Mecánica Computacional Vol.XXII
M. B. Rosales, V. H. Cortínez y D. V. Bambill (Editores)
Bahía Blanca, Argentina, Noviembre 2003.

UTILIZAÇÃO DE MÉTODOS MULTIGRADES EM ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS DA PREVISÃO NUMÉRICA DO TEMPO

Andrei Bourchtein, Lioudmila Bourchtein

Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pelotas
Campus Universitátio da UFPel, Capão do Leão 96010-900, Brasil
e-mail: burstein@ufpel.tche.br

Palavras-chave: modelo atmosférico baroclínico, previsão numérica do tempo, esquemas semi-implícitos, métodos multigrades.

Resumo. *Os métodos semi-implícitos Eulerianos e semi-Lagrangianos são os mais desenvolvidos e utilizados nos modelos atuais de previsão numérica do tempo de várias escalas espaciais e temporais. Neste trabalho descrevemos um esquema semi-implícito formulado de modo a oferecer diferentes opções de tratamento vertical e de grau de estabilidade, variando de versão usual semi-implícita até versão totalmente explícita. Essa construção se baseia no desenvolvimento de campos atmosféricos pelos modos verticais do modelo discreto. Na resolução de equações elípticas, resultantes de modo implícito de aproximação de termos lineares, são empregados os métodos iterativos tri- e bi-dimensinais. Os métodos iterativos mais eficientes são os multigrades que estão crescendo tanto em termos de variedade e complexidade dos algoritmos como em número das áreas de suas aplicações. Utilizamos um dos algoritmos multigrades com objetivo de comparar o seu desempenho com os métodos tradicionais como o de relaxações sucessivas superiores.*

Para avaliar a eficiência e precisão computacional de versões do modelo com grau diferente de implicidade foram realizados vários experimentos com dados atmosféricos atuais. Eles revelaram o melhor desempenho da versão que trata implicitamente os cinco modos verticais principais. Na avaliação computacional do algoritmo multigrade foram realizados experimentos numéricos que mostraram a economia do tempo computacional gasto de 10% a 40% dependendo do tamanho da grade e do número de modos verticais submetidos ao tratamento semi-implícito. Os resultados da avaliação de campos prognósticos de pressão e vento demonstraram que a qualidade de campos calculados não depende da versão do modelo. Assim, a utilização da versão mais eficiente do modelo e aplicação dos métodos multigrades pode diminuir essencialmente os gastos computacionais mantendo a mesma precisão.

1 INTRODUÇÃO. EQUAÇÕES PRIMITIVAS

A modelagem numérica do tempo é uma das atividades principais no todo processo de elaboração de previsão dos campos meteorológicos de pressão, vento, temperatura e outros. Os modelos computacionais se baseiam nas equações de Euler de meios contínuos compressíveis. Na simulação de processos de grande escala (escala sinótica) normalmente se utiliza a aproximação de hidrostática que representa o balanço entre gradiente de pressão e a força gravitacional na vertical. Os métodos semi-implícitos Eulerianos e semi-Lagrangianos são os mais desenvolvidos e utilizados nos modelos atuais de previsão numérica do tempo de várias escalas espaciais e temporais. Diferentes componentes destes modelos complexos foram e continuam sendo testados com objetivo de encontrar as versões mais precisas, estáveis e econômicas em termos dos recursos computacionais.

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve os movimentos do ar em atmosfera hidrostática contém seis equações escalares. Dessas as quatro equações são prognósticas (isto é, contém as derivadas temporais de funções incógnitas): as duas equações do momento horizontal, a da continuidade e a do balanço de energia, e as demais duas equações são diagnósticas: a de aproximação hidrostática e a de componente vertical de velocidade. Utilizando coordenada t do tempo e as coordenadas espaciais x, y, σ, onde x e y são coordenadas de projeção conforme da esfera sobre o plano e $\sigma = p/p_s$ é a coordenada vertical de pressão normalizada, podemos escrever essas equações na forma[1,2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N_u - \frac{\partial G}{\partial x},\; N_u = -A_u - \frac{u^2+v^2}{2}\frac{\partial m^2}{\partial x} + fv - R(T-T_0)\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = N_v - \frac{\partial G}{\partial y},\; N_v = -A_v - \frac{u^2+v^2}{2}\frac{\partial m^2}{\partial y} - fu - R(T-T_0)\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = N_P - D - \frac{\partial \dot\sigma}{\partial \sigma}, \quad N_P = -A_P, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = N_T + \frac{RT_0}{c_p}\cdot\left(-D - \frac{\partial \dot\sigma}{\partial \sigma} + \frac{\dot\sigma}{\sigma}\right),\; N_T = -\frac{R(T-T_0)}{c_p}\left(\frac{\dot\sigma}{\sigma} - D - \frac{\partial \dot\sigma}{\partial \sigma}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \ln\sigma} = -RT, \tag{5}$$

$$\dot\sigma = \sigma\int_0^1 D + m^2\left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma - \int_0^\sigma D + m^2\left(u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma. \tag{6}$$

As condições principais de contorno na vertical são

$$\dot\sigma(0) = \dot\sigma(1) = 0. \tag{7}$$

As funções incógnitas são u, v, P, T, G e $\dot\sigma$, sendo u e v componentes horizontais da velocidade, $P = \ln p_s$ e p_s a pressão na superfície da Terra, T temperatura, $G = \Phi + RT_0 P$ e $\Phi = gz$ geopotencial, e $\dot\sigma$ componente vertical da velocidade. Também foram utilizadas as seguintes denotações comuns: p é pressão, m é o fator de mapa, f é o parâmetro de Coriolis, $T_0 = const$ é a temperatura de perfil referencial, z é altura do ar sobre a superfície da Terra, g é a aceleração gravitacional, R é a constante gasosa do ar, c_p é o calor específico sob a pressão constante, finalmente

$$D = m^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

é a divergência horizontal e

$$A_f = m^2\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \dot{\sigma}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$$

é a advecção de grandeza φ pelo campo da velocidade. As equações são representadas de tal maneira que em cada equação prognóstica os termos não lineares e lineares de coeficientes variáveis são agrupados e denotados pela letra N com o índice da equação respectiva (os termos N_u, N_v, N_T, N_P).

2 MODELO SEMI-IMPLÍCITO

A discretização semi-implícita no tempo é conveniente representar em forma de dois passos. O primeiro é preliminar e representa o esquema explícito leap-frog:

$$\frac{\hat{u}^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = N_u^n - \frac{\partial G^n}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\hat{v}^{n+1} - v^{n-1}}{2\tau} = N_v^n - \frac{\partial G^n}{\partial y}, \tag{9}$$

$$\frac{\hat{P}^{n+1} - P^{n-1}}{2\tau} = N_P^n - D^n - \frac{\partial \dot{\sigma}^n}{\partial \sigma}, \tag{10}$$

$$\frac{\hat{T}^{n+1} - T^{n-1}}{2\tau} = N_T^n + \frac{RT_0}{c_p}\left(-D^n - \frac{\partial \dot{\sigma}^n}{\partial \sigma} + \frac{\dot{\sigma}^n}{\sigma}\right). \tag{11}$$

Aqui τ é o passo temporal e os índices superiores $n+1, n$ e $n-1$ denotam os valores de funções incógnitas nos instantes posterior $t_{n+1} = (n+1)\tau$, atual $t_n = n\tau$ e anterior $t_{n-1} = (n-1)\tau$, respectivamente.

Se agora escrevemos as equações completas do modelo semi-implícito

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = N_u^n - \frac{\partial}{\partial x}\frac{G^{n+1} + G^{n-1}}{2}, \tag{12}$$

$$\frac{v^{n+1}-v^{n-1}}{2\tau}=N_v^n-\frac{\partial}{\partial y}\frac{G^{n+1}+G^{n-1}}{2}, \tag{13}$$

$$\frac{P^{n+1}-P^{n-1}}{2\tau}=N_P^n-\frac{D^{n+1}+D^{n-1}}{2}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\dot\sigma^{n+1}+\dot\sigma^{n-1}}{2}, \tag{14}$$

$$\frac{T^{n+1}-T^{n-1}}{2\tau}=N_T^n+\frac{RT_0}{c_p}\left(-\frac{D^{n+1}+D^{n-1}}{2}-\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\dot\sigma^{n+1}+\dot\sigma^{n-1}}{2}+\frac{\dot\sigma^{n+1}+\dot\sigma^{n-1}}{2\sigma}\right) \tag{15}$$

e subtraímos das últimas, as equações respectivas do passo explícito (8)-(11), então obtemos as equações do segundo passo

$$\bar u+\tau\frac{\partial\bar G}{\partial x}=-\tau\frac{\partial\tilde G}{\partial x}\ , \tag{16}$$

$$\bar v+\tau\frac{\partial\bar G}{\partial y}=-\tau\frac{\partial\tilde G}{\partial y}\ , \tag{17}$$

$$\bar P+\tau\left(\bar D+\frac{\partial\bar{\dot\sigma}}{\partial\sigma}\right)=-\tau\left(\tilde D+\frac{\partial\tilde{\dot\sigma}}{\partial\sigma}\right), \tag{18}$$

$$\bar T-\frac{RT_0}{c_p}\left(\bar P+\tau\frac{\bar{\dot\sigma}}{\sigma}\right)=\frac{RT_0}{c_p}\tau\frac{\tilde{\dot\sigma}}{\sigma}\ . \tag{19}$$

Essas definem as correções (funções incógnitas)

$$\bar h=h^{n+1}-\hat h^{n+1},\ \ h=u,v,G,P,T,\dot\sigma\ , \tag{20}$$

para os valores do passo explícito, necessárias para encontrar os valores do modelo semi-implícito completo, em função de grandezas calculadas no primeiro passo:

$$\tilde h=\hat h^{n+1}+h^{n-1}-2h^n\ ,\ \ h=G,D,\dot\sigma\ . \tag{21}$$

Para fechar este sistema basta acrescentar mais uma equação de correções. Para isso, podemos usar a equação de hidrostática escrita na forma

$$\frac{\partial\bar G}{\partial\ln\sigma}=-R\bar T\ . \tag{22}$$

O sistema (16)-(19),(22) pode ser reduzido a uma equação contendo uma função incógnita $\bar G$. Com este objetivo vamos eliminar sucessivamente as outras funções incógnitas. Primeiro, multiplicamos a equação (19) por σ e depois derivamos em relação à σ:

$$\frac{\partial(\sigma\bar T)}{\partial\sigma}-\frac{RT_0}{c_p}\left(\bar P+\tau\frac{\partial\bar{\dot\sigma}}{\partial\sigma}\right)=\frac{RT_0}{c_p}\tau\frac{\partial\tilde{\dot\sigma}}{\partial\sigma}\ . \tag{23}$$

Usando a equação (18) eliminamos da última equação as funções $\overline{P}, \dot{\overline{\sigma}}$:

$$\frac{\partial\left(\sigma\overline{T}\right)}{\partial\sigma}+\frac{RT_0}{c_p}\tau\left(\overline{D}+\widetilde{D}\right)=0\,. \tag{24}$$

Agora, com ajuda de (22), excluímos $\overline{T}$:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial\overline{G}}{\partial\sigma}\right)-R\frac{RT_0}{c_p}\tau\left(\overline{D}+\widetilde{D}\right)=0\,. \tag{25}$$

As três equações (16), (17), (25) formam um sistema fechado para determinar as três incógnitas $\overline{u}, \overline{v}, \overline{G}$. As equações (16) e (17) podem ser utilizadas para excluir a divergência horizontal na equação (25). Neste caso obtemos, finalmente, uma equação para a função incógnita $\overline{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma^2\frac{\partial\overline{G}}{\partial\sigma}\right)+\frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\overline{G}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{G}}{\partial y^2}\right)=-\frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial y^2}\right)+\frac{R^2T_0}{c_p}\tau\widetilde{D}\,. \tag{26}$$

Obviamente, essa é uma equação elíptica tri-dimensional. Considerando ela numa região limitada, podemos formar um problema bem posto acrescentando a ela as condições respectivas de contorno. Resolvendo este problema, encontramos as funções $\overline{u}, \overline{v}$ pelas relações explícitas (16), (17). Depois voltamos as relações (18) e (19) para encontrar $\overline{P}, \overline{T}$. Para isso reescrevemos (18) na forma integrada: uma vez por toda coluna da atmosfera

$$\overline{P}=-\tau\int_0^1\left(\overline{D}+\widetilde{D}\right)d\sigma\,, \tag{27}$$

e outra vez pela camada de topo até σ:

$$\overline{P}+\frac{\tau}{\sigma}\left(\dot{\overline{\sigma}}+\dot{\widetilde{\sigma}}\right)=-\frac{\tau}{\sigma}\int_0^\sigma\left(\overline{D}+\widetilde{D}\right)d\sigma\,. \tag{28}$$

Da equação (27) encontramos $\overline{P}$ e a relação (28) pode ser substituída na (19) para encontrar uma expressão para temperatura em termos de divergência:

$$\overline{T}=-\frac{RT_0}{c_p}\frac{\tau}{\sigma}\int_0^\sigma\left(\overline{D}+\widetilde{D}\right)d\sigma\,.$$

Por último, calculamos $\dot{\overline{\sigma}}$ da equação (19). Assim, sabendo a incógnita $\overline{G}$, os demais cálculos realizamos pelas fórmulas explícitas e, portanto, de modo bem simples e econômico em termos de número de operações. O problema principal é a resolução da equação elíptica (26) cuja descrição daremos no próximo item.

3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ELÍPTICO

Dentre vários métodos diretos e iterativos o método de relaxações sucessivas superiores (SOR) é uma das técnicas bastante usuais na resolução de problemas elípticos, por ser um método relativamente simples e efetivo[3,4]. A sua construção no caso da equação (26) é bem tradicional e, portanto, não daremos detalhe algum sobre este método, dirigindo leitor a bibliografia clássica[5] e as aplicações no contexto de modelos atmosféricos[3,6]. O método SOR foi aplicado à forma discreta da equação (26) mantendo segunda ordem de aproximação. O cálculo realizado junto com encontro das demais incógnitas resulta num esquema estável quando o passo do tempo foi escolhido de acordo com a condição de Courant-Friedrichs-Levi (CFL) em relação a velocidade máxima dos processos advectivos c_{adv}[7,8]:

$$\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}c_{adv} + \bar{f}h}\ , \tag{29}$$

onde h é o passo da grade horizontal e $\bar{f} = 1.4 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ é o valor máximo do parâmetro de Coriolis. Para grades horizontais bastante finas (por exemplo, $h \le 150km$), a avaliação (29) aproximadamente se reduz a

$$\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}c_{adv}}\ . \tag{30}$$

No modelo baroclínico a velocidade máxima do vento pode chegar à $c_{adv} \approx 80m/s$ nos níveis superiores da atmosfera, o que significa que para resolução horizontal de $h = 75km$ o passo temporal máximo permitido é $\tau \approx 610s$. Essa restrição é bem mais suave do que a restrição para o modelo explícito (8)-(11)[7,8]:

$$\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}\left(c_{adv} + c_{grav}\sqrt{1 + \bar{f}^{\,2}h^2 \big/ 2c_{grav}^2}\right)} \tag{31}$$

que pode ser aproximada à forma

$$\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}c_{grav}}\ . \tag{32}$$

Comparando (30) e (32) vemos que na última c_{adv} foi substituída pela velocidade máxima de todas as ondas presentes no sistema primitivo, isto é, a velocidade de ondas gravitacionais planares (externas) $c_{grav} \approx 350\ m/s$.

A outra abordagem aplicada a equação (26) consiste na combinação entre o método direto em relação à coordenada vertical e o método iterativo em relação às coordenadas horizontais. Isso se deve ao fato de especificidade da coordenada vertical: primeiro, para os processos sinóticos, que contém a maior parte da energia de movimentos atmosféricos, a escala característica na vertical é muito menor do que a na horizontal e, portanto, a grade vertical contém muito menos pontos (níveis) do que a horizontal; segundo, a resolução vertical é fortemente não homogênea, contendo mais níveis perto da camada limite e uma resolução mais esparsa na atmosfera média, o que resulta na redução da velocidade de convergência do método SOR; e terceiro, o tratamento específico pela vertical permite evitar a necessidade de resolver por completo a equação (26) o que reduz essencialmente o número de operações numéricas. Essa idéia de separação vertical foi primeiro proposta por Burridge[9] e aplicado com sucesso em diferentes modelos atmosféricos[10,11,12] . Neste trabalho faremos um estudo mais detalhado das propriedades dessa separação.

Na qualidade do método direto, utilizado pela vertical, foi escolhida a transformação discreta, que permite substituir a equação (26) pelo conjunto de equações bi-dimensionais desacopladas. Não utilizamos a transformada contínua de Fourier ou de autofunções do problema vertical de Sturm-Liouville, porque os experimentos em vários modelos mostraram que isto pode causar sérios problemas, em primeiro lugar com satisfação de condições de contorno[13,14]. Assim, a equação (26) foi discretizada pela vertical utilizando N níveis na atmosfera e, dessa maneira, no lugar da função $\overline{G}$ de três variáveis espaciais foi introduzido o vetor $\mathbf{G}$ de dimensão N cujos componentes são as funções de duas variáveis horizontais (o mesmo foi feito com as funções do lado direito da equação) e em vez do operador diferencial de segunda ordem pela vertical foi gerada uma matriz $\mathbf{C}$ que representa o operador vertical discreto:

$$\mathbf{CG} + \frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\mathbf{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{G}}{\partial y^2}\right) = -\frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{G}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\mathbf{G}}}{\partial y^2}\right) + \frac{R^2T_0}{c_p}\tau\tilde{\mathbf{D}} \quad . \tag{33}$$

Pode ser demonstrado que a matriz $\mathbf{C}$ tem autovalores negativos distintos[15] e, portanto, ela pode ser representada na forma $\mathbf{C} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$, onde $\mathbf{S}$ é matriz de ordem N, cujas colunas são autovetores direitas de $\mathbf{C}$, e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são autovalores λ_i de $\mathbf{C}$ numerados em ordem crescente dos seus módulos. Para os coeficientes $\mathbf{F}_c$ de expansão espectral dos vetores (tal chamados modos verticais)

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tag{34}$$

o sistema (33) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{\Lambda G}_c + \frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\mathbf{G}_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{G}_c}{\partial y^2}\right) = -\frac{R^2T_0}{c_p}\tau^2\left(\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{G}}_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{\mathbf{G}}_c}{\partial y^2}\right) + \frac{R^2T_0}{c_p}\tau\tilde{\mathbf{D}}_c, \tag{35}$$

o que representa o conjunto de N equações bi-dimensionais de Helmholtz desacopladas entre si. Utilizando os elementos dos vetores

$$\mathbf{F}_c = (F_1, F_2, \ldots, F_N), \quad \mathbf{F} = \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{D}}$$

e introduzindo velocidades $c_i = \sqrt{-R^2 T_0 / c_p \lambda_i}$, $i = 1, \ldots, N$ de ondas gravitacionais internas, podemos reescrever (35) na forma

$$-\frac{1}{c_i^2} G_i + \tau^2 \left(\frac{\partial^2 G_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_i}{\partial y^2} \right) = -\tau^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{G}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{G}_i}{\partial y^2} \right) + \tau \tilde{D}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, N \ . \tag{36}$$

Evidentemente, resolver todas as equações em (36) significa resolver (33) e então encontrar uma solução aproximada à (26).

Se aplicamos o método SOR a cada uma das equações (36), então, teoricamente, o número de operações aumenta, comparando a resolução do (26) via SOR, devido aos encargos da transformação espectral (34) e da sua inversa. Mas na prática o aumento do tempo computacional é pequeno e não chega a 5%, porque o número de níveis verticais é bem menor do que o número de pontos em cada direção horizontal. Não daremos os detalhes dessa comparação, pois o que nos interessa não é a resolução de todos os sistemas (36), mas, sim, a resolução de alguns primeiros sistemas em (36) com os valores maiores de velocidades c_i, $i = 1, \ldots, K$. Neste último caso, para encontrar os componentes do vetor de correções $\mathbf{G}$, utilizamos a fórmula inversa à (34) $\mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{G}_c$, onde os primeiros K elementos de $\mathbf{G}_c$ são encontrados da resolução de (36) e os demais coeficientes são nulos.

Vamos ver como a resolução de só algumas primeiras equações em (36) pode influir na precisão e estabilidade do esquema. Primeiro, a ordem de aproximação é definida pela aproximação usada nos sistemas semi-discretos explícito (8)-(11) e semi-implícito (12)-(15). Ambos sistemas tem a segunda ordem de aproximação pelo tempo. Se os dois têm, também, a segunda ordem de aproximação no espaço, então tanto os modos verticais corrigidos pela equação (36), como os demais, não corrigidos, terão a segunda ordem de aproximação e, portanto, a precisão geral do esquema será de ordem dois. A aproximação de segunda ordem é o caso comum nos modelos atmosféricos[7,16] e é o caso do nosso modelo[12,17].

A análise de estabilidade do esquema mostra que se em vez da resolução de todos os sistemas em (36), fossem resolvidos só os K primeiros sistemas, então o passo temporal, em vez de ser determinado pela fórmula (28), seria definido como[8,12]

$$\tau \le \frac{h}{\sqrt{2}\left(c_{adv} + c_{K+1} \sqrt{1 + \bar{f}^2 h^2 / 2c_{K+1}^2} \right)}, \tag{37}$$

onde $c_{K+1} = \sqrt{-R^2 T_0 / c_p \lambda_{K+1}}$ representa a velocidade das ondas gravitacionais internas do $K+1$-ésimo modo vertical, isto é, do primeiro modo que foi tratado de modo explícito. Se $K = 0$, isto é, se nenhuma correção foi encontrada, então temos o esquema explícito (8)-(11) e a restrição (37) resulta em (31). Se, ao contrário, $K = N$, isto é, se foram resolvidos todos os sistemas (36), então temos o esquema semi-implícito (12)-(15) e, evidentemente, a avaliação (37) se reduz a (29). No caso intermediário ($0 < K < N$) temos o esquema de segunda ordem de aproximação com estabilidade definida por (37). Vamos investigar essa desigualdade com mais detalhes.

Na versão atual do modelo regional em consideração são utilizados 15 níveis verticais para os quais os valores de velocidades de propagação das ondas gravitacionais são

$\{c_k\}_1^N = \{342.0, 188.0, 101.0, 61.8, 41.6, 29.8, 22.1, 16.7, 12.7, 9.63, 7.18, 5.17, 3.35, 2.26, 1.13\}$

(adotamos aqui $R = 287 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ e $T_0 = 300^0 K$). Portanto, se calcular as correções dos três primeiros modos, então a condição (37) equivale a

$$\tau \leq \frac{h}{1.8\sqrt{2}c_{adv}} \tag{38}$$

o que é duas vezes mais rígido do que (30) para esquema semi-implícito. Se encontramos as cinco primeiras correções, então (37) se transforma a

$$\tau \leq \frac{h}{1.4\sqrt{2}c_{adv}}. \tag{39}$$

Para dez modos corrigidos teremos resultado bem próximo a (30)

$$\tau \leq \frac{h}{1.1\sqrt{2}c_{adv}}. \tag{40}$$

Assim, surge o problema de encontrar via experimentos numéricos tal número de modos verticais corrigidos que necessita do menor tempo computacional no contexto do modelo atmosférico. A descrição desses experimentos apresentamos no próximo item.

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

A maioria dos experimentos foi feito com a seguinte configuração do modelo: grade horizontal de 89x89 pontos com espaçamento de $h = 75km$ centralizada em Porto Alegre, grade vertical de 15 níveis cobrindo a atmosfera da superfície da Terra até aproximadamente a superfície de 50 milibares. Com essa resolução espacial, a solução do problema (26) via método SOR tri-dimensional ocupa aproximadamente 55% do tempo computacional de cada passo no tempo. Com a utilização do desenvolvimento vertical completo, os gastos computacionais para resolver (26) sobem até 59% do tempo total. Os dois esquemas são estáveis quando o critério (29) está satisfeito, isto é, na configuração descrita, quando $\tau \leq 610s \approx 10min$. Se não corrigirmos nenhum modo vertical, então o esquema se torna o esquema leap-frog que tem que satisfazer a restrição (31), isto é, $\tau \leq 125s \approx 2min$. Assim, o esquema semi-implícito é pelo menos duas vezes mais efetivo do que o esquema leap-frog, o que confirma os resultados conhecidos dos outros modelos[7,16] e, portanto, demonstra a efetividade computacional do programa elaborado.

Agora, vamos diminuir o número de modos corrigidos comparando o desempenho do algoritmo com o de correção de todos 15 modos. Se resolvermos 10 sistemas em (36), então o passo temporal se determina, a princípio, pela fórmula (40): $\tau \leq 580s$. Mas, em compensação, o número de operações para desenvolvimento espectral e número de sistemas a serem resolvidos diminui em 1/3. Embora a análise de Fourier de velocidade de suavização de erro inicial indica que a convergência assimptótica do método SOR é melhor para os sistemas com maiores coeficientes junto com G_i (isto é, para menores valores de c_i), o desenvolvimento espectral horizontal dos campos do erro inicial mostra que os modos verticais de maior índice (com menores valores de c_i) tem a principal parte do erro concentrada nas ondas horizontais longas. Isso resulta na prática em convergência mais rápida do método SOR aplicado aos primeiros sistemas em (36), isto é, aos sistemas de maiores valores de c_i. Nos experimentos foi observado que os últimos cinco modos exigem (na média) 1.1 iterações a mais do que os modos de 6 até 10, e esses últimos, por sua vez, gastam 1.1 iterações a mais, do que os primeiros cinco modos. Levando em conta que o processo da resolução completa de (26) ocupa quase 60% de cada passo, podemos avaliar que a economia computacional para um passo será quase de 25%, o que de fato foi observado nos experimentos numéricos. Como o número dos passos temporais para 10 modos corrigidos aumenta 1.05 vezes, então a vantagem total será em torno de 20%, o que também foi encontrado na prática checando o tempo computacional de cada previsão numérica.

Do mesmo jeito foram avaliadas as versões do esquema com 5 e 3 modos verticais corrigidos. Os resultados obtidos, comparados com a correção completa, são os seguintes: Na correção de 5 modos a economia computacional para um passo temporal é mais que 40%. Ao mesmo o passo diminui até $\tau \leq 480s = 8min$. Assim, na previsão completa o ganho desta versão é de 26%, melhor do que na correção de 10 modos. Na correção de 3 modos o tempo de cálculo num passo diminui quase 50% , mas o passo temporal não pode superar $\tau \leq 370s$. Então, a vantagem total é de 16%. Assim, podemos concluir que a melhor opção entre as descritas é a correção dos 5 primeiros modos verticais. Os experimentos com outro número de modos corrigidos mostraram que os resultados são quase os mesmos para correção de 6 e 7 modos e com maior número de modos, o tempo computacional exigido começa aumentar.

Passamos a descrição dos experimentos com métodos multigrades (MG). Os métodos MG foram propostos por Fedorenko[18] e no mesmo artigo foi demonstrada sua economia teórica na resolução da equação de Poisson, isto é, foi demonstrado que o número de operações deste método é diretamente proporcional ao número de pontos da grade discreta. A idéia principal dos métodos MG consiste na divisão de todo espectro ondular de erro inicial e posterior suavização de cada intervalo do espectro na grade respectiva, onde as ondas destacadas são mais curtas. O primeiro algoritmo econômico MG, que demonstrou as vantagens deste método na prática, foi desenvolvido por Brandt e aplicado ao problema de Poisson[19]. Agora já existem diferentes algoritmos dos métodos MG, a maioria dos quais são, teoricamente, econômicos[3,4]. Alguns destes já foram aplicados com sucesso no contexto de modelos atmosféricos globais[10,20].

Muitos programas contêm várias versões e, para obter maior eficiência prática, é preciso levar em conta a especificidade do problema: tipo de operador elíptico, tipo de condições de contorno, dimensões da grade e a razão entre elas, tipo de aproximação inicial e outras.

Portanto, há uma tarefa prática de determinar um variante do método MG mais efetivo para o problema elíptico dado.

Escolhemos para aplicação dos métodos MG o pacote dos programas BOXMG, desenvolvido por Dendy[21] e ajustado para os usuários por Bandy & Sweet[22]. O pacote constrói automaticamente a seqüência das grades que assegura a efetividade do método MG independentemente do número de pontos. Esta vantagem se deve ao uso da discretização do tipo de Galerkin para a construção dos operadores em diferenças finitas para todas as grades, exceto a grade inicial. O método MG foi aplicado na versão do modelo com cinco modos verticais corrigidos. Através dos experimentos, obtemos um variante efetivo que assegura a precisão exigida da solução com cálculo menor. Foi escolhido o método cíclico com uso do ciclo V e foram aplicados dois ciclos MG para o primeiro modo e um ciclo para os outros quatro. O melhor resultado foi atingido usando um ciclo de relaxações em cada grade antes de passar para a grade mais fina ou mais grossa, exceto a grade fina inicial onde foram aplicadas duas relaxações. A aproximação inicial nula foi usada para as primeiras horas da previsão e a correção do passo anterior foi aplicada como aproximação inicial para as últimas horas de previsão. Essa escolha se relaciona aos desajustes dinâmicos dos campos iniciais que provocam as oscilações de soluções numéricas de grande amplitude, que são fisicamente irreais e desaparecem depois de algumas horas de previsão, devido aos mecanismos de dissipação numérica e física usados no modelo.

Utilizando a mesma grade horizontal de $h = 75km$, o método BOXMG foi 2,1 vezes mais rápido do que o SOR na resolução das cinco primeiras equações (36). A economia computacional numa previsão completa foi de 16%. Foram realizados, também, experimentos com a grade horizontal de $h = 37.5km$ e de 179x179 nós. Neste caso, o desempenho do método MG foi ainda melhor e a economia total chegou a 21%. Assim, comparando ao modelo semi-implícito usual, as vantagens computacionais chegaram a 30% no caso de grade de $h = 75km$ e a quase 40% na grade de $h = 37.5km$. Os resultados descritos e os demais, relativos aos outros modos corrigidos, são resumidos na Tabela 1, onde o passo horizontal h é medido em kilometros, passo do tempo τ em segundos e as demais grandezas são adimensionais: P é número de passos, K é número de modos verticais corrigidos, C_{SOR} e C_{MG} é o tempo computacional com utilização do SOR e MG, respectivamente. Os dois últimos são dados em porcentos do tempo computacional exigido pelo esquema leap-frog.

Tabela 1: Resultados de testes computacionais com diferentes configurações do modelo

h	K=0				K=5				K=10				K=15			
	τ	P	C_{SOR}	C_{MG}	τ	P	C_{SOR}	C_{MG}	τ	P	C_{SOR}	C_{MG}	τ	P	C_{SOR}	C_{MG}
75	120	720	1.0	1.0	480	180	0.32	0.27	576	150	0.35	0.29	600	144	0.44	0.36
37.5	60	1440	8.0	8.0	240	90	2.46	1.94	288	300	2.70	2.06	300	288	3.28	2.43

Notamos que a qualidade dos prognósticos foi praticamente igual na correção de diferentes números de modos verticais. Os campos calculados de pressão e vento foram praticamente idênticos para versões do modelo que se distinguiram só pelo método iterativo aplicado (SOR ou MG). A precisão dos campos de pressão de 24 horas de previsão foi avaliada utilizando medidas estatísticas tradicionais, recomendadas pelo WMO, de correlação de tendências r e de erro médio quadrático ε [23]. Aplicando o esquema a uma série de 30 conjuntos de dados iniciais do NCEP (USA) na grade de $h = 75km$, foram obtidos os resultados de $r = 0.92, \varepsilon = 21m$ para superfície de 500 milibares e $r = 0.87, \varepsilon = 24m$ para superfície de 1000 milibares. Achamos que estes resultados são bons, tendo em vista que a versão empregada do modelo basicamente inclui só núcleo dinâmico e as parametrizações físicas são ausentes ou bem simplificadas. Todos os experimentos foram realizados no computador DEC-3000.

5 CONCLUSÕES

Foi representada a construção do esquema baroclínico semi-implícito com utilização de separação vertical via desenvolvimento pelos modos verticais do modelo discreto. Essa construção engloba, como os casos particulares, o esquema explícito leap-frog e o semi-implícito. Na resolução dos sistemas elípticos em cada passo do tempo foram empregados os métodos SOR e MG. A comparação destes dois algoritmos mostrou as vantagens de métodos MG em função de tamanho da grade, do passo horizontal e do nível de implicidade do modelo. Para uma previsão regional de processos sinóticos com utilização de grade fina, o efeito conjunto de desacoplamento vertical e de utilização do algoritmo MG resultou numa economia computacional de até 40% sem nenhuma perda na qualidade dos prognósticos

6 AGRADECIMENTOS

Agradecemos as agências de pesquisa CNPq e FAPERGS que apoiaram esse trabalho com as bolsas 302738/2003-7 e 01/60053.9.

7 REFERÊNCIAS

[1] A. Kasahara, "Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction", *Mon. Wea. Rev*. **102**, 509-522 (1974).

[2] H. Sundquist, "Vertical coordinates and vertical approximation methods", In: *Numerical methods used in atmospherical models*, Vol.II, GARP Publication Series, No.17 (1979)

[3] S.R. Fulton, P.E. Ciesielski, W.H. Schubert, "Multigrid methods for elliptic problems: a review", *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 943-959 (1986).

[4] J. Adams, R. Garsia, B. Gross, J. Hack, D. Haidvogel, V. Pizzo, "Applications of multigrid software in the atmospheric sciences". *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1447-1458 (1992).

[5] L.A. Hageman, D.M. Young, *Applied iterative methods*, Academic Press (1980).

[6] M. Tanguay, A. Robert, "Elimination of the Helmholtz equation associated with the semi-implicit scheme in a grid point model of the shallow water equations" *Mon. Wea. Rev.*, **114**, 2154-2162 (1986).

[7] G.J. Haltiner, R.T. Williams, *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John Wiley (1980).

[8] A. Bourchtein, *Introdução aos métodos numéricos da hidrodinâmica*. Ed. da UFPel (1998).

[9] D.M. Burridge, "A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10 level model", *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **101**, 777-792 (1975).

[10] J.R. Bates, S. Moorthi, R.W. Higgins, "A global multilevel atmospheric model using a vector semi-Lagrangian finite-difference scheme. Part I: Adiabatic formulation", *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 244-263 (1993).

[11] V. Kadychnikov, V. Losev, "Application of the alternating direction implicit method to the numerical regional weather forecast", *Meteorology and Hydrology*, **9**, 26-33 (1991).

[12] A. Bourchtein, "Semi-Lagrangian semi-implicit space splitting regional baroclinic atmospheric model", *Appl. Numer. Math*. **40**, 307-326 (2002)..

[13] P.E. Francis, "The possible use of Laguerre polynomials for representing the vertical structure of numerical models of the atmosphere", *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **98**, 662-667 (1972).

[14] A. Mizzi, J. Tribbia, J. Curry, "Vertical spectral representation in primitive equation models of the atmosphere", *Mon. Wea. Rev*. **123**, 2426-2446 (1995).

[15] A. Bourchtein, V. Kadychnikov, "Well posedness of the initial value problem for vertically discretized hydrostatic equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, **41**, 195-207 (2003).

[16] T.N. Krishnamurti, L. Bounoua, *Introduction to numerical weather prediction techniques*. CRC Press (1995).

[17] A. Bourchtein, "Comparative study of two economical methods applied to a numerical scheme of weather prediction", *Braz. J. of Geoph.*, **16**, 27-36 (1998).

[18] R.P. Fedorenko, "A relaxation method for solving elliptic diference equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **1**, 1092-1096 (1962).

[19] A. Brandt, "Multi-level adaptive solutions to boundary value problems", *Math. Comp.*, **31**, 333-390 (1977).

[20] S.R.M. Barros, D.P. Dee, F. Dickstein, "A multigrid solver for semi-implicit global shallow water models", *Atmos.-Ocean*, **28**, 24-47 (1989).

[21] J.E. Dendy, "Black box multigrid", *J. Comp. Phys.*, **48**, 366-386 (1982).

[22] V. Bandy, R. Sweet, "A set of three drivers for BOXMG: a black box multigrid solver", *Comm. Appl. Num. Methods*, **8**, 563-571 (1992).

[23] R.A. Anthes, "Regional models of the atmosphere in middle latitudes", *Monthly Weather Review*, **111**, 1306–1335 (1983).