

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE INGENIERIA

SOFTWARE LIBRE: OCTAVE

Ricardo Adra^{*}, Jorge Nicolau[†], Graciela Pedrosa^{}**

^{*} Director Grupo Proimes
Facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional
Rivadavia 1050, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina. TE: 54-0381-4213944
e-mail: radra@arnet.com.ar, web page: <http://www.proimes.com.ar>

[†] Facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional
Rivadavia 1050, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina. TE: 54-0381-4213944
web page: <http://www.proimes.com.ar>

^{**} Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Avda. Independencia 1900, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina. TE: 54-0381-4364093 int 203
e-mail: gpedrosa@herrera.unt.edu.ar

Palabras clave: GNU, Octave, Software libre, Métodos Numéricos.

Resumen. GNU Octave¹ es un lenguaje de alto nivel, destinado principalmente a la computación numérica. Es una potente herramienta matemática para la resolución de gran cantidad de problemas, entre otros: cálculo matricial, cálculo integral o resolución de ecuaciones diferenciales.. En este trabajo se analizan algunos ejemplos de problemas de ingeniería y su solución empleando Octave.

1 INTRODUCCIÓN

Octave tiene un amplio conjunto de herramientas para resolver búsqueda de raíces en ecuaciones no lineales, manipular polinomios, integrar ecuaciones diferenciales, resolver problemas de álgebra lineal, manejo de matrices, integrar funciones ordinarias. Octave es fácilmente extensible empleando módulos escritos en C++, C, Fortran u otros lenguajes.

GNU Octave está amparado bajo los términos de la GNU (General Public License) de la Fundación del Software Libre (**Free Software Foundation**) por lo tanto su código fuente se puede distribuir de manera libre. Los programas se pueden escribir en módulos con extensión **.m**, empleado para dar solución a los problemas planteados.

El programa Octave se ejecutó bajo plataforma Linux. Este es un sistema operativo tipo Unix originalmente creado por Linus Torvalds con la asistencia de desarrolladores de todo el mundo.

Octave fue escrito por John W. Eaton y muchos otros.

2 OBJETIVOS

Emplear un software libre y gratuito: Octave, para dar solución a algunos problemas de ingeniería, por ejemplo: conducción de calor, condiciones con extremos aislados, métodos con series de Fourier, ecuación de Laplace, distribución de temperatura, etc.

3 DESARROLLO

3.1 Ejemplo I: Varilla calentada y extremos aislados²

Suponer que una varilla de longitud $L = 50$ cm se sumerge en vapor hasta que su temperatura sea $u_0 = 100$ °C a todo lo largo. En el instante $t = 0$, su superficie lateral se aísla y su dos extremos se sumergen en hielo a 0 °C. Calcular la temperatura de la varilla en su punto medio después de media hora, si ella esta hecha de (a) acero; (b) de concreto.

Solución: El problema con valores en la frontera para esta función de temperatura de la varilla $u(x, t)$ es:

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, \\u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\u(x, 0) &= u_0\end{aligned}$$

Recordemos la serie onda cuadrada

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \text{sen} \frac{n\pi t}{L} = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t < L \\ -1 & \text{si } -1 < t < 0 \end{cases}$$

En consecuencia, la serie de senos de Fourier de $f(x) \cdot u_0$ es:

$$f(t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

para $0 < x < L$. Por lo tanto, los coeficientes de Fourier están dados por:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4u_0}{n\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

y por tanto, la función de temperatura de la varilla esta dada por:

$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 kt}{L^2}\right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

La figura 1 muestra la función $y = u(x, t)$ con $u_0 = 100$ y $L = 50$. Al aumentar t , vemos que la temperatura máxima de la varilla (que ocurre claramente en su punto medio) va descendiendo. La temperatura en el punto medio $x = 25$ después de $t = 1800$ segundos es:

$$u(25, 1800) = \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(\frac{-18n^2 \pi^2 k}{25}\right)$$

(a) Con $k = 0.15$ para el acero, esta serie da como resultado

$$u(25, 1800) = 43.8519 - 0.0029 + 0.0000 - \dots \bullet 43.85 \text{ } ^\circ\text{C}$$

(b) Con $k = 0.005$ para el concreto, esta serie da como resultado

$$\begin{aligned} u(25, 1800) = & 122.8795 - 30.8257 + 10.4754 - 3.1894 \\ & + 0.7958 - 0.1572 + 0.0242 - 0.0029 \\ & + 0.0003 - 0.0000 + \dots \bullet 100.00 \text{ } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Así, el concreto es un aislante muy eficaz.

%Programa u1.m

```
function u=u(x,t)
k=0.15;
L=50;
u0=100;
S=0;
N=50;
for n=1:2:2*N+1;
    S=S+(1/n)*exp(-n^2*pi^2*k*t/L^2).*sin(n*pi*x/L);
end
u=4*u0*S/pi;
plot(x,u)
```

```

% El programa u.m suma los primeros N términos no ceros
function u=u(x,t)
k=0.15;
L=50;
u0=100;
S=0;
N=50;
for n=1:2:2*N+1;
    S=S+(1/n)*exp(-n^2*pi^2*k*t/L^2).*sin(n*pi*x/L);
end
u=4*u0*S/pi;
% Cuando Ud. Ejecute el programa Ud. debe hacer
% [x,t]=meshgrid(0:50,0:1800);
% Luego : u(x,t)
mesh(x,t,u)

```

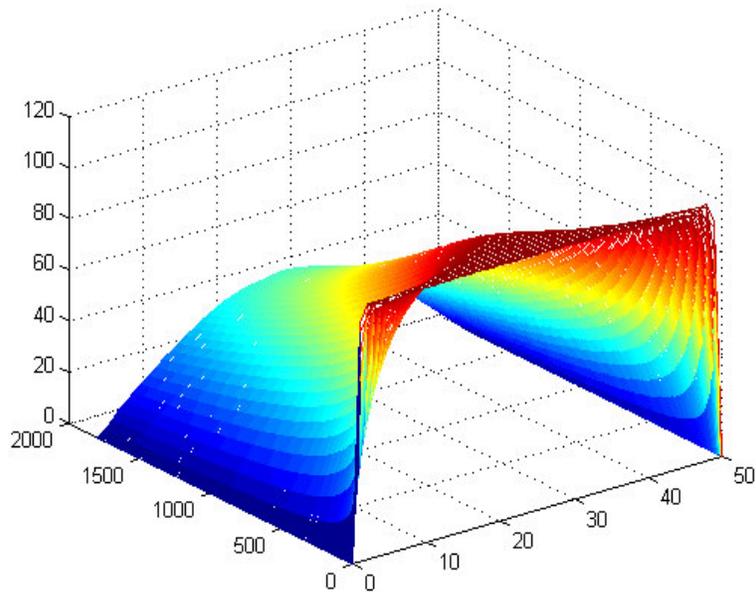


Figura 1

Utilizamos la última función obtenida para trazar otras gráficas: $u(x, t)$ después de 10 segundos o más con dos cifras decimales de precisión en el intervalo $0 \leq x \leq 50$.

La figura 2 muestra que para $u(x, 30)$ que la varilla se ha enfriado en los extremos (programa u1.m)

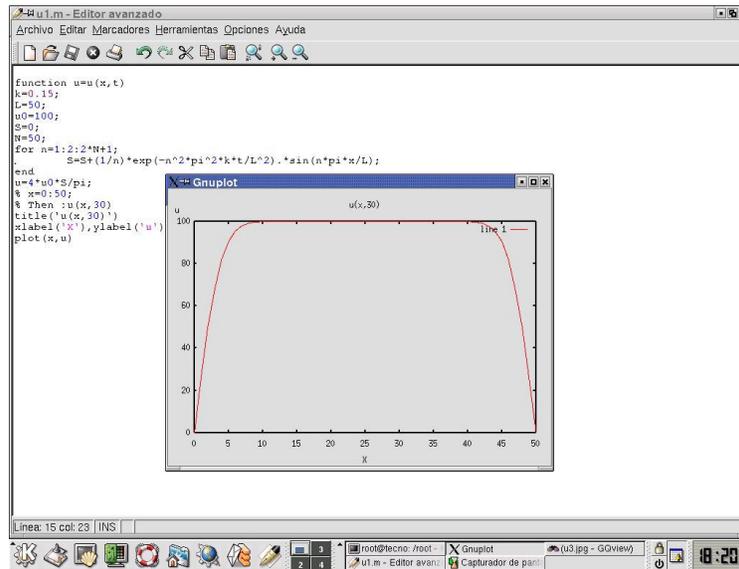


Figura 2

La figura 3 muestra el mismo programa u1.m pero u(x, 1800) luego de 1800 segundos y muestra que la temperatura máxima siempre aparece en el punto medio $x = 25$

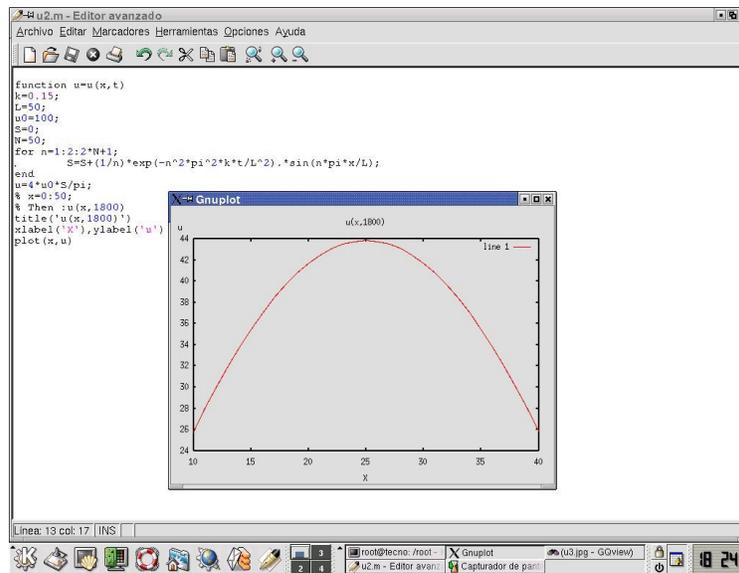


Figura 3

La figura 4 con el programa u2.m muestra el cambio de gráfica, antes plot(x, u) y ahora es plot(t, u) y otros valores u(25, t). Para un periodo de 2 horas se puede ver a los 1500 segundos (25 minutos) la temperatura a decrecido hasta caer a 50° C.

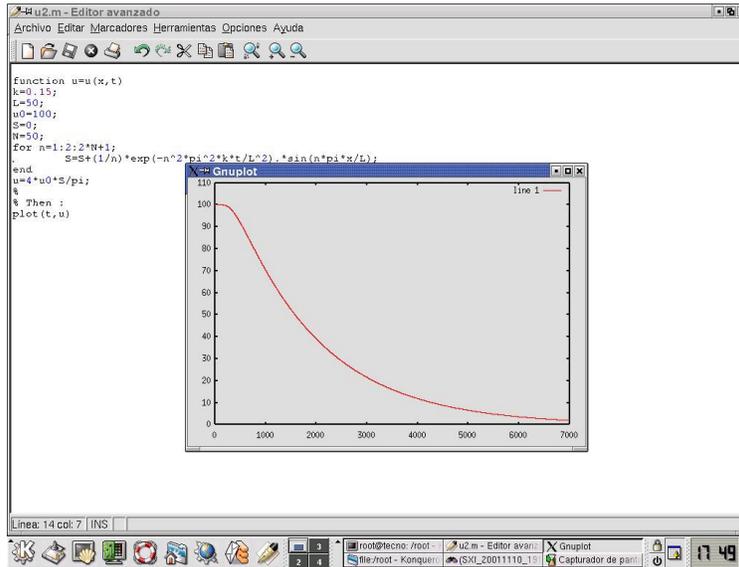


Figura 4

La figura 5 muestra una horizontal acerca de su punto de intersección con la recta horizontal $u = 50$ e indica que esto tarda realmente 1578 segundos.

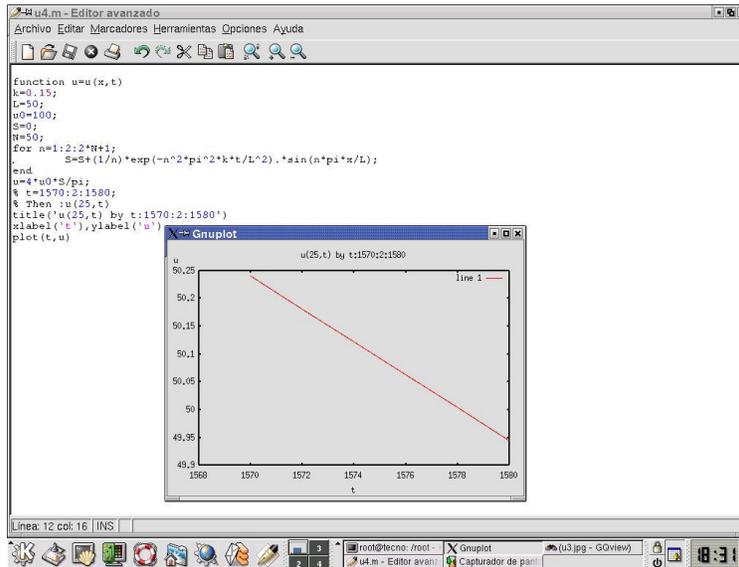


Figura 5

3.2 Ejemplo II: Cálculo de distribución de temperaturas³

La distribución de temperaturas en estado estacionario se define por la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

en donde T es la temperatura, x e y son las coordenadas. Las derivadas de la ecuación anterior se aproximan usando diferencias finitas. La figura 6 muestra una malla bidimensional, esquema útil en las aproximaciones desarrolladas para la ecuación mencionada.

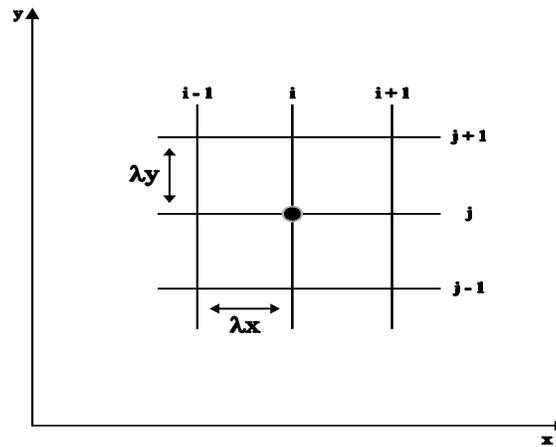


Figura 6. Malla bidimensional que se usa en el desarrollo de aproximaciones por diferencias finitas de la temperatura sobre una placa.

Las aproximaciones por diferencias divididas de las derivadas son:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

y de manera similar:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Suponiendo que $\Delta x = \Delta y$ la ecuación de Laplace se puede aproximar como:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

la cual es aplicable a cada nodo i,j de la figura 6.

Si se aplica la ecuación anterior a cada nodo resulta un sistema de ecuaciones acopladas ya que la temperatura en varias posiciones aparece en más de una ecuación. Esto produce un sistema de ecuaciones algebraicas lineales simultaneas que pueden ser resueltas por el método iterativo de Gauss-Seidel, o mediante Octave, resultando relativamente simple.

Considérese la placa plana de la figura 7. Los lados de la placa se mantienen a temperaturas constantes de 0° y 100° C, como se muestra en la figura.

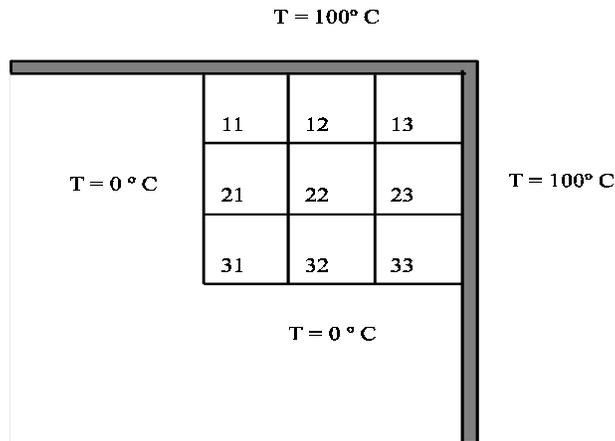


Figura 7. Placa plana en donde se mantienen los lados a temperaturas constantes de 0° y 100° C

La distribución de la temperatura dentro de la placa se puede aproximar en nueve puntos internos aplicando la ecuación de Laplace en cada punto. Esto genera el siguiente conjunto de ecuaciones dado en notación matricial:

$$\begin{array}{cccccccc|ccc}
 -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & -100 \\
 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{12} & -100 \\
 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & T_{13} & -200 \\
 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & T_{21} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & T_{22} & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & T_{23} & -100 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & T_{31} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & T_{32} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & T_{33} & -100
 \end{array}$$

Si empleamos un arreglo para almacenar A

```
>>> a=[-4 1 0 1 0 0 0 0;
1 -4 1 0 1 0 0 0;
0 1 -4 0 0 1 0 0;
1 0 0 -4 1 0 1 0;
0 1 0 1 -4 1 0 1;
0 0 1 0 1 -4 0 0 1;
0 0 0 1 0 0 -4 1 0;
0 0 0 0 1 0 1 -4 1;
0 0 0 0 0 1 0 1 -4]

>>b=[-100 -100 -200 0 0 -100 0 0 -100]'

» save a
» save b
» c=a\b
c =
```

```
T11 = 50.0000
T12 = 71.4286
T13 = 85.7143
T21 = 28.5714
T22 = 50.0000
T23 = 71.4286
T31 = 14.2857
T32 = 28.5714
T33 = 50.0000
```

3.3 Ejemplo III⁴

Una placa delgada a 200 °C (473 K) se coloca repentinamente en una habitación que está a 25 K, en la cual se enfría por transferencia de calor natural tanto por convección como por radiación. Se dan las siguientes constantes físicas:

$\rho = 300 \text{ kg./m}^3$ (densidad)

$V = 0.001 \text{ m}^3$ (volumen)

$A = 0.25 \text{ m}^2$ (área superficial)

$hc = 900 \text{ J/kg.K}$ (calor específico)

$\epsilon = 0.8$ (emisividad)

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ (constante de Stefan-Boltzmann)

Suponiendo que la distribución de temperatura en el metal es uniforme, la ecuación para la temperatura es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{\rho CV} \left[\epsilon \sigma (297^4 - T^4) + h_c (297 - T) \right], T(0) = 473$$

donde T es la temperatura en Kelvin. Encuentre la temperatura para $0 < t < 180$ s, utilizando el método de Runge –Kutta de segundo orden con $h=1$ s.

Solución:

El método Runge-Kutta de segundo orden se implementa como el código más abajo. Si el miembro derecho de la EDO es una función no lineal, como es caso en el presente problema, es recomendable escribir un archivo M de función para calcular el miembro derecho.

```
clear,clf,hold off
ro=300 ; V=0.001; A=0.25; C=900;
hc=30;
epsi=0.8; sig=5.67e-8 ;n=1;
h=1;T(1)=473; t(1)=0;
Arcv=A/(ro*C*V); Epsg=epsi*sig;
while t(n)<180
    k1=h*fn10_10(T(n),Arcv,Epsg,hc);
    k2=h*fn10_10(T(n)+k1,Arcv,Epsg,hc);
    T(n+1)=T(n)+0.5*(k1+k2);
    t(n+1)=t(n)+ h;
    n=n+1;
end
plot(t,T); xlabel('tiempo (s)'), ylabel('T(k)')
function f=fn10_10(TB,Arcv,Epsg,hc)
f=Arcv*(Epsg*(297^4-TB^4)+hc*(297-TB));
```

Los resultados se grafican en la figura 8.

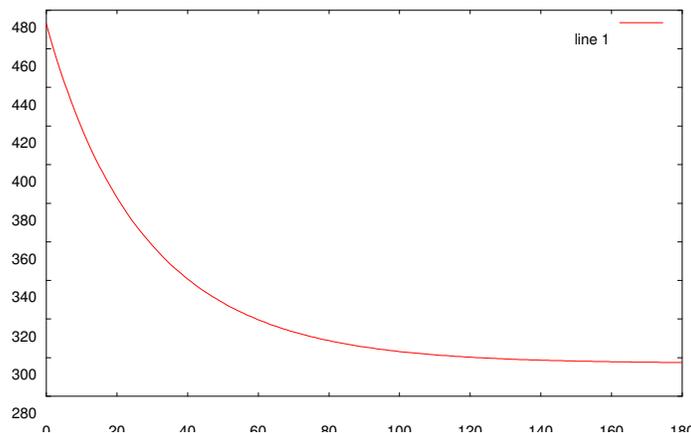


Figura.8 Temperatura de la pieza metálica

3.4 EJEMPLO IV⁴

La temperatura de una barra de hierro perfectamente aislada de 50 cm de longitud es inicialmente 200 °C. La temperatura del borde izquierdo se reduce repentinamente y se fija en 0 °C en $t = 0$ s, pero la temperatura del extremo derecho se mantiene en 200 °C. Grafique la distribución de temperatura en cada incremento de 200s hasta llegar a 1000s. Las propiedades del material son:

$$\begin{aligned} K &= 80.2 \text{ W/mK (conductividad térmica)} \\ \rho &= 7870 \text{ kg./m}^3 \text{ (densidad)} \\ c &= 447 \text{ kJ/kgK (calor específico)} \end{aligned}$$

Solución:

El método de líneas es otra aplicación de los métodos numéricos para problemas de valor inicial a los problemas de valor en la frontera. El método de líneas es apropiado sobre todo para EDP parabólicas.

Consideraremos una ecuación de conducción del calor no estacionaria:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < H \quad (1)$$

con la condición inicial:

$$T(x,0) = T_0$$

y condiciones de frontera

$$T(0,t) = T_L, \quad T(H,t) = T_R$$

donde α es una constante (difusividad térmica).

Para reducir un algoritmo de resolución, dividimos el dominio de $0 \leq x \leq H$ en $K+1$ intervalos equiespaciados, de modo que el tamaño de la malla es $\Delta x = H/(K+1)$. Los puntos se indizan con i y el valor de la temperatura en el punto i se denota por:

$$T_i(t) = T(x_i, t)$$

Podemos escribir una aproximación de semidiferencia para la ecuación (1) así:

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_{i-1}(t) - 2T_i(t) + T_{i+1}(t)) \quad 1 \leq i \leq K \quad (2)$$

con condiciones de frontera

$$T_0(t) = T_L, \quad T_{K+1}(t) = T_R$$

Podemos expresar la ecuación (2) en forma vectorial con:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{MT} + \mathbf{S} \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} T_L \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ T_R \end{bmatrix} \quad (4)$$

La ecuación anterior se puede resolver con uno de los métodos de Runge-Kutta .

Solución:

Primero dividimos la barra en diez intervalos (véase la figura 10). La difusividad térmica se calcula:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} = \frac{80.2}{(7870)(447)} = 2.28 \cdot 10^{-5}$$

La ecuación por resolver está dada por la ecuación (3) con $K = 9$. Los valores T_L y T_R de la ecuación (4) se fijan en $T_L = 0$ y $T_R = 200$ respectivamente.

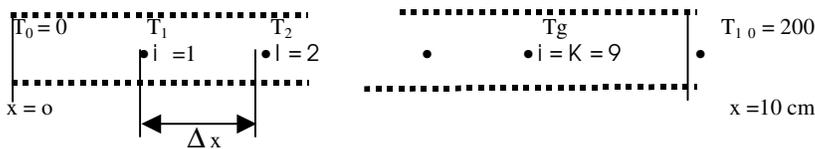


Figura 10 Una barra aislada

El programa Octave que aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden con el vector dado por la ecuación:

$$\begin{aligned} y' &= My + S \\ k_1 &= h[My + S] \\ k_2 &= h[M(y + k_1/2) + S] \\ k_3 &= h[M(y + k_2/2) + S] \\ k_4 &= h[M(y + k_3) + S] \\ y_{n+1} &= y_n + 1/6[(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)] \end{aligned}$$

se da en el listado siguiente y los resultados se grafican en la figura 11.

```

clear,hold off
T=200*ones(size(T));
n=0;t=0;h=20;m=0;
axis([0,10,0,220])
j=[0,1:length(T),length(T) +1];
T_plot=[TL,T' ,TR];
plot(j,T_plot)
text(j(2),T_plot(2),[' t=;int2str(t) , ' s])
xlabel(' Numero de punto ,')
ylabel(' T (grados C) ')
for k=1:5
    for m=1:10
        n=n+1;
        k1=h*(A*T+S);
        k2=h*(A*(T+k1/2)+S);
        k3=h*(A*(T+k2/2)+S);
        k4=h*(A*(T+k3)+S);
        T=T+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        t=h*n;
    end
    hold on
    j=[0,1:length(T),length(T)+1];
    T_plot=[TL,T' ,TR];
    plot(j,T_plot)
    text(j(k+1),T_plot(k+1),int2str(t))
end
k=80.2; ro=7870; c=447; TL=0; TR=200;
alpha=k/ro/c; Dx=.05;
A=[-2 1 0 0 0 0 0 0;...
    1 -2 1 0 0 0 0 0;...
    0 1 -2 1 0 0 0 0;...
    0 0 1 -2 1 0 0 0;...
    0 0 0 1 -2 0 0 0;...
    0 0 0 0 1 -2 0 0;...
    0 0 0 0 0 1 -2 0;...
    0 0 0 0 0 0 1 -2]*alpha/Dx^2;
S=[TL;0;0;0;0;0;0;0;TR]*alpha/Dx^2;
T=[40;40;40;40;40;40;40;40;40];

```

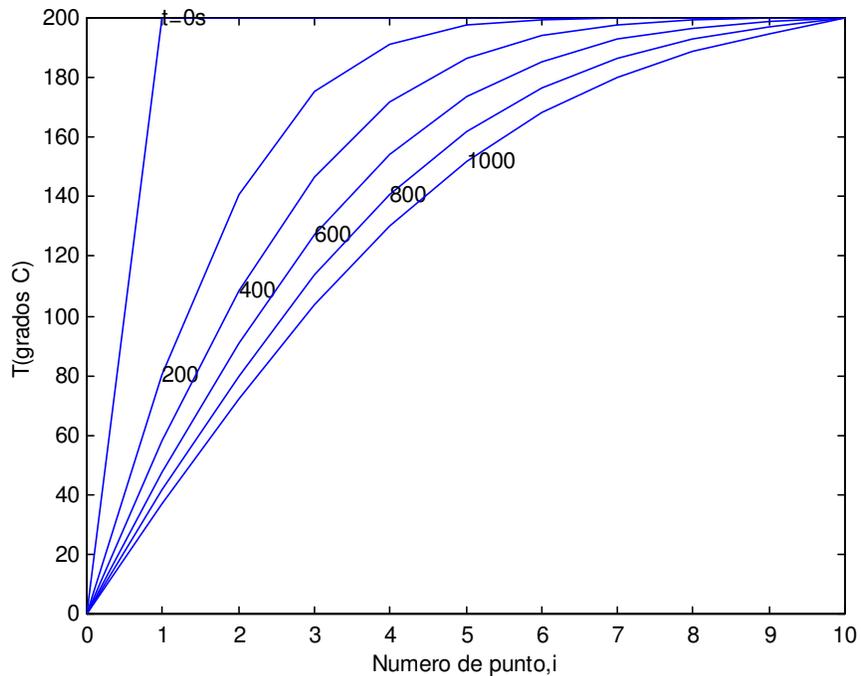


Figura 11

4 BIBLIOGRAFIA

- [1] <http://www.octave.org>
- [2] C. Henry Edwards and David E. Penney, “Ecuaciones Diferenciales”, Prentice Hall, (2001).
- [3] Steven Chapra y Raymond Canale, Métodos Numéricos para Ingenieros, McGraw-Hill, (1988).
- [4] Shoichiro Nakamura, Análisis Numerico y Visualización Grafica con MATLAB, Pearson Education , Prentice Hall, (1997).