

SIMULACION NUMERICA DEL PROBLEMA DE LA ESTRICCION DE UNA PROBETA CILINDRICO CIRCULAR. SENSIBILIDAD DE LOS RESULTADOS FRENTE A LA MALLA DE ELEMENTOS FINITOS

Carlos García Garino*, Felipe Gabaldón†
José María Goicolea† & Anibal Mirasso**

*LAPIC, Carrera Redes y Telecomunicaciones, ITU,
Universidad Nacional de Cuyo & CONICET
Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina
e-mail: cgarcia@pascal.uncu.edu.ar

†Departamento de Mecánica, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,
Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, España
e-mail: felipe@filemon.mecanica.upm.es, goicolea@filemon.mecanica.upm.es

**LAPIC, IMPSA & Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
e-mail mirasso@impsa.com.ar

Key Words: Necking, Sensibilidad, Elementos Finitos, Plasticidad, Grandes Deformaciones.

Abstract. *El problema de la estricción de una barra cilíndrica circular sometida a tracción simple se ha utilizado principalmente en la literatura para validar modelos constitutivos con grandes deformaciones, con énfasis en resultados globales. En trabajos previos los autores han estudiado el problema con el fin de analizar la simulación de deformaciones y tensiones y estudiar la factibilidad de calibrar ecuaciones constitutivas. Posteriormente analizaron la sensibilidad de los resultados frente a imperfecciones geométricas. En ambos casos se obtuvieron resultados muy promisorios. En este trabajo se estudia la sensibilidad de los resultados frente a la malla de elementos finitos, para lo cual realizan estudios numéricos con un rango de mallas de elementos finitos que van desde los 50 a los 1600 elementos, las cuales constituyen una secuencia minimizante. Los resultados obtenidos se muestran poco sensibles al tamaño de la malla tanto para los elementos mixtos Q1/P0 cuanto para la familia de elementos con deformaciones mejoradas. Los resultados experimentales se capturan correctamente incluso para las mallas menos refinadas.*

1 INTRODUCCION

La simulación numérica del problema de la estricción de una barra cilíndrica circular sometida a tracción simple ha sido estudiado por diferentes autores en forma experimental y numérica y también se conocen algunos resultados analíticos que describen la distribución de tensiones en la zona del cuello.

Los primeros trabajos acerca del problema, basados en experimentos, se deben a Bridgman¹ y a Davidenkov y Spiridinova,² trabajos a partir de los cuales dichos autores propusieron los resultados analíticos que se resumen en este trabajo.

Entre los primeros trabajos numéricos pueden citarse a Chen³ y Needleman.⁴ Posteriormente Norris et al.⁵ presentaron resultados experimentales para una probeta de acero y la correspondiente simulación numérica. Goicolea⁶ avanzó en esta dirección comparando resultados experimentales obtenidos mediante probetas de aluminio con resultados numéricos.

En la literatura se ha empleado el problema para validar códigos de elementos finitos con grandes deformaciones y, entre otros autores, Simo⁷ y Ponthot⁸ han presentado estudios numéricos del problema comparando la variación de resultados frente a distintas mallas, empleando el bien conocido elemento mixto $Q1/P0$ con campos de desplazamientos lineales y presión constante,⁹ para lo cual presentaron resultados globales.

Los autores han profundizado los estudios citados al analizar las capacidades de diferentes códigos no lineales con efectos de grandes deformaciones elastoplásticas, tanto académicos como comerciales, para modelar deformaciones y tensiones en la zona del cuello,^{10,11} capturando correctamente los resultados experimentales disponibles. En este sentido la herramienta numérica se torna valiosa para caracterizar ecuaciones constitutivas.

Posteriormente García Garino y coautores¹²⁻¹⁴ estudiaron la sensibilidad del problema frente a imperfecciones geométricas en la zona del cuello confirmando que las mismas afectan notablemente la respuesta *global* de la barra, resultado obtenido previamente por Simo y Ponthot (op. cit.). Sin embargo se obtuvo un resultado promisorio desde el punto de vista de la caracterización de materiales cual es que la ecuación constitutiva parece ser insensitiva frente a las imperfecciones,^{13,14} a partir del cual se ha iniciado un proyecto de investigación¹⁵ para confirmar experimentalmente los resultados obtenidos.

Este trabajo presenta un estudio de sensibilidad de los resultados del problema, frente a una secuencia minimizante de mallas de elementos finitos que cubren un rango desde los 50 hasta los 1600 elementos.

Para obtener los resultados numéricos que se presentan en este trabajo se ha utilizado el código SOGDE,¹⁶ con capacidad para modelar problemas de elastoplasticidad con grandes deformaciones, que posteriormente fue extendido por Gabaldón¹⁷ para incluir elementos con deformaciones aumentadas^{18,19}

2 CARACTERÍSTICAS DEL ENSAYO DE TRACCIÓN SIMPLE EN PRESENCIA DE GRANDES DEFORMACIONES

En este punto se describen las características distintivas del problema, se muestran resultados experimentales debidos a Goicolea,⁶ y se discute la distribución de tensiones en la zona del cuello, para lo cual se muestran los resultados analíticos disponibles.^{1,2}

2.1 Descripción del Problema

La respuesta del ensayo puede estudiarse en función de la carga P y la deformación logarítmica ε , las cuales se miden con relativa facilidad durante el ensayo.

Durante la evolución del proceso pueden identificarse dos etapas bien marcadas: la trayectoria precrítica que muestra un comportamiento homogéneo hasta que se alcanza la carga máxima, la cual es seguida por la respuesta poscrítica. Para el primer caso (precrítico) es suficiente tener en cuenta valores promedios ya que la respuesta es homogénea, luego la deformación logarítmica ε_{zz} y la tensión longitudinal promedio $\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$ describen adecuadamente el problema:

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}; \quad \varepsilon_{zz} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (1)$$

donde P es la carga medida en la máquina de ensayo a lo largo del mismo, l y l_0 son las longitudes original y deformada, respectivamente, A es el área deformada que se puede medir a partir del radio deformado r , el cual se puede medir con un calibre.

Durante la trayectoria poscrítica se puede observar una marcada estricción en la zona central, en la cual se verifica un estado triaxial de tensiones, y las variables definidas en la ec. (1) ya no son suficientes para modelar el problema.

2.2 Estudios Experimentales

A partir de resultados experimentales debidos a Bridgman¹ y Davidenkov y Spiridinova² se han observado las siguientes características en la zona del cuello para la etapa poscrítica:

- Las deformaciones radiales permanecen constantes a lo largo del radio en la zona del cuello^{1,2}
- El flujo plástico sigue la regla de Von Mises.
- En la zona del cuello se satisfacen las condiciones de simetría cilíndrica, así como respecto al plano rz.

La constancia de las deformaciones radiales a lo largo del cuello es una de las características distintiva del problema. Bridgman había postulado este comportamiento, el cual fue demostrado por Davidenkov y Spiridinova² en base a estudios metalográficos

(medida del tamaño del grano) y fue confirmado luego por Goicolea⁶ mediante estudios de microdureza.

Es importante destacar que estos resultados en general no se han explotado en la literatura para calibrar códigos y modelos constitutivos. En la figura 1 se muestra una probeta de aluminio luego de la rotura, ensayada por Goicolea,⁶ en base a la cual los autores han calibrado el problema.



Figure 1: *Estado de las probetas de aluminio después del ensayo de tracción simple*

2.3 Resultados Analíticos

A partir de los resultados experimentales presentados en el apartado anterior Bridgman¹ y Davidenkov y Spiridinova² propusieron expresiones analíticas para la zona del cuello, válidas para el régimen poscrítico, las cuales se resumen a continuación:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{zz} = -2 \ln \frac{D}{D_0} \quad (2)$$

De la aplicación del criterio de fluencia de Von Mises Y surge:

$$Y = \sigma_{zz} - \sigma_{rr} \quad (3)$$

La tensión de fluencia Y es constante en la dirección radial en la zona del cuello, ya que depende solamente de la deformación plástica efectiva ε_p que, como surge de la ec.

(2), es constante, hecho tampoco ha sido discutido en la mecánica computacional. La tensión longitudinal σ_{zz} puede reescribirse como:

$$\sigma_{zz} = Y + \sigma_{rr} \quad (4)$$

La tensión radial σ_{rr} es nula en correspondencia con el radio exterior de la barra y máxima en el eje de la misma, consecuentemente la tensión radial promedio $\bar{\sigma}_{rr}$ es mayor que cero, y calculando el promedio de la ec. (4) surge:

$$\bar{\sigma}_{zz} = Y + \bar{\sigma}_{rr} > Y \quad (5)$$

que la tensión de fluencia Y difiere considerablemente de la tensión longitudinal promedio $\bar{\sigma}_{zz}$ en presencia de grandes deformaciones (regimen poscrítico), como se muestra en la ec. (5), y puede observarse en la fig. 2, obtenida experimentalmente por Goicolea.⁶

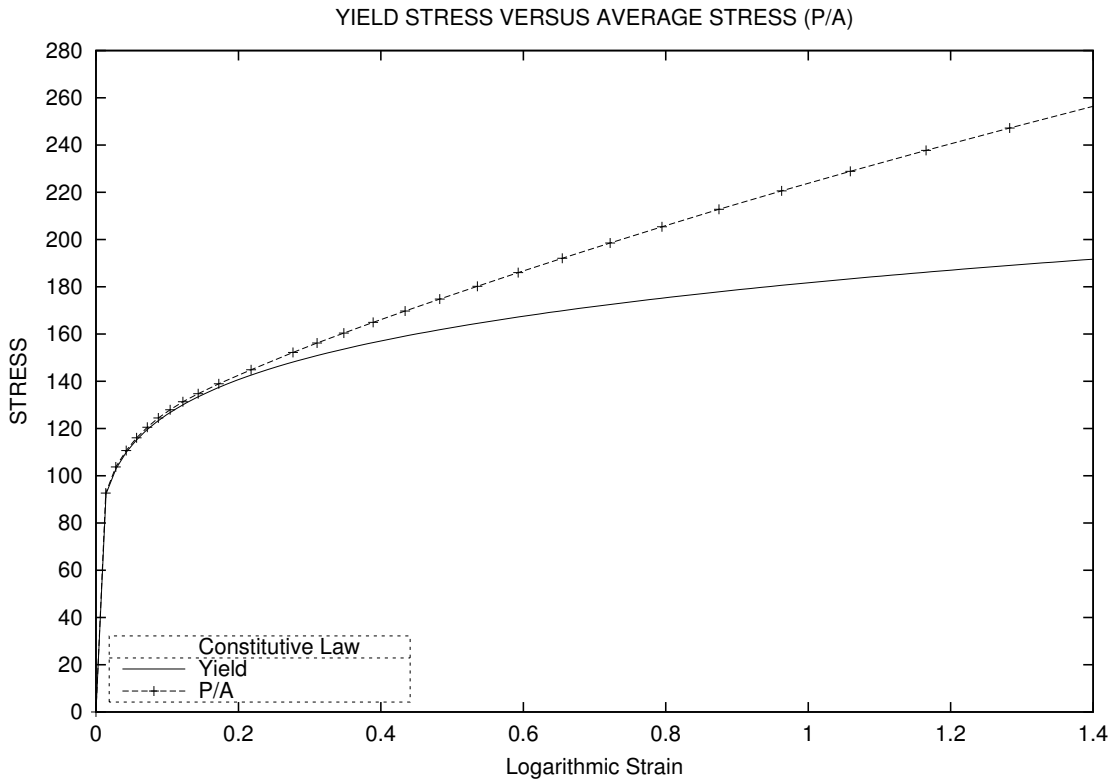


Figure 2: $\bar{\sigma}_{zz}$ and Y evolution

Una consecuencia inmediata de este resultado es que los valores de $\bar{\sigma}_{zz}$ medidos en el ensayo no se pueden emplear directamente para calibrar la ecuación constitutiva e identificar los parámetros del material. Con el fin de superar este inconveniente Wilkins²⁰

propuso un esquema iterativo que fue utilizado, entre otros, por Norries et al.⁵ Con el fin de evitar este proceso que en general es tedioso e implica procesar problema varias veces de manera numérica, Goicolea⁶ utilizó el factor correctivo propuesto por Bridgman:¹

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0.1}}\right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_{zz} - 0.1}}{2}\right) \quad (\varepsilon_{zz} > 0.1) \quad (6)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = 1 \quad (\varepsilon_{zz} \leq 0.1) \quad (7)$$

Del estudio realizado surge que la deformación plástica efectiva y la deformación longitudinal $\varepsilon_p = \varepsilon_{zz}$ solo dependen de la relación $\frac{D}{D_0}$. Lo mismo sucede con la tensión de fluencia Y y el factor correctivo. Como el área deformada A también es función de D surge que la carga P también depende de la relación $\frac{D}{D_0}$, hipótesis propuesta por los autores¹⁴ y que puede resumirse en la siguiente pregunta:

$$P = P\left(\frac{D}{D_0}\right)? \quad (8)$$

En los ensayos experimentales suele imponerse una pequeña imperfección en el centro de la probeta con el fin de garantizar la concentración de deformaciones en dicha zona. Un punto que surge inmediatamente es el de la sensibilidad de los resultados frente a dicha imperfección y que ha sido estudiado por los autores.^{11,13,14}

3 SENSIBILIDAD DE LOS RESULTADOS FRENTE A LA MALLA DE ELEMENTOS FINITOS

En esta sección se discute la sensibilidad de los resultados numéricos obtenidos frente a la malla de elementos finitos utilizada. Para ello se emplean mallas de 50, 100, 200, 400, 800 y 1600 elementos, como se muestra en la figura 3, las cuales se han procesado con el elemento finito mixto de presión constante $Q1/P0$, dado que su uso es clásico en el estudio de este problema.^{6-8,10,11} También se comentan resultados obtenidos por Gabaldón¹⁷ mediante el uso de los elementos mejorados $Q1/E5$, $Q1/ES5$ y $Q1/ET5$, cuyos resultados están detallados en un informe interno de los autores¹⁵ que serán publicados próximamente.²¹ Las diferentes mallas de elementos finitos conforman una secuencia de refinamiento con el fin de alcanzar una convergencia monótona de los resultados.

En la literatura se han publicado otros estudios de sensibilidad de este problema,^{7,8} y en dichos trabajos se ha hecho énfasis en la comparación de variables globales. La contribución de este trabajo frente a los resultados disponibles en la literatura es la comparación y estudio de sensibilidad de tensiones y deformaciones en la zona del cuello, las cuales, a la luz de los resultados analíticos disponibles para la zona del cuello, juegan un rol fundamental en la simulación del problema.

Con el fin de analizar la sensibilidad de los resultados frente a las diferentes mallas, se ha considerado que importante estudiar las siguientes variables:

- Evolución de la estricción.
- Evolución de la carga aplicada.
- Evolución de la tensión longitudinal media en función de la deformación logarítmica.

Para cada una de estas variables, se han realizado las siguientes comparaciones:

1. Para cada elemento, los resultados obtenidos con todas las mallas
2. Para la malla de 200 elementos, los resultados obtenidos con todos los elementos

El primer estudio permite extraer conclusiones sobre la influencia del tamaño de la malla en los resultados, y el segundo caso permite comparar las prestaciones de las distintos elementos. Asimismo, se comparan los resultados obtenidos con los curvas experimentales disponibles.⁶

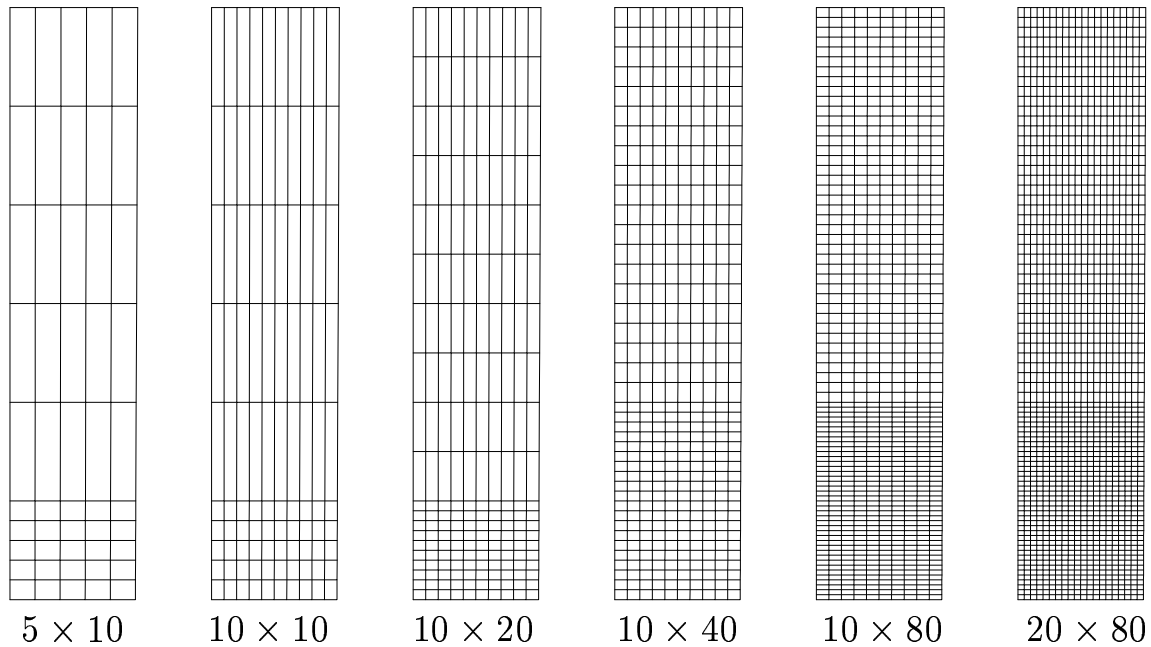


Figure 3: *Mallas utilizadas en el estudio de sensibilidad*

3.1 Sensibilidad de la Estricción

En todas las mallas, y con todos los elementos, se captura la formación del cuello. En la figura 4 se muestran las deformadas obtenidas para la malla de 50 elementos, procesada con el elemento de presión constante y con el elemento mejorado Q1/ET5. Como puede observarse en la misma, en ambos casos se captura adecuadamente la estricción característica del problema.

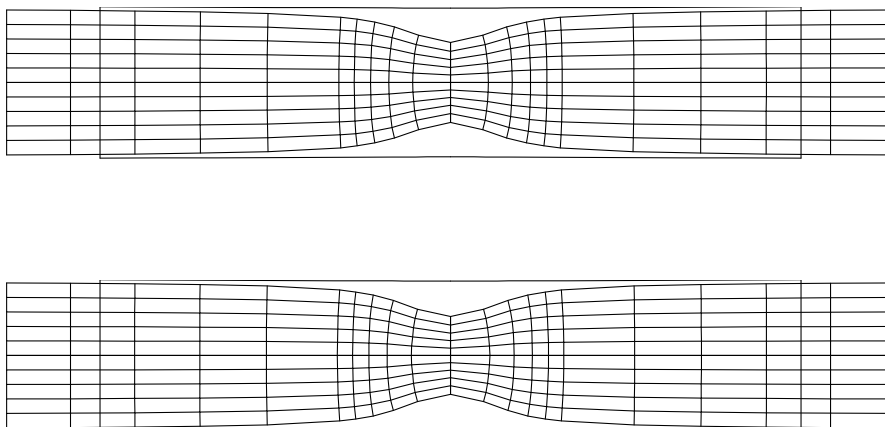


Figure 4: *Deformadas de las mallas de 50 elementos. La figura superior corresponde al elemento Q1/P0 y la inferior al elemento Q1/ET5*

Las figuras 5 y 6 permiten comparar la influencia de la malla en los resultados obtenidos para cada uno de los elementos estudiados. La conclusión principal es que para todos los elementos, la malla de 200 elementos captura correctamente la evolución de la estricción y los resultados que se obtienen con las mallas más finas son muy similares.

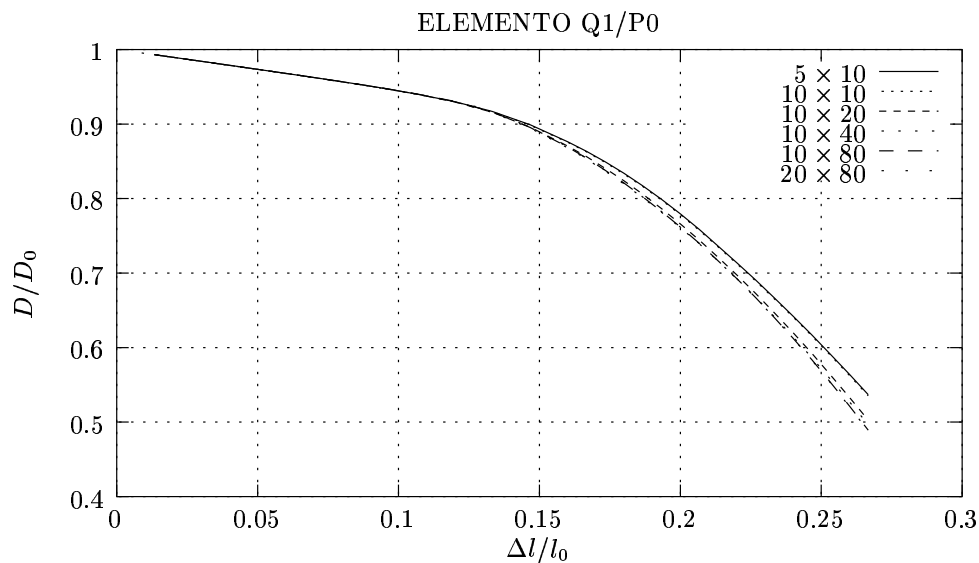


Figure 5: *Evolución de la estricción. Elementos Q1/P0*

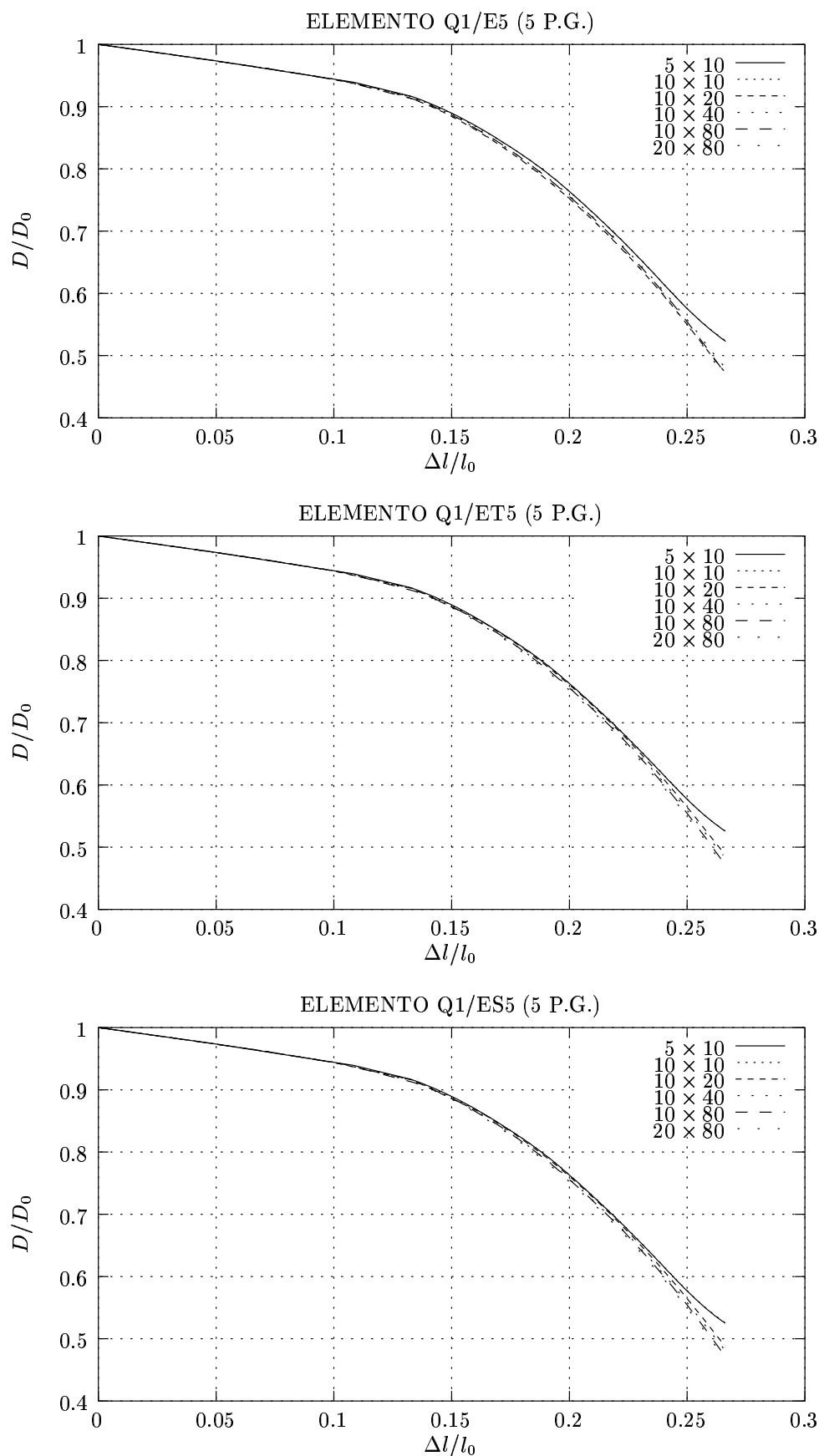


Figure 6: Evolución de la estricción. Elementos Q1/E5, Q1/ET5 y Q1/ES5

	5×10	10×10	10×20	10×40	10×80	20×80
Q1/P0	0.54	0.54	0.50	0.50	0.49	0.49
Q1/E5 (5 P.G)	0.52	0.52	0.48	0.48	0.48	0.47
Q1/E5 (9 P.G)	0.52	0.52	0.47	0.48	0.48	0.48
Q1/ES5 (5 P.G)	0.52	0.53	0.49	0.48	0.48	0.47
Q1/ES5 (9 P.G)	0.53	0.53	0.50	0.49	0.47	0.48
Q1/ET5 (5 P.G)	0.53	0.53	0.49	0.49	0.48	0.47
Q1/ET5 (9 P.G)	0.52	0.53	0.49	0.50	0.47	0.48

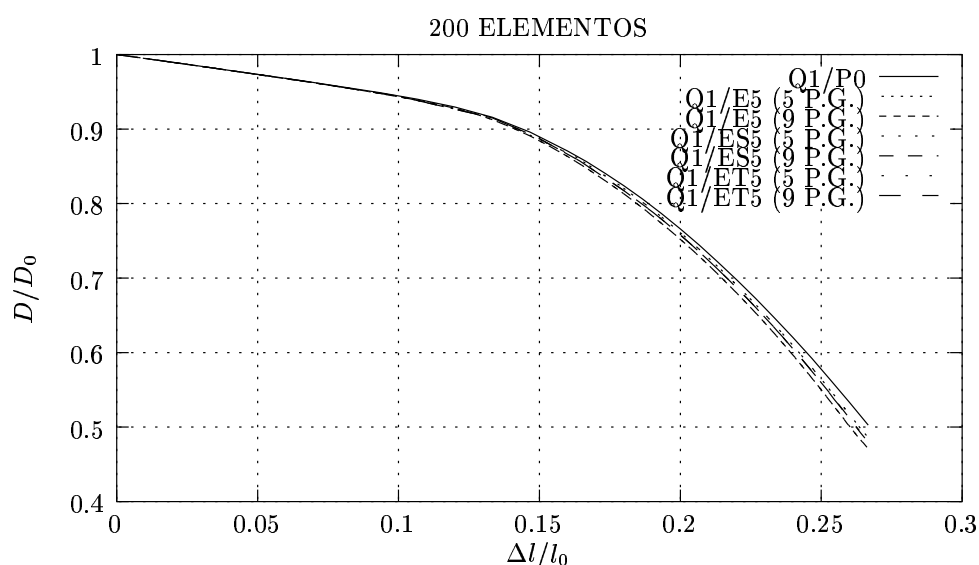
 Table 1: Valores de D/D_0 al final del análisis


Figure 7: Evolución de la Estricción para los distintos elementos. Malla de 200 elementos

Con el fin de cuantificar las ligeras diferencias que se observan en los gráficos de las figuras 5 y 6, en la tabla 1 se muestra el valor de D/D_0 al final del análisis, para cada uno de los elementos y mallas empleadas.

Aunque no es el propósito principal de este trabajo, en la figura 7 se compararan, para la malla de 200 elementos, los resultados obtenidos para cada uno de los elementos empleados. Como se observa en la misma, los resultados obtenidos son muy semejantes, aunque en todos los casos el elemento de presión constante alcanza una estricción ligeramente inferior a la obtenida con los elementos mejorados. También cabe destacar que el valor de la estricción es prácticamente el mismo con independencia del orden de la cuadratura con que se integran los elementos mejorados.

3.2 Evolución de la Tensión longitudinal media $\bar{\sigma}_{zz}$

En este punto se compara la evolución de la tensión longitudinal $\bar{\sigma}_{zz}$ en función de la deformación logarítmica ε_{zz} , para cada una de las mallas mostradas en la figura 3. Como puede observarse en la figura 8, los resultados numéricos ajustan correctamente con los resultados experimentales debidos a Goicolea.⁶ En dicha figura se muestra la curva obtenida en forma numérica con la malla de 50 elementos.

Las figuras 9 y 10 permiten comparar la evolución de la tensión longitudinal promedio en función de la malla utilizada para la simulación para cada uno de los elementos estudiados. Para el elemento de presión constante se obtienen idénticos resultados con las mallas de 50 y 100 elementos, y resultados muy similares entre sí con las restantes mallas. Los resultados obtenidos con las mallas de 50 y 100 elementos son sensiblemente más rígidos que los calculados con mallas más finas. Para el caso de los elementos mejorados se obtienen resultados similares para las mallas de 50 y 100 elementos, las de 200 y 400 elementos, y las de 800 y 1600 elementos, respectivamente. Para estos elementos es más notable la flexibilización de los resultados a medida que se va refinando la malla en contraste con el elemento Q1/P0, que es menos sensible a la malla.

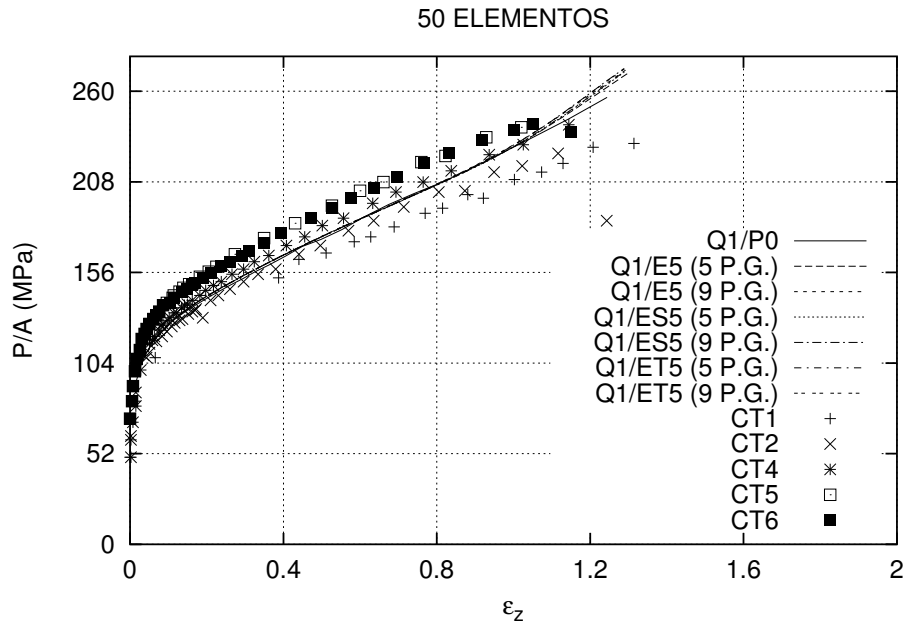


Figure 8: Resultados $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$ con la malla de 5×10 elementos. Comparación con los resultados experimentales

Finalmente en la tabla 3 se comparan los resultados numéricos obtenidos en este trabajo con los experimentales debidos a Goicolea.⁶ Para ello se muestran los valores de $\bar{\sigma}_{zz}$ en MPa calculados por elementos finitos, cuando la deformación logarítmica axial en el cuello es $\varepsilon_{zz} = 0.9$. El valor experimental de referencia es $\sigma_{zz} = 213 \pm 15$ MPa.

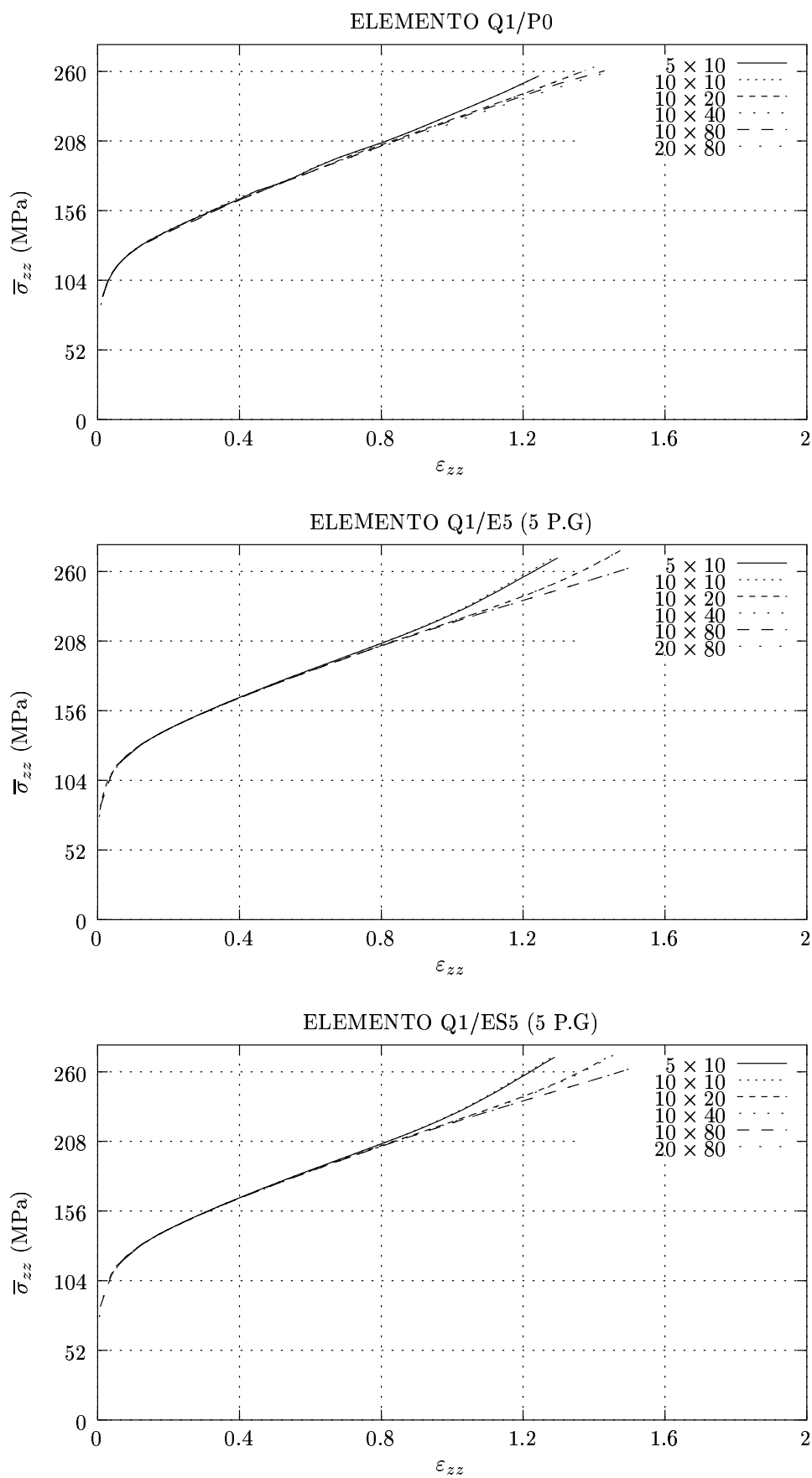


Figure 9: Curvas $\bar{\sigma}_z - \epsilon_z$. Elementos P0, E5 y ES5

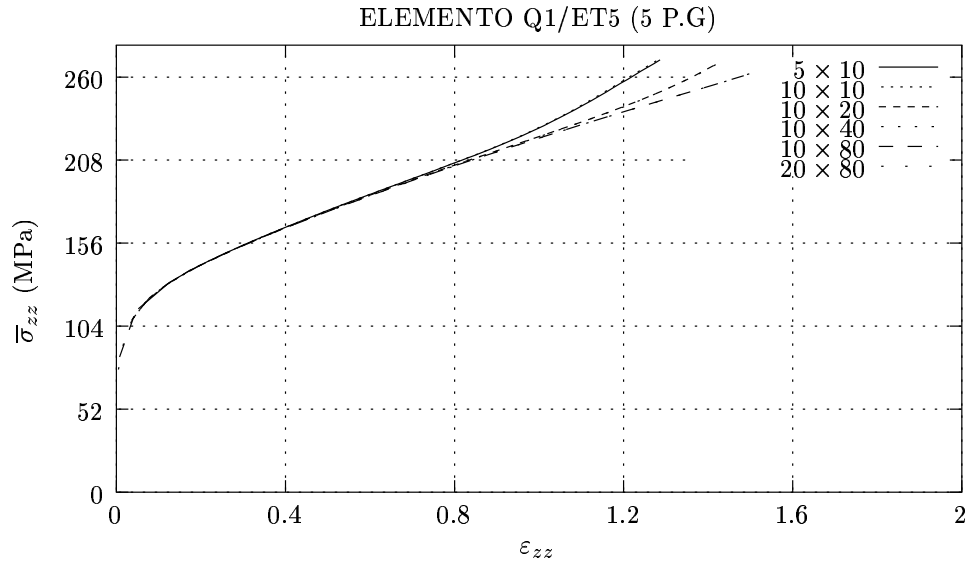


Figure 10: Curva $\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$. Elemento ET5

	5 × 10	10 × 10	10 × 20	10 × 40	10 × 80	20 × 80
Q1/P0	216.9	216.9	214.8	214.1	213.9	212.5
Q1/E5 (5 P.G)	216.6	216.9	213.7	213.8	213.2	213.2
Q1/E5 (9 P.G)	217.3	217.2	213.7	213.6	213.2	213.2
Q1/ES5 (5 P.G)	216.5	216.7	213.8	213.5	213.2	213.2
Q1/ES5 (9 P.G)	217.1	217.0	213.9	213.8	213.3	213.2
Q1/ET5 (5 P.G)	216.5	216.7	213.8	213.7	213.2	213.2
Q1/ET5 (9 P.G)	217.1	217.0	213.8	213.7	213.3	213.2

Table 2: Valores calculados de la tensión axial media (MPa) para $\varepsilon_{zz} = 0.9$. Valor experimental de referencia: $\sigma_z = 213 \pm 15$ MPa

Nuevamente se muestran, para la malla de 200 elementos, las respuestas que se obtienen para los diferentes elementos utilizados en este trabajo. Como surge de la figura 11 en todos los casos se obtiene prácticamente la misma respuesta. Con los elementos los elementos EAS, las curvas alcanzan puntos de mayor deformación logarítmica, resultado que esta de acuerdo con la tabla 2, que muestra que el diámetro final que se obtiene con estos elementos es ligeramente inferior al calculado con el Q1/P0.

3.3 Evolución de la Carga axial P en función de la deformación ε_{zz}

También en este caso los resultados experimentales se ajustan correctamente a los numéricos incluso para la malla menos densa (50 elementos), como se muestra en la figura 12.

La figuras 13 y 14 muestran la influencia del tamaño de la malla en el comportamiento

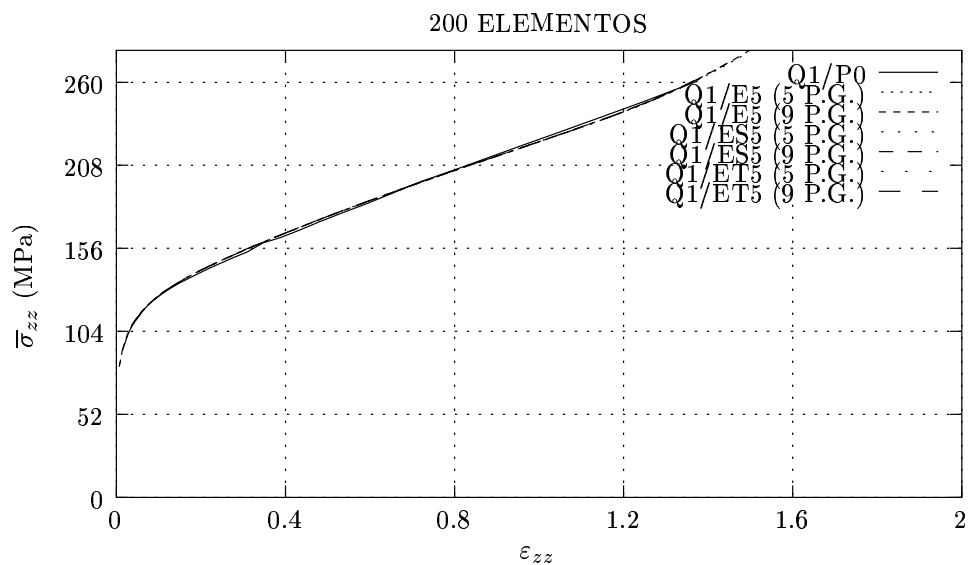


Figure 11: Curvas $\bar{\sigma}_{zz} - \varepsilon_{zz}$. Malla de 200 elementos

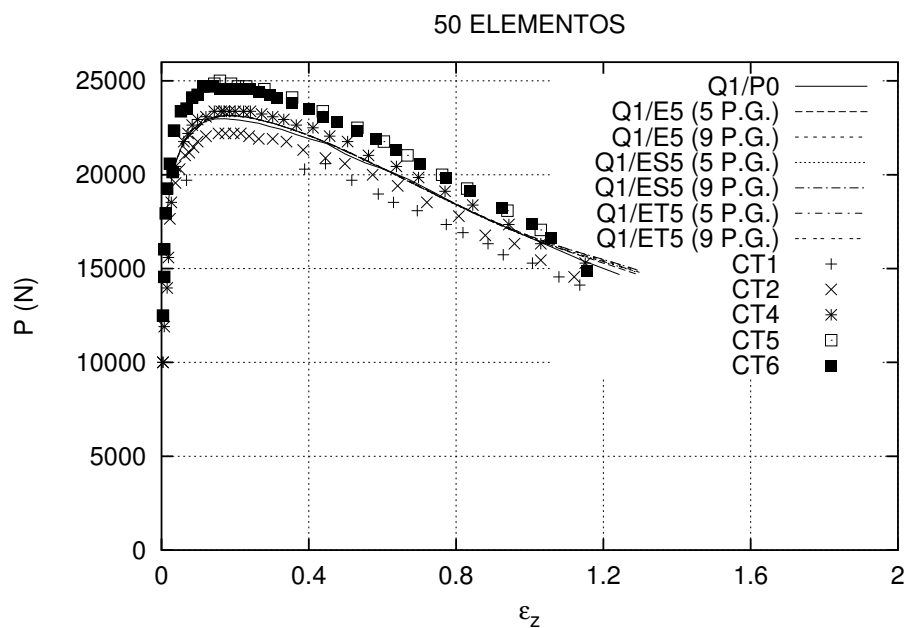


Figure 12: Resultados $P - \varepsilon_{zz}$ con la malla de 5×10 elementos. Comparación con los resultados experimentales

de cada familia de elementos. El refinamiento da lugar a un comportamiento más flexible en la rama de descarga que resulta más notable en los elementos mejorados, y tiene menor influencia en el elemento Q1/P0.

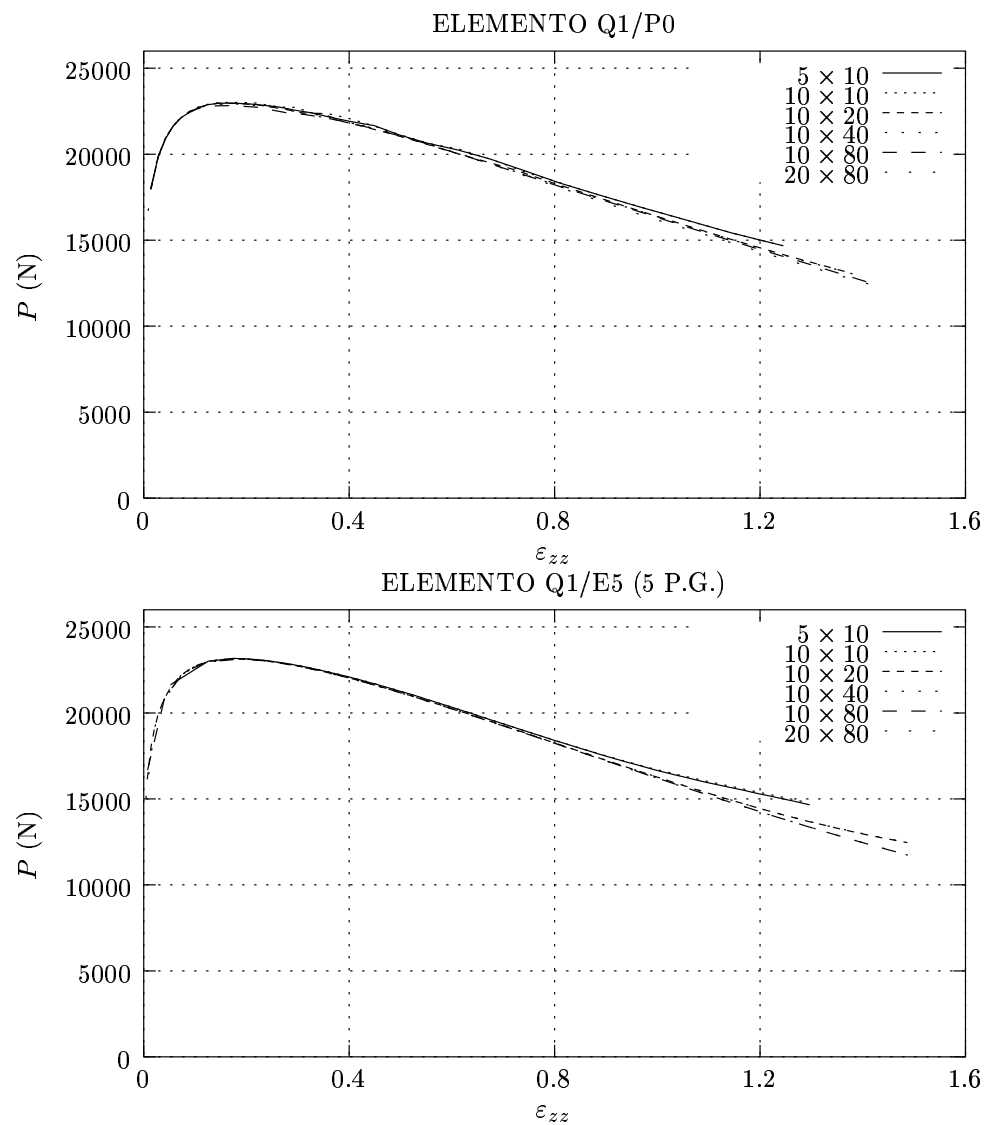


Figure 13: *Curvas $P - \varepsilon_z$. Elementos Q1/P0 y E5*

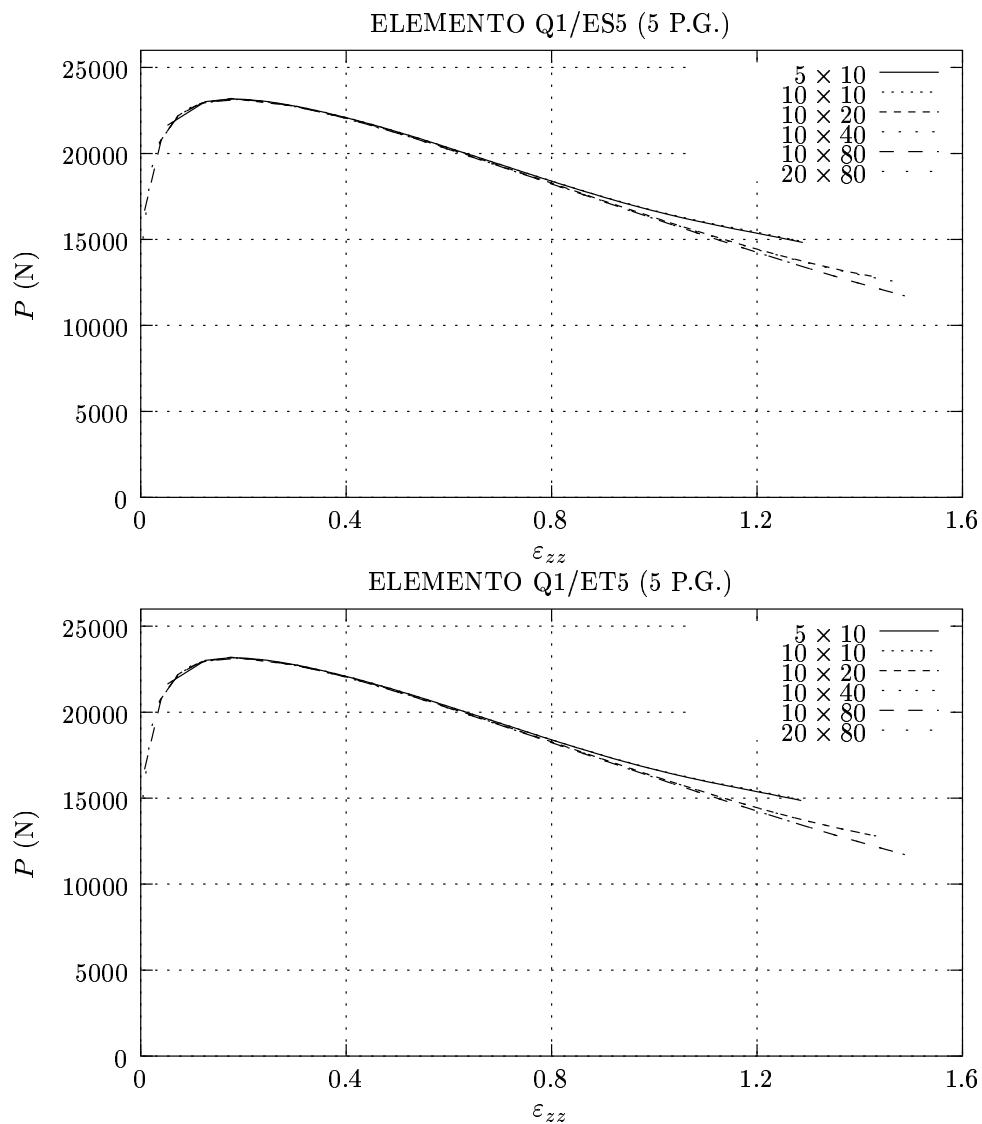


Figure 14: *Curvas $P - \varepsilon_z$. Elementos ES5 y ET5*

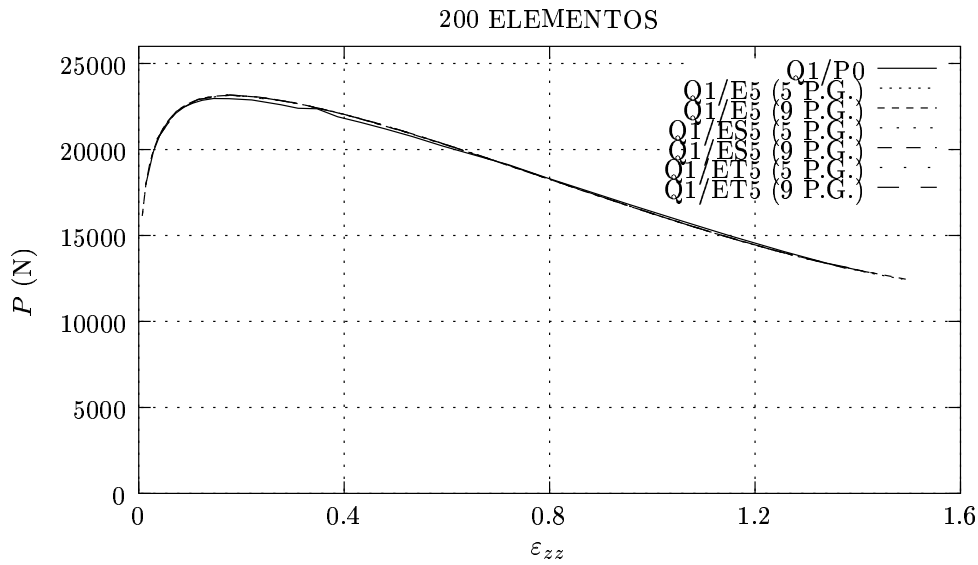


Figure 15: *Curvas $P - \varepsilon_{zz}$. Malla de 200 elementos*

En la tabla 4 se compara el valor calculado de la carga aplicada P correspondiente a la deformación logarítmica axial es $\varepsilon_{zz} = 0.9$, con el obtenido experimentalmente por Goicolea,⁶ con un valor de $P = 17.2 \pm 1.2$ kN.

	5×10	10×10	10×20	10×40	10×80	20×80
Q1/P0	17.51	17.51	17.34	17.28	17.27	17.16
Q1/E5 (5 P.G)	17.49	17.51	17.25	17.26	17.22	17.21
Q1/E5 (9 P.G)	17.55	17.53	17.25	17.25	17.22	17.21
Q1/ES5 (5 P.G)	17.47	17.49	17.26	17.24	17.21	17.21
Q1/ES5 (9 P.G)	17.53	17.51	17.27	17.25	17.22	17.20
Q1/ET5 (5 P.G)	17.49	17.50	17.27	17.25	17.21	17.21
Q1/ET5 (9 P.G)	17.53	17.52	17.27	17.25	17.22	17.21

Table 3: *Valores calculados de la fuerza axial (kN) aplicada para $\varepsilon_{zz} = 0.9$. Valor experimental de referencia: $P = 17.2 \pm 1.2$*

En la figuras 15 se compara la evolución de las variables estudiadas para la malla de 200 elementos. Como surge de la misma todos los elementos capturan bien la respuesta y las mallas más finas no presentan mejoras significativas respecto al resultado presentado. misma.

4 CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos en el trabajo se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Los resultados experimentales se capturan correctamente incluso con mallas relativamente groseras como resulta la de 50 elementos, tanto para el elemento mixto $Q1/P0$ cuanto para los elementos mejorados.
2. La malla de 200 elementos es adecuada para modelar el problema. Las mallas más finas no aportan resultados significativamente mejores.
3. A grandes rasgos los resultados del problema son poco sensibles a la malla empleada.
4. Un aspecto importante para analizar, a la luz de estos resultados, es decidir si resulta necesario refinar en sentido longitudinal y radial en la zona del cuello, solución adoptada previamente por los autores^{10,11} o es suficiente con la refinación en el sentido longitudinal empleada en este trabajo.
5. De manera preliminar surge que, para este problema, no parece necesario emplear elementos con formulación EAS, ya que los elementos clásicos como $Q1/P0$ o bien \bar{B} , modelan correctamente el problema, y en general se obtienen resultados muy similares con ambos tipos de elementos.

REFERENCES

- [1] P.W. Bridgman. The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, **32**, 553–574 (1944).
- [2] N.N. Davidenkov and N.I. Spiridonova. Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. In *Proceedings of American Society of Testing Materials*, volume 46, pages 1147–1158, (1946).
- [3] W. Chen. Necking of a bar. *Int. J. Sol. Struct.*, **7**, 685–717 (1971).
- [4] A. Needleman. A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, **20**, 111–127 (1972).
- [5] D.M. Norris, B. Moran, J.K. Scudder, and D.F. Quiones. A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, **26**, 1–19 (1978).
- [6] J.M. Goicolea. *Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis*. PhD thesis, University of London, (1985).
- [7] J.C. Simó. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 1–31 (1988).
- [8] J.P. Ponthot. *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le méthode des éléments finis*. PhD thesis, LTAS, Universidad de Lieja, Bélgica, (1994).

- [9] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, and J.R. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **4**, 153–177 (1974).
- [10] J.M. Goicolea, F. Gabaldón, and C. García Garino. Interpretación de la estricción en el ensayo de tracción empleando modelos hipoelásticos e hiperelásticos. In M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete, and M. Pastor, editors, *Memorias del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, pages 875–884, Barcelona, (1996). SEMNI.
- [11] C. García Garino, J. M. Goicolea, and Felipe Gabaldón. Simulación numérica del ensayo de tracción simple. In G. Etse and eds B. Luccioni, editors, *Mecánica Computacional*, volume **17**, pages **425–436**, (1996).
- [12] C. García Garino, Mirasso A., Raichman S., and J. M. Goicolea. Estricción de barras metálicas cilíndricas: sensibilidad frente al tamaño y tipo de las imperfecciones. In G. Etse and B. Luccioni, editors, *Mecánica Computacional*, volume **17**, pages **437–444**, (1996).
- [13] C. García Garino, Mirasso A., Raichman S., and J. M. Goicolea. Imperfection sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. In D.R.J. Owen, E. O nate, and E. Hinton (Eds.), editors, *Computational Plasticity*, pages **760–764**, Barcelona, (1997). Cimne.
- [14] C. García Garino, Mirasso A., Raichman S., and J. M. Goicolea. Local and global sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. In Elena Croitoro, editor, *First Canadian Conference on Non Linear Solids Mechanics*, pages **760–764**, Victoria, Canadá, (1999). University of Victoria and Pacific Institute of Mathematics.
- [15] C. García Garino, J. Goicolea, A. Mirasso, F. Gabaldón, and S. Raichman. Simulación numérica del problema de la estricción de barras sometidas a tracción simple. análisis y estudio de imperfecciones. Informe interno del proyecto PICT-98-0321, (Octubre 2003).
- [16] C. García Garino. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, (1993).
- [17] F. Gabaldón. *Métodos de elementos finitos mixtos con deformaciones supuestas en elastoplasticidad*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, (1999).
- [18] J.C. Simó and F. Armero. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **110**, 359–386 (1993).
- [19] F. Armero and S. Glaser. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, **14**, 759–791 (1997).

- [20] M.L. Wilkins. Third progress report of light armor program. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory. University of California, (1968). Rept. UCRL-50460.
- [21] F. Gabaldón, C. García Garino, and J. Goicolea. Simulación numérica del problema de la estricción mediante elementos finitos mejorados. comparación con elementos usuales. en preparación.