajar con datos en el intervalo $[0, T + 5\gamma]$, donde γ es el parámetro de regularización. Consideramos

entonces N tiempos de reconstrucción en el intervalo $[0, T + 5\gamma]$ y los denotamos con t_j para $j = 1, \dots, N$. A modo de ejemplo tomamos como flujo en el extremo derecho

$$u_x(1, t) = f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0.1, 0.3] \cup [0.4, 0.6] \cup [0.7, 0.9] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este es otro buen ejemplo para poner a prueba la eficiencia del método de la inversa aproximada debido a que f no es continua en el intervalo $[0, 1]$, y por lo tanto para obtener una razonable aproximación con cualquier método clásico serían necesarias componentes de alta frecuencia, las que harían muy inestable el problema. El dato “artificial”, es decir, la temperatura $u(0, t)$, $0 \leq t \leq T$, se obtuvo resolviendo el problema directo con $T = 1$. En la Figura 11 se puede observar la evolución de la temperatura. En la Figura 12 se muestran el flujo a derecha

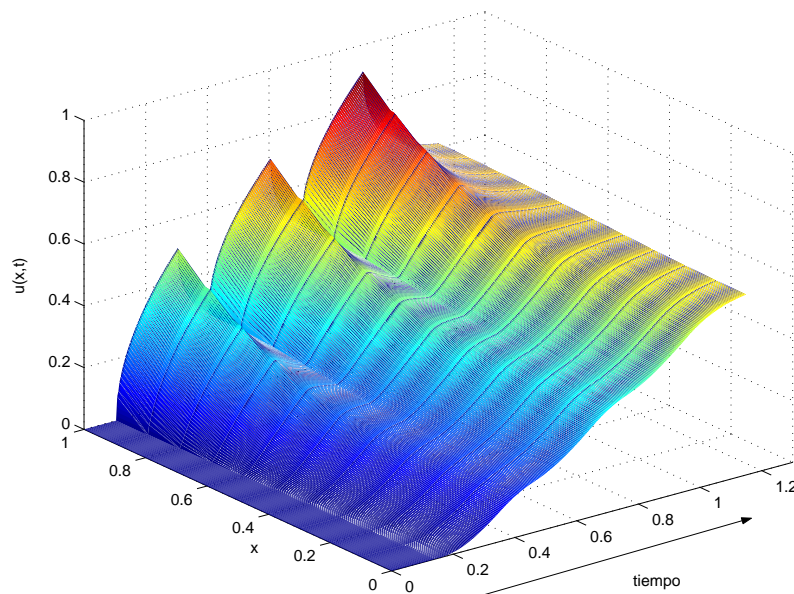


Figura 11: Evolución de la temperatura correspondiente al flujo a derecha $f(t)$.

$f(t)$ y el reconstruido a partir del dato exacto con $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,02$. Puede observarse que el método permite hallar una buena aproximación de f . Para analizar la robustez del método ante la presencia de ruido, se calcularon reconstrucciones del flujo a partir de datos a los que se les agregaron diferentes niveles de ruido. En las Figuras 13 y 14 se muestran las versiones molificadas del flujo obtenidas a partir de datos con un 1% de nivel de ruido ($k = 1$), $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,04$ en el primer caso y $k = 3$, $N = 400$, $M = 20$ y $\gamma = 0,045$, en el segundo, mientras que para la reconstrucción que muestra la Figura 15 se consideró un ruido de baja magnitud y alta frecuencia $r(t) = 5 \times 10^{-3} \text{sen}(100t)$. Como es de esperar, al aumentar el nivel de ruido en el dato, se obtiene una aproximación menos exacta, aunque aún en este caso

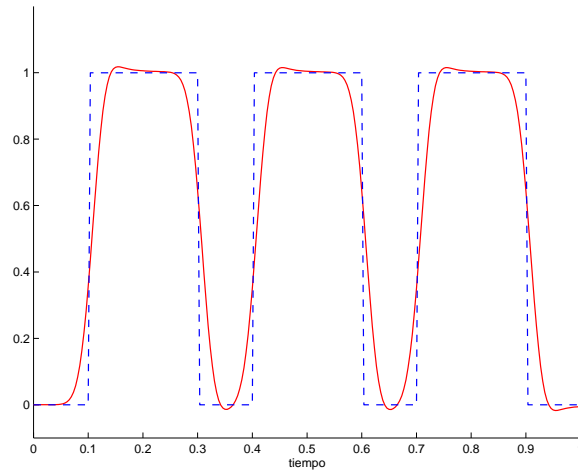


Figura 12: Solución exacta (- -) y solución reconstruída (—) a partir del dato exacto con $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,02$.

la aproximación sigue siendo estable y el método es capaz de proveer una razonable cantidad de información sobre la solución. Es oportuno mencionar aquí que un ruido de esta naturaleza haría fuertemente inestable cualquier método clásico de aproximación.

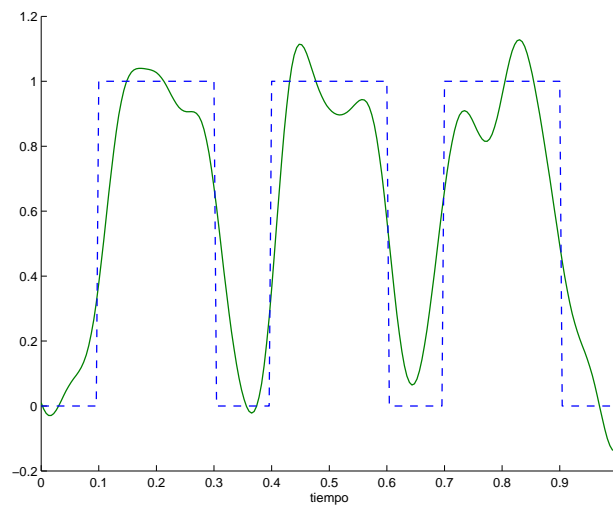


Figura 13: Solución exacta (- -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato con un 1% de nivel de ruido ($k = 1$), $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,04$.

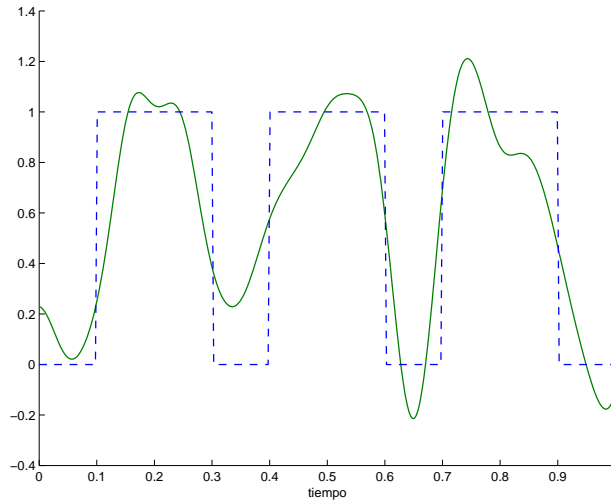


Figura 14: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato con un 3 % de nivel de ruido ($k = 3$), $N = 400$, $M = 20$ y $\gamma = 0,045$.

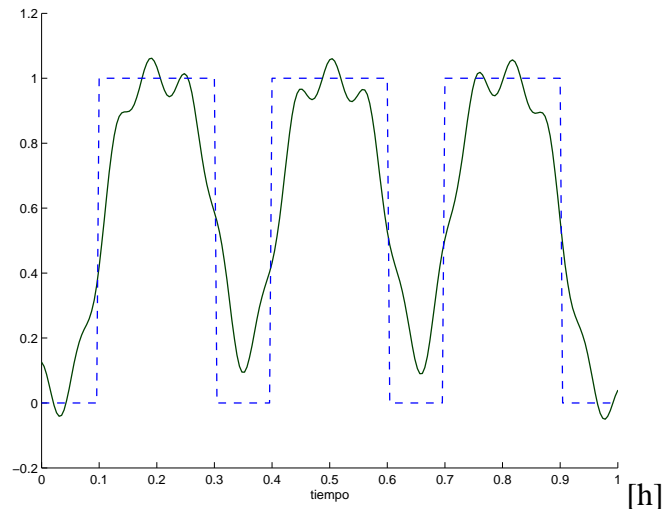


Figura 15: Solución exacta (- - -) y solución reconstruída (—) a partir de un dato con ruido $0,005 \sin(100t)$, $N = 300$, $M = 20$ y $\gamma = 0,035$.

4. CONCLUSIONES

Se introdujo el método de la inversa aproximada para regularizar problemas inversos mal condicionados y se analizó su aplicación en dos tipos de problemas en conducción del calor. Los resultados numéricos obtenidos permiten afirmar que el método de la inversa aproximada es una técnica numérica eficiente para regularizar los problemas inversos mal condicionados planteados en este trabajo: BHE y SHE. Se obtuvieron buenas aproximaciones de las soluciones,

ya sea que el método se aplique a partir de datos exactos como de datos con distintos niveles de ruido.

Desde el punto de vista computacional su implementación es sencilla y rápida. La principal ventaja radica en que dado el molificador, el cálculo del kernel de reconstrucción se puede realizar antes de la medición de los datos, lo cual permite utilizarlo en la reconstrucción de soluciones correspondientes a diferentes datos. Asimismo, la inversa aproximada consiste en un producto interno cuyo cálculo es apropiado para procesamiento en paralelo en casos de grandes dimensiones.

REFERENCIAS

- [1] H. W. Engl, M. Hanke y A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] A. K. Louis y P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, *Inverse Problems*, **6**, 427-440, 1990.
- [3] A. K. Louis, *Application of the Approximate Inverse to 3D X-Ray CT and Ultrasound Tomography*, *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, Wien: Springer, 1997.
- [4] A. K. Louis, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, *Inverse Problems*, **12**, 175-190, 1996.
- [5] D. N. Hào y H.-J. Reinhardt, *Recent contributions to linear inverse heat conduction problems*, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, **4**, 23-32, 1996.
- [6] P. Jonas y A. K. Louis, *Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem*, *Inverse Problems*, **16**, 175-185, 2000.
- [7] D. N. Hào, *Methods for inverse heat conduction methods*, *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik* (Frankfurt/Main: Peter Lang), 1998.
- [8] L. Eldén *The numerical solution of a non-characteristic Cauchy problem for a parabolic equation* *Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential Equations and Integral Equations*, ed P. Deufelhardt y E. Hairer (Cambridge, MA: Birkhäuser Boston), 1983.