

SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS EN LA SIMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS SIMPLES

SOFTWARE FOR THE EVALUATION OF THE INFLUENCE OF THE FORMULATION OF FINITE ELEMENTS IN THE SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF SIMPLE STRUCTURES

Santiago Zera^a, Daniel E. López^{a,b} y Carlos J. Leiva^{a,b}

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Centro Universitario, Mendoza, Argentina, santizera@gmail.com.ar, <https://ingenieria.uncuyo.edu.ar/>

^bCátedra Estructuras Laminadas, daniel.lopez@ingenieria.uncuyo.edu.ar, carlos.leiva@ingenieria.uncuyo.edu.ar

Palabras clave: Método de Elementos Finitos, software educativo, tensión plana, deformación plana, placas

Resumen. El uso de software basado en el Método de los Elementos Finitos (MEF) supone el conocimiento cabal de los distintos tipos de elementos disponibles y de las variables que se encuentran implícitas en su formulación, como la discretización del campo incógnita, las funciones de forma, el esquema de integración numérica y la compatibilidad inter-elemental, entre otras. Hoy en día, el MEF es el método más utilizado para análisis estructural en ingeniería. Sin embargo, sus usuarios no siempre tienen presentes las variables involucradas en su formulación ni entienden tampoco su influencia en los resultados, principalmente porque el software disponible no suele permitir la interacción con ellas. En este trabajo se desarrolla un software para la enseñanza del MEF que presenta al usuario en forma explícita las variables mencionadas y le permite interactuar con ellas para evaluar su influencia en la modelación. Dicho software consiste en un motor de cálculo que, vinculado con herramientas de pre y post proceso, permite el análisis de estructuras en estados planos de tensiones y deformaciones y de placas planas sometidas a flexión.

Keywords: Finite Element Method, educational software, plain stress, plain strain, plates

Abstract. The use of software based on the Finite Element Method (FEM) assumes a thorough knowledge of the different types of elements available and of the variables that are implicit in their formulation, such as the discretization of the unknown field, the shape functions, the numerical integration scheme and the inter-elemental compatibility, among others. Nowadays, FEM is the most widely used method for structural analysis in engineering. However, its users are not always aware of the variables involved in its formulation and do not always understand their influence on the results, mainly because the available software does not usually allow interaction with them. In this work a software for FEM teaching is developed that explicitly presents the mentioned variables to the user and allows him to interact with them to evaluate their influence on the modeling. This software consists of a calculation engine that, linked to pre and post processing tools, allows the analysis of structures in plane states of stress and strain and plates subjected to bending.

1 INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos Finitos (MEF) es probablemente el método numérico más utilizado en la actualidad en los diversos campos de la ingeniería donde se necesita llevar a cabo algún tipo de análisis estructural. Su utilización requiere de parte del usuario un conocimiento cierto de las variables implícitas en su formulación, como son, por ejemplo, el campo incógnita adoptado (desplazamientos, tensiones, etc.) y las funciones de forma utilizadas para su discretización, o el esquema de integración numérica utilizado para el cálculo de las matrices de rigidez. Sin embargo, no son pocos los usuarios que no reconocen la importancia de dichas variables ni su influencia en los resultados de las simulaciones. Se entiende que parte de esto se debe a que el software disponible generalmente no permite la interacción directa del usuario con las variables implícitas en la formulación de los elementos.

Por esta razón, en este trabajo se presenta un software desarrollado por los autores que permite al usuario manipular en forma explícita algunas de las variables implícitas en la formulación del MEF para así poder analizar su influencia en el comportamiento de estructuras bidimensionales simples. De esta manera, se supone que las capacidades ofrecidas por el software permiten mejorar las competencias y comprensión de los usuarios (principalmente estudiantes) en torno al MEF.

El software que aquí se presenta surgió a partir de las clases dictadas en las materias Análisis Estructural I, Análisis Estructural II y Estructuras Laminadas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo (UNCuyo) en las cuales se profundiza en torno al MEF y su formulación.

2 DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE

El software presentado en este trabajo permite realizar análisis estructural elástico lineal de estructuras bidimensionales planas en estados planos de tensión y deformación así como de estructuras de placa plana sometidas a flexión. Dicho software, denominado Z-MEF, permite manipular en forma explícita variables implícitas en la formulación del método de elementos finitos como son la discretización del campo incógnita, funciones de forma y esquema de integración para el cálculo de matrices de rigidez.

Como es sabido, cualquier proceso de cálculo mediante MEF consta de tres etapas principales: *pre proceso*, *cálculo* y *post proceso*. En el caso de Z-MEF, las etapas de pre y post proceso de los datos del problema se realizan dentro del ambiente que proporciona el software de libre acceso GiD¹, un programa desarrollado especialmente por CIMNE² para el pre y post procesamiento de modelos de elementos finitos. Para su vinculación con motores de cálculo desarrollados por los usuarios, GiD utiliza lo que se conoce como *problemtipe*: un conjunto de archivos ubicados en un mismo directorio, a partir de los cuales se definen los distintos parámetros que es posible ingresar y manipular en el modelo. En el caso de Z-MEF, el mismo está compuesto por dos módulos, cada uno de los cuales representa un *problemtipe* en GiD. Estos son:

- **Z-MEF 2D**: para el análisis de estructuras bidimensionales en estados planos de tensión o deformación.
- **Z-MEF Losas**: para el análisis de placas sometidas a flexión.

Los motores de cálculo de ambos módulos están escritos en el lenguaje de programación Python y ambos están estructurados en una forma similar: un archivo principal **main.py** que invoca sucesivamente a tres objetos que llevan adelante los distintos cálculos y tareas del

¹ GiD SIMULATION, <https://www.gidsimulation.com/>

² CIMNE, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, <https://www.cimne.com/>

programa. Estos tres objetos son:

- **Input:** El encargado de leer y almacenar la información desde el archivo de entrada generado por GiD en la etapa de pre proceso.
- **Solver:** Toma la información almacenada en el objeto Input y genera la representación del modelo: crea los distintos elementos, calcula sus matrices de rigidez y vectores de carga, ensambla el sistema de ecuaciones lineales y lo resuelve para luego calcular deformaciones, tensiones, etc.
- **Output:** Este objeto toma los resultados obtenidos por el objeto Solver y crea el archivo de salida que luego es interpretado por la interfaz de post proceso de GiD.

El esquema de la [Figura 1](#) ilustra el proceso de cálculo de un módulo de Z-MEF y su vinculación con GiD. Se indican también los archivos relacionados con las distintas etapas del programa.

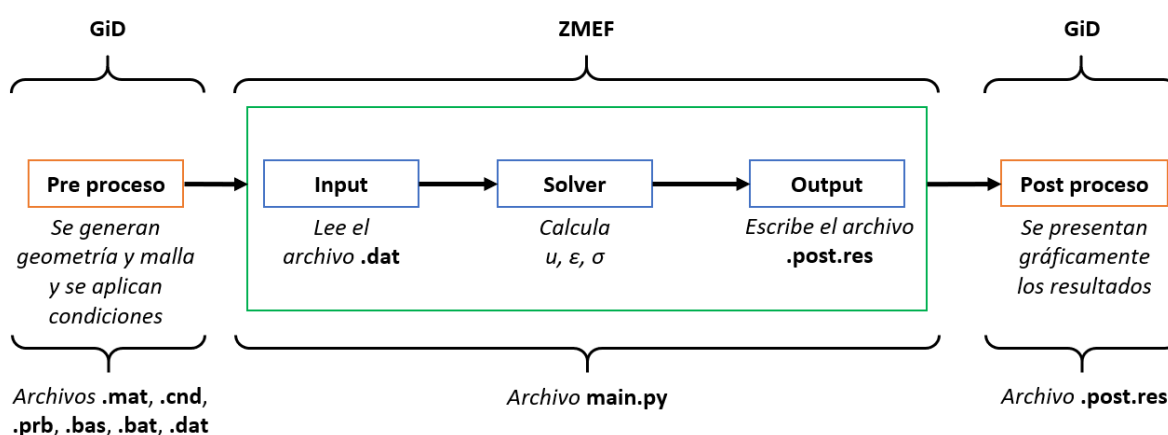


Figura 1: Esquema conceptual de la organización de un módulo del software Z-MEF y su vinculación con GiD

A continuación se describen en detalle los dos módulos (problemtypes) que componen el software Z-MEF, haciendo hincapié en las posibilidades que cada uno de ellos ofrece al usuario.

2.1 Z-MEF 2D

Este problemtype permite realizar el análisis de estructuras bidimensionales en estados planos de tensión o deformación. La teoría a partir de la cual se codificó este módulo del programa se basa en [Oñate \(1995\)](#) y en [Zienkiewicz y Taylor \(2005\)](#).

2.1.1 Pre proceso

Luego de seleccionar este problemtype en la interfaz de GiD, conviene, en primer lugar, definir el tipo de problema de elasticidad bidimensional que se va a analizar, esto es, *tensión plana* o *deformación plana*.

Cualquiera sea el tipo de problema elegido, se pueden aplicar *condiciones de borde* de apoyo rígido o elástico (asignado un determinado valor de rigidez al apoyo), o incluso imponer valores no nulos de desplazamiento.

En cuanto a las *cargas*, es posible aplicar fuerzas puntuales o fuerzas distribuidas sobre lados o superficies. Tanto las cargas puntuales como las distribuidas se definen especificando sus componentes x e y en el sistema de coordenadas global y en las distintas unidades que el programa permite manejar. En el caso de cargas sobre bordes, las mismas pueden especificarse también en términos de una componente normal y otra tangencial al borde o lado sobre el cual se aplican dichas cargas.

Se destaca que tanto las condiciones de borde cinemáticas como las fuerzas pueden aplicarse sobre puntos o líneas de la *geometría* del modelo (en cuyo caso, se transfieren luego a sus nodos asociados en la malla); o pueden aplicarse directamente a los nodos de la *malla*. Esto representa una posibilidad que no todos los programas comerciales suelen otorgar.

Respecto a los *materiales*, el problemtype viene con materiales pre cargados, pero el usuario puede fácilmente definir sus propios materiales a través de la interfaz de GiD. En todos los casos, el modelo de material es elástico, lineal e isótropo, de modo que es posible asignar módulo de elasticidad E , coeficiente de Poisson ν y espesor³.

Para la generación de la *malla* de elementos finitos, en este problemtype es posible elegir entre los siguientes tipos de elementos:

- Elemento triangular lineal de 3 nodos
- Elemento triangular cuadrático de 6 nodos
- Elemento cuadrilátero lineal de 4 nodos
- Elemento cuadrilátero cuadrático de 8 nodos
- Elemento cuadrilátero cuadrático de 9 nodos

Por último, para cada tipo de elemento seleccionado es posible definir también la cantidad de *puntos de integración* usados en la cuadratura de Gauss para el cálculo de las matrices de rigidez. Para elementos triangulares es posible elegir entre 1, 3 y 6 puntos de integración; mientras que para elementos cuadriláteros es posible elegir entre 1, 4 y 9 puntos de integración.

2.1.2 Solver

Como se describió previamente, el motor de cálculo de este módulo está escrito en el lenguaje de programación Python y consta de un archivo principal desde el cual se lee la información de entrada, se realizan los cálculos y se escribe el archivo de salida. En primer lugar, el programa lee desde el archivo de entrada generado por GiD toda la información relacionada con el modelo (tipos de elementos, conectividades, materiales, condiciones, cargas, etc.) y luego realiza todos los cálculos relacionados con el MEF; esto es: crea los distintos elementos, calcula matrices de rigidez y vectores de los distintos elementos.

En la estructura del código, cada tipo de elemento finito es representado por una clase de Python, y cada elemento de la malla del modelo se instancia como un objeto según el tipo de elemento que le corresponde (triangular 3 nodos, cuadrilátero de 4 nodos, etc.). Cada uno de estos objetos cuenta con métodos para la evaluación de sus funciones de forma, matrices de rigidez, etc. Para el cálculo de la matriz de rigidez y vectores de carga de cada elemento se utiliza la cuadratura de Gauss según la cantidad de puntos de integración definida por el usuario en la etapa de pre proceso dentro de GiD.

A continuación, las matrices de rigidez y vectores de carga de los elementos se ensamblan para formar el sistema de ecuaciones lineales que representa el comportamiento de la estructura. Luego, ya resuelto el sistema, habiendo obtenido los desplazamientos en cada nodo de la malla, se calculan deformaciones y tensiones en el interior de cada uno de los elementos. En este aspecto, el programa es capaz de calcular:

- Deformaciones ε_x , ε_y y γ_{xy} en las direcciones locales x e y .
- Tensiones σ_x , σ_y y τ_{xy} en las direcciones locales x e y .

Todas estas magnitudes se evalúan en los puntos de Gauss definidos por el usuario en la interfaz de GiD durante el pre proceso.

³ El espesor solo tiene influencia en el caso de problemas de tensión plana, no en problemas de deformación plana.

2.1.3 Post proceso

Una vez realizados los cálculos de desplazamientos, deformaciones y tensiones, el programa escribe el archivo de salida que luego es interpretado por GiD. A partir de dicho archivo, GiD es capaz de presentar la configuración deformada de la estructura, así como mapas de color con los distintos resultados.

A modo ilustrativo, en la [Figura 2](#) se presentan mapas de color de distintas tensiones que resultan de un análisis realizado con Z-MEF 2D. Los resultados corresponden a una viga en voladizo de 3m y sección 30 cm x 40 cm sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de 1 kN/m sobre su borde superior. El material asignado tiene $E = 21.000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.20$ y espesor 30 cm, correspondiente al ancho de la sección rectangular.

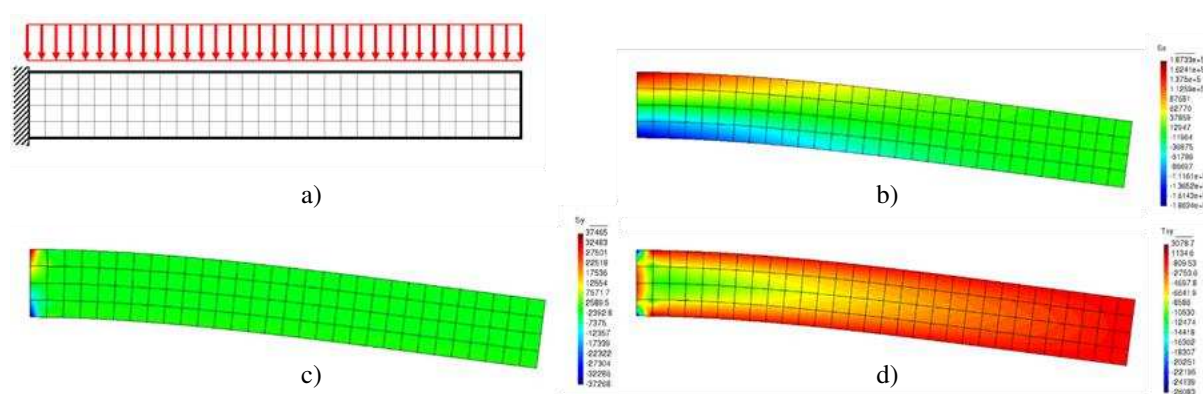


Figura 2: a) Esquema de la viga analizada, b) Tensiones σ_x , c) Tensiones σ_y , d) Tensiones τ_{xy}

2.2 Z-MEF Losas

Este problemtype permite realizar el análisis de estructuras bidimensionales de placas sometidas a flexión. El mismo se codificó en base a los desarrollos que figuran en [Oñate \(1995\)](#) y en [Zienkiewicz y Taylor \(2000\)](#).

2.2.1 Pre proceso

En este módulo las placas pueden modelarse como *placas delgadas*, según la teoría de Kirchhoff, o como *placas gruesas*, según la teoría de Reissner-Mindlin. El tipo de placa a utilizar se define en la interfaz de GiD.

Pueden aplicarse *condiciones de borde* de apoyo rígido o elástico sobre el desplazamiento vertical y los giros en torno a los ejes globales x e y de los nodos. Además pueden imponerse valores no nulos de estos corrimientos. En cuanto a las *cargas*, es posible aplicar fuerzas y momentos puntuales, así como fuerzas verticales uniformemente distribuidas sobre la placa.

Tanto las condiciones de borde cinemáticas como las fuerzas pueden aplicarse sobre puntos o líneas de la *geometría* del modelo o pueden aplicarse directamente a los nodos de la *malla*.

Respecto a los *materiales*, el modelo de material es elástico, lineal e isótropo, y pueden ser modificados a gusto por el usuario en la interfaz de pre proceso.

Para la generación de la *malla* de elementos finitos, en este problemtype es posible elegir entre los siguientes tipos de elementos:

- Elemento rectangular lineal de 4 nodos de placa delgada⁴
- Elemento cuadrilátero lineal de 4 nodos de placa gruesa
- Elemento cuadrilátero cuadrático de 8 nodos de placa gruesa

⁴ También conocido como MZC. Ver [Oñate \(1995\)](#).

- Elemento cuadrilátero cuadrático de 9 nodos de placa gruesa

Para cada uno de estos tipos de elementos es posible definir la cantidad de *puntos de integración* usados en la cuadratura de Gauss para el cálculo de sus matrices de rigidez. Además, en el caso de los elementos de placa gruesa es posible distinguir entre puntos de Gauss utilizados para calcular la *componente de flexión* K_f y puntos de Gauss utilizados para la *componente de corte* K_c . Esto permite adoptar esquemas de integración *completa, selectiva y reducida* (Oñate, 1995).

2.2.2 Solver

La estructura del motor de cálculo de este problemtype es la misma que la presentada anteriormente para Z-MEF 2D. Se destaca que, según la formulación elegida para los elementos, los grados de libertad de los nodos de todos los elementos son un desplazamiento normal a la superficie de la placa y dos giros, uno en torno a cada eje global.

Una vez que se han evaluado las matrices de rigidez y vectores de carga de los elementos, se ensambla el sistema de ecuaciones lineales que representa el comportamiento de la estructura. Luego, ya resuelto el sistema, habiendo obtenido los desplazamientos en cada nodo de la malla, se calculan deformaciones y tensiones en cada uno de los elementos. El programa es capaz de calcular:

- Deformaciones de flexión ε_x , ε_y y γ_{xy} en las direcciones x e y sobre las caras superior e inferior del elemento.
- Deformaciones de corte γ_{xz} e γ_{yz} .
- Tensiones de flexión σ_x , σ_y y τ_{xy} en las direcciones x e y sobre las caras superior e inferior del elemento.
- Tensiones de corte τ_{xz} e τ_{yz} .
- Momentos flectores M_x y M_y .
- Momento torsor M_{xy} en torno a un eje perpendicular a la placa.
- Cortes Q_x y Q_y sobre caras paralelas a los ejes x e y, respectivamente.

Todas estas magnitudes se evalúan en los puntos de Gauss definidos por el usuario en la interfaz de GiD durante el pre proceso y se muestra luego en la interfaz de post proceso.

2.2.3 Post proceso

Al igual que en Z-MEF 2D, una vez completados los cálculos, los resultados son presentados en la interfaz gráfica de post proceso de GiD. Como ejemplo, en la [Figura 3](#) se ilustran los resultados obtenidos del análisis de una losa cuadrada simplemente apoyada en dos bordes opuestos y sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida de 1 kN/m². La misma tiene 4m de lado y un espesor de 20 cm. El material asignado tiene $E = 21.000$ MPa y $\nu = 0.20$. Se discretiza con una malla de 8 x 8 elementos cuadriláteros de 9 nodos con integración completa.

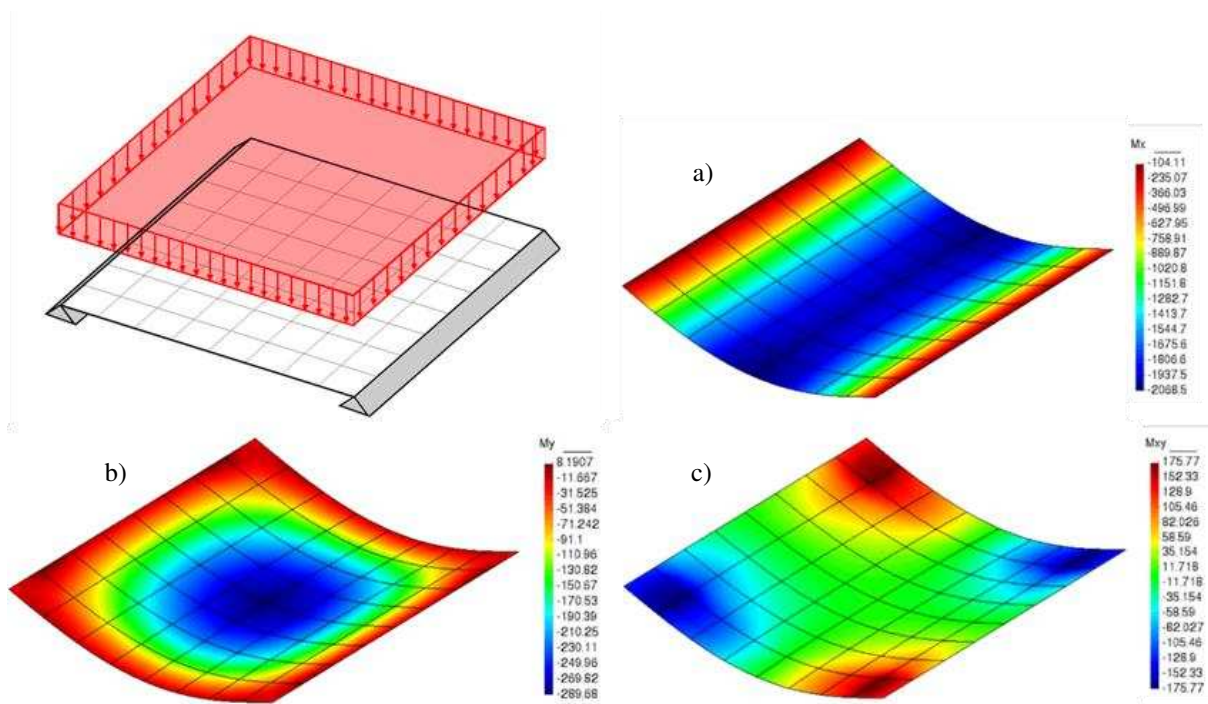


Figura 3: a) Momento M_x paralelo al eje x, b) Momento M_y paralelo al eje y, c) Momento torsor M_{xy}

3 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se presentan a continuación ejemplos de uso del programa Z-MEF. En estos ejemplos se busca ilustrar algunos fenómenos numéricos que es posible captar en herramientas de software educativo como la que se presenta en este trabajo.

3.1 Placa empotrada en un solo borde

En este primer ejemplo, extraído de [Rao y Shrinivasa \(2001\)](#) se analiza el problema que se ilustra en el esquema de la [Figura 4](#). Se trata de un problema de tensión plana en el que una placa empotrada en extremo se ve sometida a la acción de una carga puntual paralela a su eje. La placa tiene un alto de 2 unidades y un largo de 6 unidades, con un espesor de 0.1 unidades. Su material tiene $E = 1 \cdot 10^7$ y $\nu = 0.2$. La carga puntual tiene un valor de 1. Se discretiza el dominio con una malla de 2×6 elementos cuadriláteros según se indica en la [Figura 4](#).

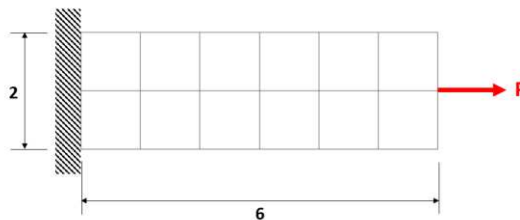


Figura 4: Placa empotrada en uno de sus extremos

La [Figura 5](#) presenta los mapas de tensiones σ_x que se obtienen en la placa con distintos tipos de elementos y esquemas de integración.

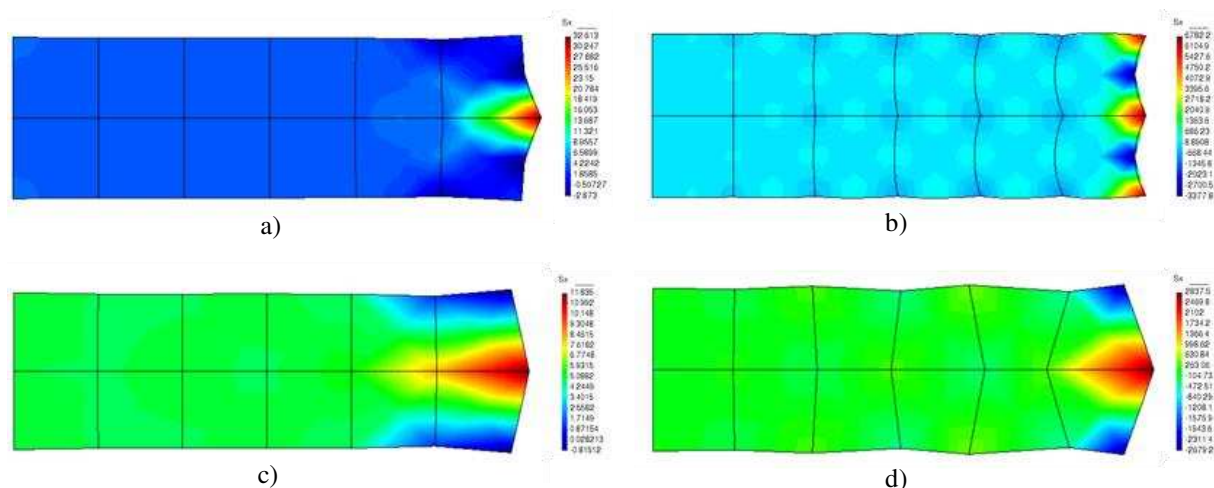


Figura 5: Tensiones σ_x , a) 9 nodos e integración completa, b) 9 nodos e integración reducida, c) 4 nodos e integración completa, d) 4 nodos e integración reducida

En la [Figura 5](#), particularmente en las configuraciones deformadas b) y d), en las cuales se ha aplicado integración reducida, se observa que se presenta un fenómeno conocido en la literatura como *reloj de arena* (*hourglass* en inglés). Esto se debe a que el esquema de integración utilizado en estos elementos induce *modos de energía nula*, los cuales producen desplazamientos y tensiones erróneas en zonas alejadas del empotramiento.

A los fines de este trabajo, se destaca simplemente que una herramienta de software como la presentada aquí permite captar estos fenómenos, dando una mejor comprensión a los usuarios respecto a la influencia que los mismos pueden tener en los resultados numéricos. Para mayor información en torno al *hourglass* remitirse a [Oñate \(1995\)](#) o [Irons \(1980\)](#).

3.2 Deflexión de placa cuadrada en flexión para distintas relaciones lado/espesor

En este ejemplo, tomado de [Oñate \(1995\)](#), se analiza lo que sucede para distintas relaciones lado/espesor (L/t) en una placa plana cuadrada empotrada en sus cuatro lados, discretizada con una malla de 8×8 elementos de placa gruesa, y sobre la cual se aplica una carga uniforme ([Figura 6](#)). Se estudia lo que sucede con la deflexión en el centro de la losa para distintos tipos de elementos y distintos esquemas de integración de las matrices de rigidez. El gráfico de la [Figura 7](#) resume los resultados obtenidos.

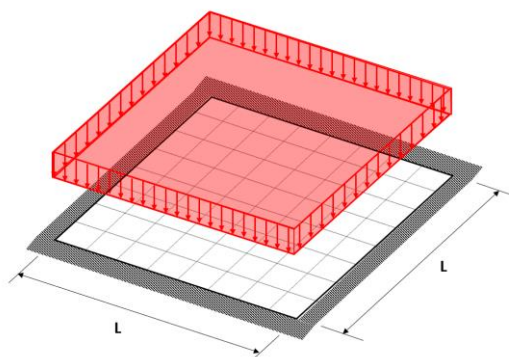


Figura 6: Placa cuadrada empotrada en sus cuatro lados con carga uniformemente distribuida sobre su superficie

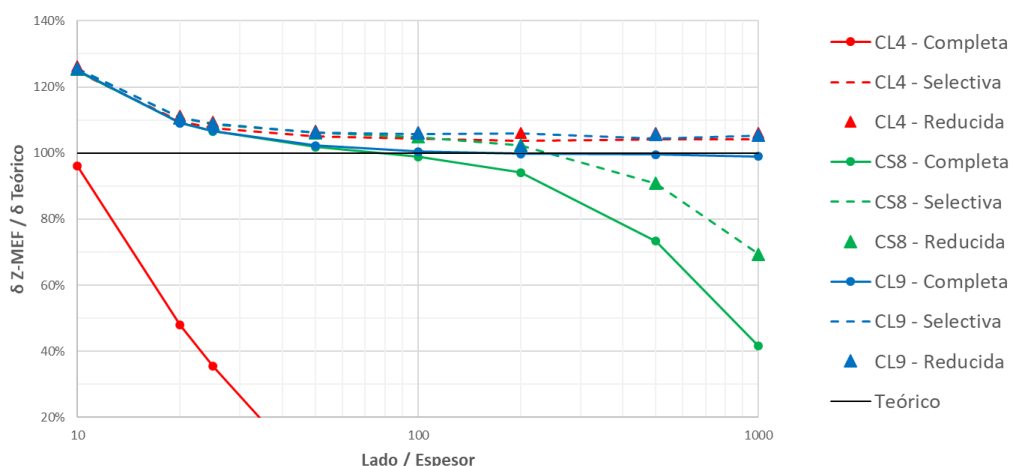


Figura 7: Deflexión en el centro de la placa para distintas relaciones lado/espesor

En el gráfico de la [Figura 7](#):

- **CL4**: Elemento cuadrilátero lagrangeano lineal de 4 nodos
- **CS8**: Elemento cuadrilátero serendípito cuadrático de 8 nodos
- **CL9**: Elemento cuadrilátero lagrangeano cuadrático de 9 nodos
- **Completa**: Tanto K_f como K_c se integran en forma exacta.
- **Selectiva**: K_f se integra en forma exacta, pero K_c se integra en forma reducida.
- **Reducida**: Tanto K_f como K_c se sub-integran.

El resumen presentado en el gráfico de la [Figura 7](#) es un claro ejemplo de los tipos de análisis que se pueden realizar con herramientas educativas como Z-MEF. En él se observan las diferentes respuestas que ofrecen los distintos tipos de elementos en función del esquema de integración adoptado.

4 DESARROLLOS FUTUROS

Al momento de la publicación de este trabajo ya se ha comenzado a trabajar en la extensión del software existente a problemas de estructuras tridimensionales de lámina. En efecto, tanto el código en el que se realizan los cálculos propios del MEF como los diferentes archivos generados para lograr la vinculación del motor de cálculo con el software de pre y post proceso GiD son de gran utilidad a la hora de desarrollar un nuevo software capaz de abordar problemas de cáscaras tridimensionales. En particular, el hecho de haber codificado por separado elementos capaces de representar un estado de tensión plana y elementos de placa (delgada o gruesa) ya permite pensar en la programación de los denominados *elementos de lámina plana* (Oñate, 1995). Se destaca además la posibilidad de incorporar el elemento *semiloof* presentado en Irons (1980).

Por otro lado, se entiende que este mismo software, abocado al análisis de estructuras bidimensionales, puede extenderse incluyendo la posibilidad de manipular otra variable implícita en la formulación del método de elementos finitos como es la *elección del campo incógnita*. En efecto, el actual programa solo permite el uso de desplazamientos como incógnitas del sistema de ecuaciones lineales. La posibilidad de incluir elementos de *formulación mixta*, donde las incógnitas son desplazamientos y tensiones, puede ofrecer a los usuarios del programa una oportunidad más que interesante en la evaluación de la influencia de esta variable en los resultados de simulaciones.

5 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un software de análisis estructural basado en el método de elementos finitos que permite la manipulación en forma explícita de distintas variables implícitas en la formulación del método, como son las funciones de forma y el esquema de integración numérica. Un desarrollo como este pone al alcance del usuario la posibilidad de manipular en forma directa algunas de las variables implícitas en la formulación del MEF y le permite así adquirir una mayor comprensión del método y de la influencia que las mencionadas variables tienen en las simulaciones del comportamiento estructural. Esto representa una capacidad indispensable para los estudiantes del MEF. La manipulación directa por parte de los usuarios de las variables implícitas en la formulación del método les permite a aquellos mejorar sus competencias en torno al MEF y su comprensión respecto a la influencia que dichas variables tienen en los resultados de simulaciones numéricas del comportamiento estructural.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo para llevar adelante este proyecto de investigación. En particular, el primer autor agradece también el apoyo económico de la Facultad para poder viajar a exponer el trabajo.

REFERENCIAS

- Irons, B., and Ahmad, S., *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood Limited, 1980.
- Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. CIMNE, 1995.
- Rao, K.M., and Shrinivasa, U., A set of pathological tests to validate new finite elements. *Sadhana*, 26:549–590, 2001.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The Finite Element Method, Volume I*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., *The Finite Element Method, Volume II*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2000.