

VIBRACIONES TRANSVERSALES DE PLACAS RECTANGULARES, CON INCLUSIONES ANISÓTROPAS COMO REFUERZOS DE MASAS ADOSADAS

Patricia M. Ciancio*, **Carlos A. Rossit**** y **Diana V. Bambill****.

*Área de Estructuras, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Avda Del Valle 5737, B7400JWI Olavarría, Buenos Aires, Argentina. Telefax: (02284)45-1055. E-mail: pciancio@fio.unicen.edu.ar
Estudiante de posgrado, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

** Instituto de Mecánica Aplicada (IMA), Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Bahía Blanca, Argentina. E-mail: carossit@criba.edu.ar, dbambil@criba.edu.ar

Palabras clave: Placas, Vibraciones de Placas, Estructuras Compuestas, Inclusiones Anisótropas, Masas adosadas.

Resumen. *La presencia de masas adosadas en elementos estructurales (vigas, placas) sometidos a excitaciones dinámicas genera un incremento severo de las tensiones. Es por ello que resulta una práctica habitual reforzar la zona de la estructura donde se adosa la masa. Con ese fin se utilizan de manera cada vez más frecuentes, materiales anisótropos como por ejemplo lo son las resinas epoxídicas. Como consecuencia, resulta de interés para el ingeniero de diseño, disponer de información sobre su comportamiento dinámico: frecuencias naturales, formas modales, etc.. En el presente trabajo se estudian las vibraciones transversales libres de placas rectangulares con inclusiones anisótropas que llevan masas rígidamente adosadas, determinándose sus frecuencias naturales. Adicionalmente se ha considerado la posibilidad de presencia de huecos que permitan el pasaje de conductos Para ello se recurre al método variacional de Rayleigh - Ritz aproximándose la amplitud de desplazamiento transversal en términos de "funciones viga". Ello conduce a series dobles truncadas que satisfacen idénticamente las condiciones en los bordes externos. .*

1 INTRODUCCIÓN

El efecto de masas concentradas en elementos estructurales vibrantes es una situación tecnológica habitual en problemas de ingeniería (desde motores sobre vigas y losas en ingeniería civil hasta el efecto de condensadores y transformadores en plaquetas de circuitos impresos en ingeniería electrónica). En virtud de ello el tema ha sido ampliamente tratado en la literatura^{1, 2}

En muchos casos resulta conveniente reforzar la zona circundante de la masa para lo que pueden utilizarse materiales de características anisótropicas (por ejemplo: resinas epoxídicas); otras veces los esfuerzos dinámicos en proximidades de la vinculación de la masa, generan daños parciales en la estructura afectando las propiedades del material que pierde su isotropía.

Ello ha motivado, que sea necesario determinar parámetros dinámicos (frecuencias naturales, formas modales, etc.), de estructuras parcial o totalmente anisótropas^{3, 4, 5}

Por otro lado, en el caso de losas puede suceder que, además del efecto de la masa concentrada, debe tenerse en cuenta la presencia de huecos que han debido ser realizados para el pasaje de conductos y canalizaciones.

En el presente trabajo se presentan valores de los primeros coeficientes de frecuencias naturales de placas rectangulares simplemente apoyadas considerando diversas posibilidades de ubicación de la masa y parche, considerándose además la posibilidad de existencia de huecos.

Para ello se ha utilizado el Método Variacional de Rayleigh – Ritz, adoptando “funciones viga” como funciones coordenadas en la aproximación de la deflexión transversal.

Ello garantiza el cumplimiento de las condiciones de borde en el contorno exterior. Obviamente dichas funciones no cumplen las condiciones de compatibilidad en la unión de materiales, no obstante la utilización del método de Rayleigh – Ritz legitima tal omisión.

2 DESARROLLO

Cuando la placa delgada de espesor uniforme h efectúa uno de sus modos normales de vibración:

$$W(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (1)$$

la funcional de energía que gobierna el problema es:

$$J[W] = U_{\max} - T_{\max} \quad (2)$$

donde:

$$U_{\max} = U_I + U_a \quad (3)$$

con U_{\max} : energía de deformación máxima de la placa, correspondiendo U_I y U_a , a las energías de deformación máximas de las porciones isótropas y anisótropas de la placa respectivamente y:

$$T_{\max} = T_i + T_a + T_m \quad (4)$$

con T_{\max} : energía cinética máxima total de la placa, correspondiendo T_i , T_a a las energías cinética máxima de las porciones isótropas y anisótropas de la placa y T_m a la energía cinética máxima de la masa concentrada.

Las expresiones de las componentes de la funcional de energía, siguiendo para el dominio anisótropo la clásica notación de Lekhnitskii⁶ son:

$$U_I = \frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot \iint_{A_I} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (5)$$

$$U_a = \frac{1}{2} \iint_{A_p} \left[D_{11} \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \cdot D_{12} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \cdot D_{66} \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4 \cdot \left(D_{16} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (6)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \cdot \rho_I \cdot h_I \cdot \omega^2 \cdot \iint_{A_I} W^2 dx dy \quad (7)$$

$$T_a = \frac{1}{2} \cdot \rho_A \cdot h_A \cdot \omega^2 \cdot \iint_{A_p} W^2 dx dy \quad (8)$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \omega^2 [W(x_m, y_m)]^2 \quad (9)$$

donde A_I es el área de la porción isótropa de la placa, A_p el área del parche anisótropo; $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\mu^2)}$ es la rigidez o flexión de la placa isótropa con E_1 en módulo de Young y μ el coeficiente de Poisson; D_{ij} son los coeficientes de rigidez de la parte anisótropa; ρ_I , ρ_A son

los valores de densidad de ambas porciones de la placa y M es la magnitud de la masa concentrada rígidamente adosada en la posición (x_m, y_m) .

No han sido tenidos en cuenta efectos de inercia rotatoria.

La función desplazamiento de la placa es aproximada por la siguiente serie de Fourier truncada:

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad (10)$$

donde cada función coordenada satisface idénticamente las condiciones de borde simplemente apoyado en el contorno exterior de la placa.

Por otro lado, la serie precedente expresa la solución exacta al problema de vibración libre de la placa isótropa rectangular. Sustituyendo (10) en las expresiones (5) a (9), componentes de (3) y (4) y requiriendo la minimización de la funcional (2)

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial B_{nm}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

se obtiene un determinante ecuación cuyas raíces son los coeficientes de frecuencias naturales de la placa compuesta:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho_I h}{D_1}} \omega a^2$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES

En primer lugar y a los efectos de verificar la aproximación de la metodología propuesta, se calcularon valores de coeficientes de frecuencias naturales de casos particulares cuyos resultados se encuentran disponibles en la literatura. Para ello se tomó $N = M = 10$ en la ecuación (10).

En las Tablas 1 y 2 se indican las comparaciones de los valores obtenidos para los casos de placa isótropa con masa centrada y placa anisótropa con masa ubicada en distintas posiciones respectivamente. Se observa que la aproximación lograda es satisfactoria desde el punto de vista ingenieril.

Se aclara, que en el caso de la Tabla 1 y para relación de lados $\lambda = a/b = 2$, no se indica el valor de $\Omega_2 = 78.957$ por tratarse de un modo de vibración que tiene una línea nodal central que contiene al punto de aplicación de la masa; por lo cual ésta no influye en el coeficiente de

frecuencia y obviamente el resultado que brinda la aproximación propuesta es exacta.

En la Tabla 2 se ha considerado para el material de la placa los siguientes valores de las constantes:

$$D_{12}/D_{11} = 0.3; \quad D_{22}/D_{11} = 0.5 = D_{66}/D_{11} \quad \text{y} \quad D_{16}/D_{11} = \frac{1}{3} = D_{26}/D_{11}$$

Tabla 1: Coeficientes de Frecuencias Naturales Ω de una placa rectangular isótropa con una masa adosada en el centro. Comparación de resultados

| $m = M/M_p$ | $\lambda = a/b = 1$ | | | | $\lambda = a/b = 2$ | | | |
|-------------|---------------------|-------------------|------------------|-------------------|---------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| | Ω_1 | | Ω_2 | | Ω_1 | | Ω_3 | |
| | Presente Estudio | Ref. ⁷ | Presente Estudio | Ref. ⁷ | Presente Estudio | Ref. ⁷ | Presente Estudio | Ref. ⁷ |
| 0.1 | 16.432 | 16.596 | 75.697 | 75.836 | 41.231 | 41.309 | 119.982 | 112.798 |
| 0.25 | 13.416 | 13.740 | 65.574 | 65.731 | 33.764 | 33.923 | 103.247 | 104.756 |
| 0.5 | 10.954 | 11.088 | 60.249 | 60.408 | 26.833 | 27.160 | 98.336 | 100.161 |
| 1 | 8.3666 | 8.4935 | 57.009 | 57.175 | 20.248 | 20.665 | 95.342 | 97.271 |

Tabla 2: Coeficientes de Frecuencias Naturales Ω de una placa cuadrada anisótropa con una masa adosada en distintas posiciones. Comparación de resultados

| x_m/a | y_m/b | $m = M/M_p$ | $\Omega = \sqrt{\frac{\rho_A h}{D_{11}}} \omega^2 a^2$ | Ref. ³ | Presente Estudio $N = M = 10$ |
|---------|---------|-------------|--|-------------------|----------------------------------|
| 0.5 | 0.5 | 0.1 | Ω_1 | 15.2 | 15.24 |
| | | | Ω_2 | 36.86 | 36.88 |
| | | | Ω_3 | 50.54 | 50.59 |
| | | 0.3 | Ω_1 | 11.8 | 11.84 |
| | | | Ω_2 | 36.86 | 36.88 |
| | | | Ω_3 | 46.47 | 46.48 |
| 0.75 | 0.5 | 0.1 | Ω_1 | 16.48 | 16.49 |
| | | | Ω_2 | 34.38 | 34.64 |
| | | | Ω_3 | 44.92 | 45.60 |
| | | 0.3 | Ω_1 | 13.66 | 13.66 |
| | | | Ω_2 | 30.69 | 30.82 |
| | | | Ω_3 | 41.96 | 42.43 |
| 0.5 | 0.75 | 0.1 | Ω_1 | 16.41 | 16.49 |
| | | | Ω_2 | 31.67 | 31.67 |
| | | | Ω_3 | 49.65 | 49.96 |
| | | 0.3 | Ω_1 | 13.43 | 13.45 |
| | | | Ω_2 | 27.82 | 28.28 |
| | | | Ω_3 | 48.95 | 49.49 |

A continuación se analizaron distintas configuraciones:

En primer lugar se determinaron coeficientes de frecuencias naturales para placas rectangulares con masa e inclusión anisótropa centrada (Figura 1).

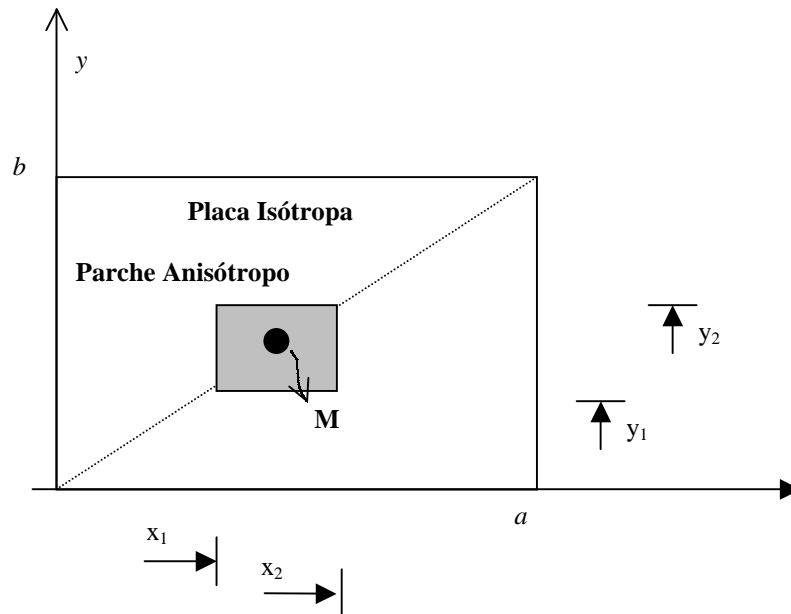


Figura 1: Placa isotrópica con masa e inclusión anisótropa centrada

Los valores se indican en la Tabla 3, siendo los parámetros que caracterizan la inclusión anisótropa los siguientes:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.3; & \frac{\rho_A}{\rho_I} &= 2.95; & \frac{D_{11}}{D_1} &= 2.856; & \frac{D_{22}}{D_1} &= 2.256; \\ \frac{D_{12}}{D_1} &= 2.162; & \frac{D_{66}}{D_1} &= 0.765; & \frac{D_{16}}{D_1} &= 0.75; & \frac{D_{26}}{D_1} &= 0.5 \end{aligned}$$

Se aclara que en este, como en todos los casos se expresa la magnitud de la masa adosada en relación a la masa real de la placa: $m = M/M_p$, considerando inclusiones anisótropas y descontando huecos.

Se han considerado distintos tamaños para los “parches” anisótropos y dos magnitudes para la relación de masas

Tabla 3: Coeficientes de Frecuencias Naturales Ω de una placa rectangular isótropa con una masa adosada e inclusión anisótropa centradas para distintas magnitudes de masa e inclusión.

| $\lambda = a/b$ | $x_1 = y_1$ $x_2 = y_2$ | m | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 | Ω_5 |
|-----------------|-------------------------|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.4 0.6 | 0.1 | 16.12 | 48.78 | 48.99 | 78.93 | 86.08 |
| | | 0.3 | 13.42 | 48.78 | 48.99 | 74.56 | 81.61 |
| | 0.3 0.7 | 0.1 | 15.81 | 45.28 | 47.01 | 76.68 | 88.88 |
| | | 0.3 | 13.42 | 45.28 | 47.01 | 72.39 | 81.91 |
| | 0.2 0.8 | 0.1 | 16.12 | 42.43 | 46.69 | 70.07 | 81.18 |
| | | 0.3 | 13.42 | 42.43 | 46.69 | 63.48 | 75.83 |
| | 0.1 0.9 | 0.1 | 16.43 | 43.13 | 49.50 | 67.97 | 80.25 |
| | | 0.3 | 13.42 | 43.13 | 49.49 | 60.17 | 76.81 |
| 3/2 | 0.4 0.6 | 0.1 | 26.27 | 61.15 | 97.72 | 100.95 | 130.27 |
| | | 0.3 | 21.68 | 61.15 | 93.86 | 97.72 | 130.27 |
| | 0.3 0.7 | 0.1 | 25.49 | 57.96 | 91.49 | 101.24 | 128.30 |
| | | 0.3 | 21.45 | 57.96 | 91.49 | 93.06 | 128.14 |
| | 0.2 0.8 | 0.1 | 25.69 | 56.30 | 86.89 | 94.07 | 119.60 |
| | | 0.3 | 21.68 | 56.30 | 84.49 | 86.89 | 119.16 |
| | 0.1 0.9 | 0.1 | 26.08 | 58.82 | 88.54 | 92.46 | 120.79 |
| | | 0.3 | 21.21 | 58.82 | 82.46 | 88.54 | 120.12 |
| 2 | 0.4 0.6 | 0.1 | 40.50 | 78.29 | 116.36 | 166.16 | 193.80 |
| | | 0.3 | 33.17 | 78.29 | 108.86 | 166.16 | 193.80 |
| | 0.3 0.7 | 0.1 | 39.11 | 74.23 | 116.79 | 155.21 | 190.63 |
| | | 0.3 | 32.86 | 74.23 | 107.98 | 155.21 | 190.63 |
| | 0.2 0.8 | 0.1 | 39.11 | 71.97 | 109.91 | 146.90 | 180.64 |
| | | 0.3 | 32.71 | 71.97 | 99.85 | 146.90 | 180.58 |
| | 0.1 0.9 | 0.1 | 39.37 | 75.03 | 109.27 | 148.39 | 180.44 |
| | | 0.3 | 31.78 | 75.03 | 99.09 | 148.39 | 180.08 |

Posteriormente se analizó el caso en que la masa y la inclusión anisótropa se encuentran desplazados del centro de la placa (Figura 2), manteniéndose la ubicación central de la masa en la inclusión y el tamaño relativo de ésta ($0.4 a \times 0.4 b$) con respecto a la placa.

Se han considerado distintas posiciones y magnitudes para la masa concentrada.

Los resultados obtenidos se indican en la Tabla 4.

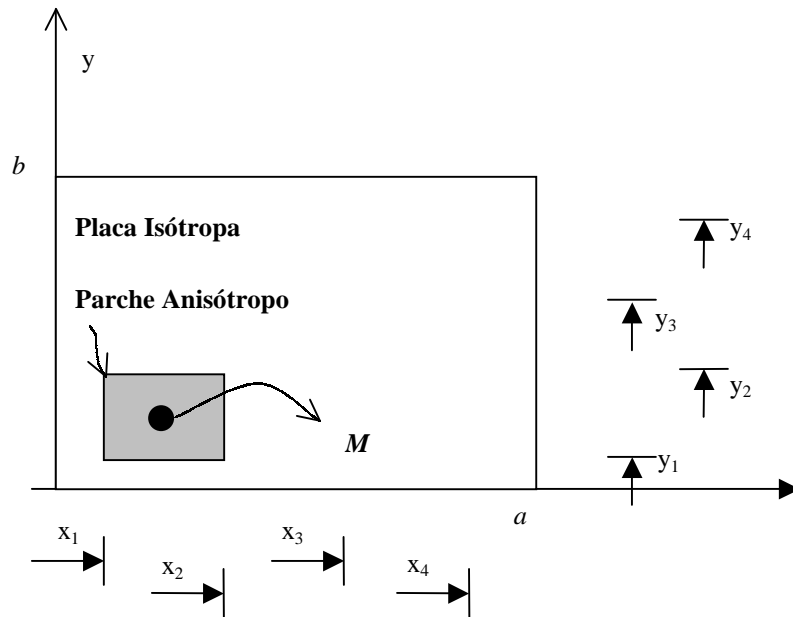


Figura 2: Placa isótropa con masa e inclusión anisótropa desplazadas del centro de la placa

Tabla 4: Coeficientes de Frecuencias Naturales Ω de la placa rectangular isótropa con masa adosada e inclusión anisótropa desplazadas del centro.

| x_m | y_m | $x_1 - x_2$ | $y_1 - y_2$ | $\lambda = a/b$ | m | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 | Ω_4 |
|-------|-------|-------------|-------------|-----------------|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.5 | 0.75 | 0.3 - 0.7 | 0.55-0.95 | $\lambda = 1$ | 0.1 | 17.029 | 43.243 | 48.579 | 77.265 | 89.386 |
| | | | | | 0.3 | 15.166 | 39.497 | 48.477 | 77.201 | 83.606 |
| | | | | $\lambda = 3/2$ | 0.1 | 27.568 | 60.663 | 86.948 | 107.796 | 125.778 |
| | | | | | 0.3 | 24.494 | 60.580 | 76.941 | 105.97 | 125.69 |
| 0.5 | 0.8 | 0.3 - 0.7 | 0.6 - 1.0 | $\lambda = 1$ | 0.1 | 17.606 | 43.011 | 49.193 | 77.265 | 87.749 |
| | | | | | 0.3 | 15.811 | 38.729 | 49.092 | 77.006 | 80.312 |
| | | | | $\lambda = 3/2$ | 0.1 | 28.460 | 61.484 | 86.544 | 109.27 | 125.698 |
| | | | | | 0.3 | 25.884 | 61.400 | 75.960 | 107.657 | 125.579 |
| 0.8 | 0.8 | 0.6 - 1.0 | 0.6 - 1.0 | $\lambda = 1$ | 0.1 | 18.708 | 44.609 | 48.989 | 73.959 | 94.127 |
| | | | | | 0.3 | 17.888 | 39.243 | 48.989 | 67.971 | 90.609 |
| | | | | $\lambda = 3/2$ | 0.1 | 30.495 | 58.480 | 92.466 | 107.517 | 121.326 |
| | | | | | 0.3 | 28.982 | 54.037 | 85.264 | 103.875 | 118.068 |
| 0.75 | 0.75 | 0.55-0.95 | 055-0.95 | $\lambda = 1$ | 0.1 | 17.888 | 44.272 | 48.373 | 74.565 | 93.488 |
| | | | | | 0.3 | 16.432 | 38.987 | 48.270 | 70.143 | 92.249 |
| | | | | $\lambda = 3/2$ | 0.1 | 28.982 | 57.879 | 91.651 | 106.854 | 121.491 |
| | | | | | 0.3 | 26.457 | 53.479 | 85.790 | 104.499 | 117.983 |

Finalmente, se ha considerado la posibilidad de que además del “parche” anisótropo, la placa presente un hueco (Figura 3).

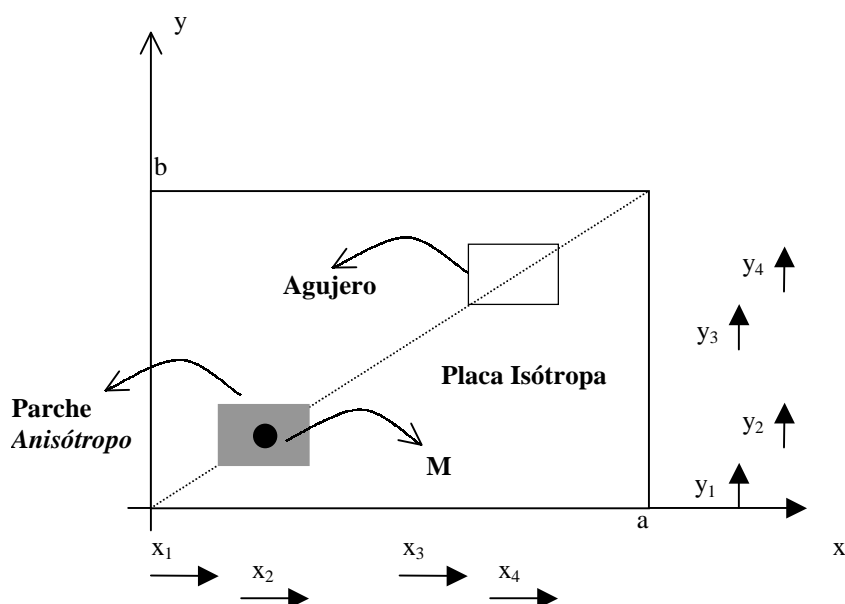


Figura 3: Placa isotrópica con masa e inclusión anisótropa y hueco con sus centros dispuestos sobre la diagonal.

Se obtuvieron valores para el caso en que $x_1=y_1=0.15$, $x_2=y_2=0.35$, $x_3=y_3=0.65$, $x_4=y_4=0.85$, variando la magnitud de m . Las propiedades mecánicas de la inclusión son las mismas de casos anteriores. Los resultados se vuelcan en la Tabla 5.

Tabla 5: Coeficientes de Frecuencias Naturales Ω de la placa rectangular isotrópica con masa adosada e inclusión anisótropa desplazadas del centro.

| $\lambda = a/b$ | m | Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 |
|-----------------|------|------------|------------|------------|------------|
| $1/2$ | 0 | 11,747 | 19,053 | 31,686 | 40,890 |
| | 0.25 | 10,440 | 16,823 | 30,017 | 37,108 |
| | 0.5 | 8,9443 | 15,811 | 28,983 | 35,917 |
| 1 | 0 | 18,974 | 47,539 | 48,477 | 78,677 |
| | 0.25 | 16,733 | 37,947 | 48,477 | 71,344 |
| | 0.5 | 15,166 | 34,059 | 48,477 | 69,570 |
| $3/2$ | 0 | 30,659 | 60,083 | 95,446 | 110,45 |
| | 0.25 | 27,203 | 52,345 | 85,557 | 108,26 |
| | 0.5 | 24,290 | 48,580 | 82,280 | 107,61 |
| 2 | 0 | 46,904 | 76,158 | 127,28 | 161,86 |
| | 0.25 | 41,231 | 67,082 | 120,33 | 146,29 |
| | 0.5 | 36,055 | 63,246 | 116,19 | 142,48 |

Se concluye en que la aplicación del Método de Rayleigh- Ritz, recurriendo a funciones viga para la aproximación de la amplitud de deformación, brinda un procedimiento eficaz para atacar en forma directa la solución de problemas de alta complejidad analítica como los planteados , donde incluso resulta sumamente dificultosa su resolución por elementos finitos.

Lógicamente, la precisión mejorará si se incrementa el número de términos en la aproximación

4 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido auspiciado por el CONICET (Proyecto PICT 02152) y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur. Los autores agradecen al Dr. Patricio Laura las valiosas sugerencias recibidas y su permanente guía y estímulo.

5 REFERENCIAS

- [1] P. A. A. Laura, J. L. Pombo and E. A. Susemihl. “A note on the vibrations of a clamped – free beam with a mass at the free - end”. *Journal of Sound and Vibration* **37**, 161–168 (1974).
- [2] I. A. Karnovsky and O. I. Lebed. *Formulas for Structural Dynamics*, Mc Graw Hill Book Co., New York, N.Y. (2001).
- [3] H. A. Larrondo, D. R. Avalos and P. A. A. Laura. “Transverse vibrations of simply supported anisotropic rectangular plates carrying an elastically mounted concentrated mass”. *Journal of Sound and Vibration* **215**(5), 1195-1202, (1998).
- [4] D. R. Avalos, H. A. Larrondo and P. A. A. Laura. “Analysis of vibrating rectangular anisotropic plates with free – edge holes”. *Journal of Sound and Vibration* **222**(4), 691-695. (1999).
- [5] D. V. Bambill, P. M. Ciancio and C. A. Rossit. “Vibraciones Transversales libres de placas rectangulares simplemente apoyadas con un “parche” anisótropo”. *Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Vol. **2**, 1123-1229. (2002).
- [6] S. G. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates*, Gordon and Breack Science, New York. 1968
- [7] D. R. Avalos, H.A. Larrondo and P.A.A. Laura “Vibrations of a Simply Supported Plate Carrying an Elastically Mounted Concentrated Mass”, *Ocean Engineering*, **20**, 195-205, (1993).