

## CONTROL DE ROTACIONES DEL PÉNDULO PARAMÉTRICO BASADO EN LA VELOCIDAD

### VELOCITY-BASED ROTATION CONTROL OF THE PARAMETRIC PENDULUM

Franco E. Dotti<sup>a,b</sup>, Sofía A. Luna<sup>a</sup>, Lucas Oxarango<sup>a,b</sup>, Lisandro M. Rojas<sup>a,b</sup>, J. Nicolás Virla<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET, Argentina*

**Palabras clave:** Péndulo paramétrico, control de rotaciones, dinámica no lineal.

**Resumen.** En este artículo se introduce un modelo matemático simplificado de una técnica de control, cuyo objetivo es lograr un movimiento de rotación estable del péndulo paramétrico, a partir de movimientos no rotatorios. La acción de control consiste en un par de ayuda, que se proporciona convenientemente al péndulo para incrementar su velocidad angular. La magnitud de este par se define en términos de la velocidad angular del péndulo. El par máximo se aplica cuando la velocidad es cero y su valor va disminuyendo a medida que aumenta la velocidad. El valor mínimo del par se aplica cuando la magnitud de la velocidad angular alcanza un umbral, por encima del cual se asume un movimiento rotatorio del péndulo. La dirección de aplicación del par depende del signo de la velocidad angular. En primer término, se valida el modelo matemático con los experimentos realizados en laboratorio previamente por los autores. Luego, se emplea el modelo para indagar sobre las posibilidades de la ley de control.

**Keywords:** Parametric pendulum, rotation control, nonlinear dynamics.

**Abstract.** This article introduces a simplified mathematical model of a control technique, whose objective is to achieve a stable rotation motion of the parametric pendulum, starting from a non-rotating motion. The control action consists of an assisting torque, which is conveniently provided to the pendulum to increase its angular velocity. The magnitude of this torque is defined in terms of the angular velocity of the pendulum. The maximum torque is applied when the velocity is zero and its value decreases as the velocity increases. The minimum value of the torque is applied when the magnitude of the angular velocity reaches a threshold, above which a rotary motion of the pendulum is assumed to take place. The direction of torque application depends on the sign of the angular velocity. Firstly, the mathematical model is validated with the experiments previously carried out in the laboratory by the authors. Then, the model is used to investigate the possibilities of control law.

## 1 INTRODUCCIÓN

El péndulo paramétrico ha motivado en los últimos años nuevas direcciones de investigación en cuanto a su empleo como dispositivo recolector de energía ambiental, especialmente undimotriz (Wiercigroch et al., 2011; Nandakumar et al., 2012; Yurchenko y Alevras, 2013; Yurchenko y Alevras, 2018; Dotti y Virlla, 2021). En lo que respecta a estas aplicaciones de recolección de energía, el movimiento que se desea alcanzar es una rotación estacionaria, que corresponde al movimiento de mayor energía cinética. Las primeras investigaciones centradas en la respuesta rotacional del péndulo paramétricos fueron realizadas por Clifford y Bishop (1995). Ellos mostraron que, para el caso de un forzamiento sinusoidal simple, las rotaciones puras (es decir, sin comportamiento oscilatorio de ningún tipo) sólo pueden alcanzarse en rangos limitados de los parámetros de forzamiento. Pero incluso si estos parámetros se eligen adecuadamente, las rotaciones puras coexisten con otras respuestas estables no rotatorias, dependiendo de las condiciones iniciales (Dotti et al., 2015). En el caso de una excitación irregular, como puede ser la del oleaje marino, obtener rotaciones estables se vuelve aún más dificultoso, ya que la energía suministrada al péndulo presenta una alta variabilidad. Esta situación conduce a la necesidad de implementar estrategias de control que permitan el inicio y el mantenimiento de las rotaciones a partir de otros movimientos no rotatorios.

El objetivo de una acción de control es desestabilizar las respuestas no rotacionales (oscilaciones, caos, reposo) y conducirlos a un movimiento rotacional estable. Una vez alcanzadas las rotaciones, el control debe detenerse para no incurrir en un excesivo gasto de energía. La mayoría de las técnicas de control de rotaciones del péndulo paramétrico se basan en el método de retroalimentación retardada en el tiempo (RRT, Pyragas, 1992) y su extensión, el método de retroalimentación retardada en el tiempo extendido (RRTE, Socolar et al., 1994). A lo largo de la última década, diversos enfoques basados en estas técnicas han tenido éxito en el abordaje de diferentes aspectos del control de rotaciones del péndulo paramétrico (Yokoi y Hikiyama, 2011; De Paula et al., 2012; Vaziri et al., 2014; Das y Wahi, 2016; De Paula et al., 2017). No obstante, los enfoques basados en RRT y RRTE involucran conceptos teóricos y/o constructivos complejos, que luego deben complejizarse aún más al trasladarse a una implementación realista.

Con el objetivo de superar estos inconvenientes, los mismos autores del presente artículo hemos presentado recientemente ensayos experimentales sobre una nueva técnica, que es teórica y constructivamente más simple que las basadas en TDF o ETDF (Dotti et al., 2023). Esta nueva técnica, basada únicamente en la evaluación periódica de la velocidad angular, no está optimizada aún desde el consumo energético, pero resulta robusta y produce resultados similares en términos de alcanzar un movimiento rotatorio a partir de otro no rotatorio. En este artículo, se presenta un modelo matemático que reproduce la versión experimental de la técnica de control presentada por Dotti et al. (2023).

## 2 MODELO MATEMÁTICO

La acción de control propuesta consiste en brindar al péndulo paramétrico un torque externo  $T$  con el objetivo de incrementar su velocidad angular. En estos términos, la ecuación gobernante del sistema se expresa como (Dotti et al., 2015)

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{I}\dot{\theta} + \frac{c}{I}\operatorname{sgn}\dot{\theta} + \omega_0^2\left(\frac{\ddot{\theta}}{g} + 1\right)\sin\theta = T, \quad (1)$$

donde  $\theta$  es la posición angular del péndulo medida desde la vertical inferior, tomada positiva en la dirección antihoraria y negativa en la horaria, con  $\theta = 0$  correspondiendo a la posición de

reposo. Por su parte,  $I$  y  $\omega_0$  son respectivamente la inercia y la frecuencia natural del péndulo,  $b$  y  $c$ , los coeficientes de fricción viscosa y seca y  $g$ , la aceleración de la gravedad. El forzamiento paramétrico viene dado por el desplazamiento vertical  $y(t)$  del punto pivote.

El torque de control  $T$  se asume como proporcional al intervalo de tiempo  $\Delta t_a$  durante el cual se activa la acción de control y a una función de activación  $\varphi$ . Así, se propone  $T(t, \dot{\theta}) = -\kappa \Delta t_a \varphi \operatorname{sgn} \dot{\theta}$ ,

$$T(t, \dot{\theta}) = -\kappa \Delta t_a \varphi \operatorname{sgn} \dot{\theta}, \quad (2)$$

siendo

$$\Delta t_a(\dot{\theta}) = \begin{cases} t_{\max} - \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\dot{\theta}_C} |\dot{\theta}| & \text{si } |\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_C, \\ 0 & \text{si } |\dot{\theta}| > \dot{\theta}_C \end{cases}, \quad (3)$$

y donde  $t_{\max}$  y  $t_{\min}$  son las duraciones máxima y mínima posibles de activación del control.

La velocidad umbral  $\dot{\theta}_C$  definida en (3) es uno de los parámetros propios de la ley de control, ya que representa el límite por encima del cual el control debe detenerse. Para su estimación, Dotti et al. (2023) propusieron la siguiente expresión

$$\dot{\theta}_C = 4\sqrt{(b\omega_0 + c)/I}, \quad (4)$$

basada en el trabajo de Butikov (1999). Esta definición implica que  $\dot{\theta}_C$  es el valor mínimo de la velocidad angular necesario para alcanzar la posición vertical invertida,  $\theta = \pi$ , partiendo de  $\theta = -\pi$  para el péndulo sin forzamiento. El chequeo de la velocidad y la consecuente comparación con  $\dot{\theta}_C$  para la evaluación de (3) se realiza de forma discreta, cada un intervalo de tiempo  $\Delta t_{chk}$ . Este intervalo es fijo y debe ser determinado *a priori*, siendo otro parámetro propio de la ley de control.

Por su parte, la función de activación está dada por

$$\varphi(t, \dot{\theta}) = \left\{ 1 + \exp[-k(t - t_{st} - \Delta t_r - \Delta t_0)] \right\}^{-1} - \left\{ 1 + \exp[-k(t - t_{st} - \Delta t_r - \Delta t_0 - \Delta t_a(\dot{\theta}))] \right\}^{-1}, \quad (5)$$

donde  $t_{st}$  es el valor de tiempo considerado como inicial de la simulación o experimento,  $\Delta t_0$  es el intervalo de tiempo de espera, medido desde el inicio de la simulación hasta la orden de activación de la acción de control, y  $\Delta t_r$  es el tiempo de respuesta del sistema mecánico, esto es, desde que se da la orden de control hasta que el sistema mecánico efectivamente responde a esa orden. La función  $\varphi$  es una sigmoide que cuenta con dos estados: 0 y 1. La velocidad de transición entre ambos estados está gobernada por la constante  $k$ . Las constantes  $\kappa$ ,  $k$  y  $\Delta t_r$  dependen de los aspectos constructivos del sistema electromecánico y deben determinarse a partir de mediciones preliminares sobre el mismo.

### 3 NOTA SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

La (1) se resuelve utilizando el clásico método de Runge-Kutta de cuarto orden. La resolución se realiza en etapas siendo el tiempo de simulación de la etapa  $i$  dado por

$$t_s^{(i)} = t_{st}^{(i)} + \Delta t_0^{(i)} + \Delta t_a^{(i)} + \Delta t_{chk}. \quad (6)$$

De esta forma, para la etapa  $i$ , la simulación comienza en el tiempo  $t_{st}^{(i)}$ , pasando luego la función de activación (5) de 0 a 1 en el tiempo  $t_{st}^{(i)} + \Delta t_0^{(i)}$ , y habilitando así la acción de control. El torque de control se aplica hasta el tiempo  $t_{st}^{(i)} + \Delta t_0^{(i)} + \Delta t_a^{(i)}$ , donde  $\varphi$  pasa de 1 a 0. A partir de allí, el control no actúa y, pasado un tiempo  $\Delta t_{chk}$ , la etapa de simulación  $i$  concluye en  $t_s^{(i)}$ . Acto seguido, inicia la etapa  $i + 1$ , cuyo valor inicial de tiempo corresponde a  $t_{st}^{(i+1)} = t_s^{(i)}$ . Para la etapa  $i$ , se emplean como condiciones iniciales los valores finales de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  de la etapa  $i - 1$ . El número de etapas de cálculo depende del valor máximo de tiempo de simulación.

#### 4 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

El modelo presentado en (1-5) es testeado con experimentos realizados por los autores en el laboratorio del GIMAP. Estos experimentos fueron publicados previamente por Dotti et al. (2023), trabajo al cual el lector puede referirse para una más completa descripción del sistema experimental empleado. Las magnitudes físicas características de este sistema corresponden a:  $I = 0.0273 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$ ,  $\omega_0 = 3.599 \text{ s}^{-1}$ ,  $b = 0.0025 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$  y  $c = 0.0085 \text{ N}\cdot\text{m}$ . A partir de ellas, (4) permite calcular  $\dot{\theta}_C = 3.212 \text{ s}^{-1}$ . El forzamiento impuesto en los experimentos es del tipo recíprocante y corresponde a

$$y = r[1 - \cos(\Omega t + \phi)] + L \left[ 1 - \sqrt{1 - (L/r)^2 \sin^2(\Omega t + \phi)} \right], \quad (7)$$

donde  $L = 0.535 \text{ m}$ , mientras que  $r$  y  $\Omega$  pueden tomar distintos valores, configurando 15 posibilidades de ensayo en virtud de las diferentes marchas de la máquina excitadora. El ángulo de fase  $\phi$  se elige adecuadamente con el objeto de sincronizar el forzamiento simulado con el experimental.

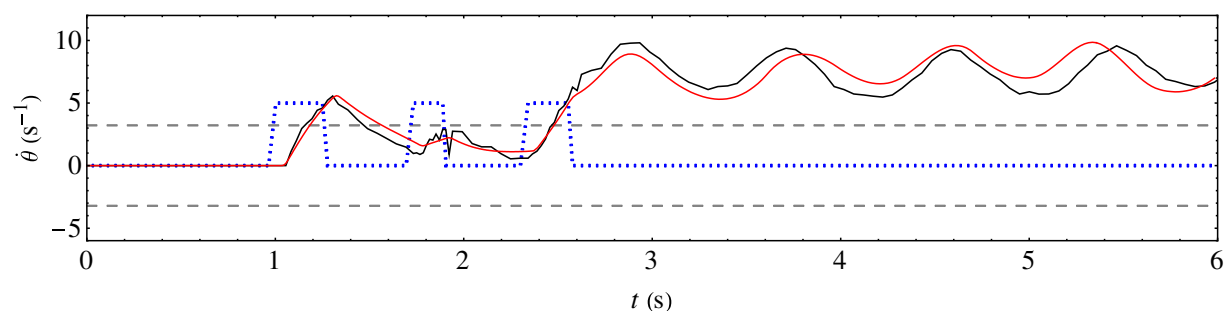


Figura 1: Comparación entre respuestas simulada (—) y experimental (—), bajo el escenario de forzamiento  $S_1$ , indicando también la acción de control experimental (---). Se alcanza una rotación antihoraria partiendo desde la posición de reposo. Se fijó  $\Delta t_0 = 1.0 \text{ s}$  para la etapa inicial de la simulación y cero para las restantes etapas. El ángulo de fase correspondió a  $\phi = 3.87$ . Se indica además en la gráfica la velocidad umbral (---).

En lo que respecta a las magnitudes propias de la ley de control, el valor de  $t_{max}$  empleado en los experimentos correspondió al 85% del tiempo de acción de control necesario para alcanzar  $\theta = \pi$  partiendo desde  $\theta = 0$ , para el péndulo no forzado. Por su parte,  $t_{min}$  se estableció como el 17% de la misma magnitud. Así, a tal criterio le correspondió  $t_{max} = 260 \text{ ms}$  y  $t_{min} = 52 \text{ ms}$ . El intervalo de chequeo fue medido en los experimentos como  $\Delta t_{chk} = 455 \text{ ms}$  (aun cuando el seteo originalmente fuera de 400 ms; esto se debe probablemente a un esperable retardo en la ejecución del código en la implementación experimental, la cual se realizó mediante una placa Arduino de bajo costo). Por último, se determinaron las restantes constantes como  $\kappa = 95$ ,  $k = 200$  y  $\Delta t_r = 50 \text{ ms}$ , mediante un ajuste de mínimos cuadrados con

varios ensayos experimentales del péndulo sin forzamiento.

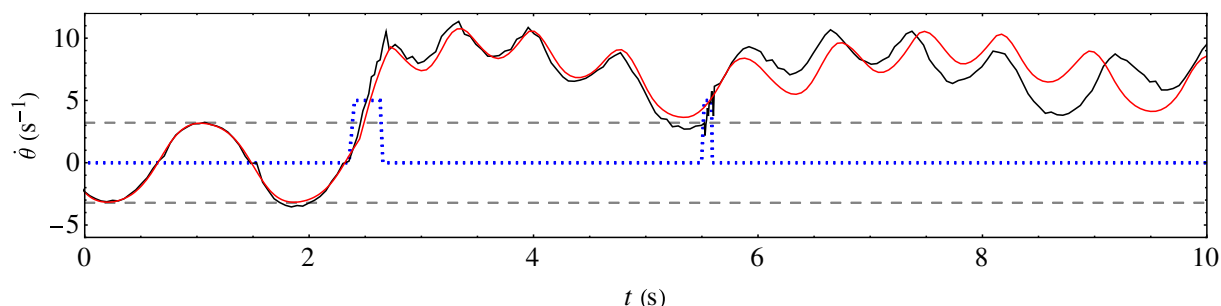


Figura 2: Comparación entre respuestas simulada (—) y experimental (—), bajo el escenario de forzamiento  $S_1$ , indicando también la acción de control experimental (⋯). Se alcanza una rotación antihoraria partiendo desde un movimiento oscilatorio. Se fijó  $\Delta t_0 = 2.4$  s para la etapa inicial de la simulación y cero para las restantes etapas. El ángulo de fase correspondió a  $\phi = 2.50$ . Se indica además en la gráfica la velocidad umbral (---).

Las Figuras 1 y 2 muestran dos de las comparaciones realizadas, correspondientes al escenario de forzamiento  $S_1$  de Dotti et al. (2023), esto es, empleando  $r = 0.075$  m y  $\Omega = 1.193$  s<sup>-1</sup>. El caso de la Figura 1 corresponde a una situación en la cual se alcanza una rotación antihoraria partiendo de la posición de reposo. La rotación antihoraria se obtiene luego de tres ayudas en el experimento, lo cual es replicado por la simulación. Se observa que la respuesta simulada pierde algo menos energía que la experimental inmediatamente después de las ayudas. Esto se atribuye a diferentes fuentes de error, como pueden ser las estimaciones de los factores de fricción, inercia, frecuencia natural o ángulo de fase del forzamiento, entre otros. La consideración de una frecuencia natural constante para diferentes niveles de velocidad también influye en el desfase observado entre simulación y experimento. No obstante, el ajuste del modelo al experimento es más que aceptable en términos prácticos.

El caso de la Figura 2 corresponde a una situación en la cual se alcanza una rotación antihoraria partiendo desde un movimiento oscilatorio estacionario, el cual es desestabilizado por la acción de control. En este caso, la rotación experimental se logra luego de dos ayudas mientras que la simulación prevé una única ayuda. El ajuste del modelo es muy satisfactorio, especialmente hasta instantes antes de la segunda ayuda. Allí, por un pequeño margen, el chequeo de velocidad produce  $\dot{\theta} < \dot{\theta}_c$  en el experimento y  $\dot{\theta} > \dot{\theta}_c$  en la simulación (de hecho, corresponde a los límites de error del experimento según Dotti et al., 2023). Por (3), esto último produce  $\Delta t_a = 0$  en la simulación, indicando que no debe actuar el control. No obstante, aunque levemente desfasado, se alcanza el movimiento rotatorio de una forma muy similar. Esta comparativa también resulta aceptable en términos prácticos.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Luego de la verificación experimental, se realiza un estudio numérico basado en cuencas de atracción con el objeto de cuantificar la influencia de la ley de control propuesta en la dinámica original del sistema. Las cuencas de atracción constituyen un mapa de color indicador de la respuesta estacionaria que se obtiene del sistema para diferentes condiciones iniciales. Para construirlas, se resuelve numéricamente (1) considerando las mismas magnitudes empleadas en la sección anterior, salvo por  $\Delta t_0 = 0$  y  $\phi = 0$ .

Para mantener una coherencia, y permitir la posibilidad de replicar los resultados con futuros experimentos adicionales, se estudian tres escenarios de forzamiento correspondientes a situaciones posibles del sistema de ensayo con el que se cuenta en el laboratorio del GIMAP. Estos corresponden al ya descrito escenario  $S_1$  ( $r = 0.075$  m y  $\Omega = 1.193$  s<sup>-1</sup>), al

escenario  $S_2$ , empleando  $r = 0.075$  m y  $\Omega = 0.832$   $s^{-1}$  y al  $S_3$ , considerando  $r = 0.205$  m y  $\Omega = 1.193$   $s^{-1}$ .

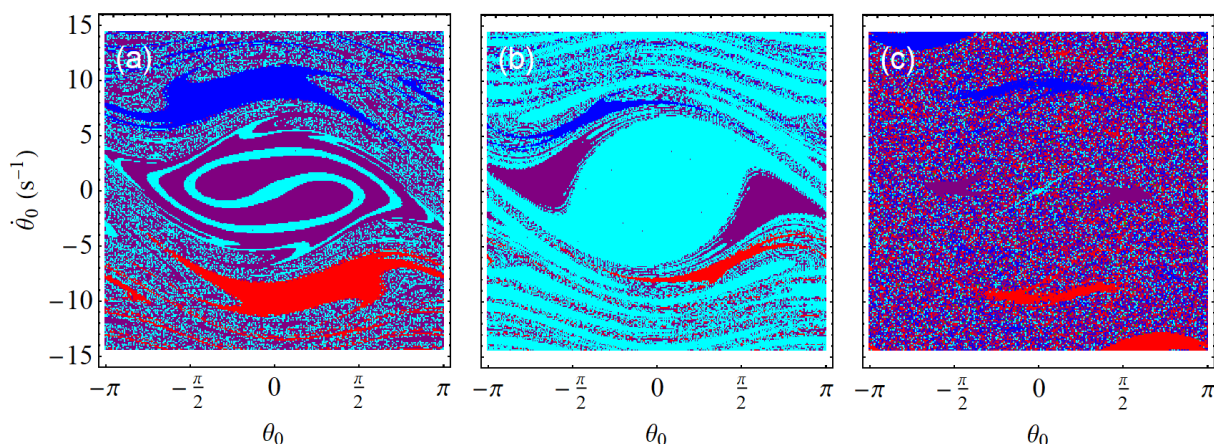


Figura 3: Cuencas de atracción simuladas para el sistema no controlado, donde (•): rotación antihoraria, (•): rotación horaria, (•): oscilación y (•): posición de reposo. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

Para estos tres escenarios, la Figura 3 muestra las cuencas correspondientes a la dinámica original, es decir, equivalente a considerar  $T = 0$  en (1). En todos los casos, la simulación alcanza los 210 s. Se descartan los primeros 120 s para superar los transitorios y se computa luego la topología de la respuesta estacionaria. Los tres escenarios presentan diferentes características, coexistiendo en todos ellos respuestas rotatorias, oscilatorias y de reposo, que se obtienen al modificar las condiciones iniciales. El caso de la Figura 3a ( $S_1$ ) cuenta con cuencas robustas de rotaciones (zonas “no ruidosas” de la gráfica, Lenci y Rega, 2011), y una compleja trama de cuencas de oscilación y reposo que se debe a la presencia de fricción seca en el sistema (Dotti et al., 2017). La Figura 3b ( $S_2$ ) presenta mayoría de condiciones iniciales que conducen al reposo, con cuencas pequeñas de oscilaciones y rotaciones. Por último, las cuencas de la Figura 3c ( $S_3$ ) presentan una alta fractalización o ruido, debido a su cercanía con un atractor caótico.

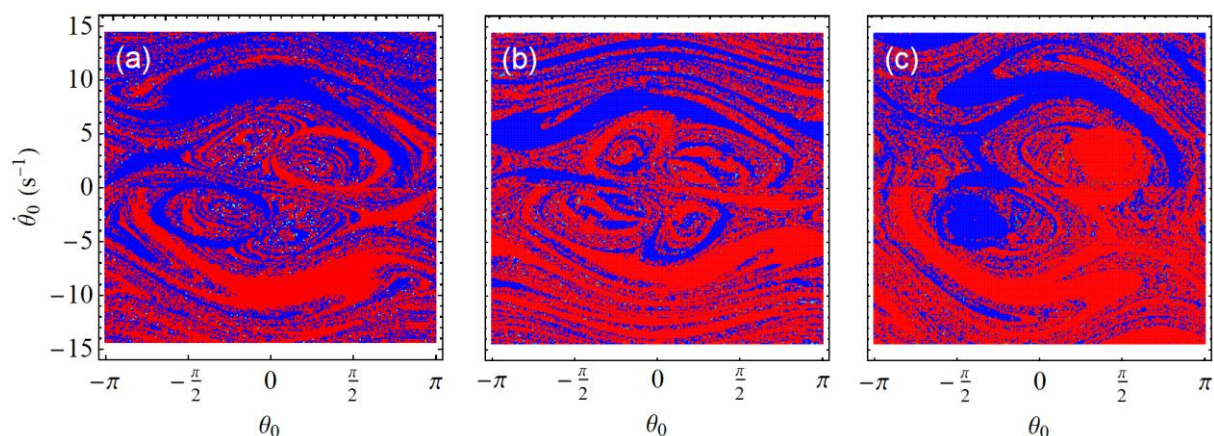


Figura 4: Cuencas de atracción simuladas para el sistema controlado, donde (•): rotación antihoraria, (•): rotación horaria, (•): oscilación y (•): posición de reposo. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

La Figura 4 corresponde a idénticas condiciones de la Figura 3, pero incluyendo en este caso la acción de control. Para construirlas, se sigue el mismo criterio empleado para las cuencas del sistema no controlado, limitándose la acción de control a un máximo de 15

ayudas en los primeros 50 s de simulación. Se observa al comparar ambas figuras es que la mayoría de las respuestas que originalmente eran oscilatorias y reposo (colores púrpura y celeste, respectivamente) han mutado a respuestas rotatorias (azul y rojo) debido a la acción del control. En términos de porcentajes,  $S_1$  contaba originalmente con 48.94 % de condiciones iniciales que conducían a la rotación (Figura 3a); este porcentaje pasó a ser 97.88% (Figura 4a) debido a la acción de control. Algo similar sucede con los otros escenarios:  $S_2$  pasa de 5.49% (Figura 3b) a 96.58% (Figura 4b) y  $S_3$ , de 64.65% (Figura 3c) a 96.40% (Figura 4c). Por otra parte, si bien las cuencas controladas también presentan fractalización, se observa que la acción de control contribuye a incrementar la robustez de las cuencas rotatorias. Así, en las cuencas de la Figura 4 hay más zonas no ruidosas de rotaciones horarias y antihorarias alrededor de las cuencas originales. Esta ampliación de las zonas robustas se debe a que, en la dinámica original, las condiciones iniciales en las cercanías de dichas zonas corresponden a respuestas estacionarias no rotatorias, pero cercanos a un atractor rotatorio. En tales casos, resulta necesaria sólo una pequeñísima desestabilización para alcanzar las rotaciones deseadas. Estos resultados indican un buen funcionamiento de la ley de control: se cumple con creces el objetivo de desestabilizar movimientos no rotatorios para llevarlos a movimientos rotatorios.

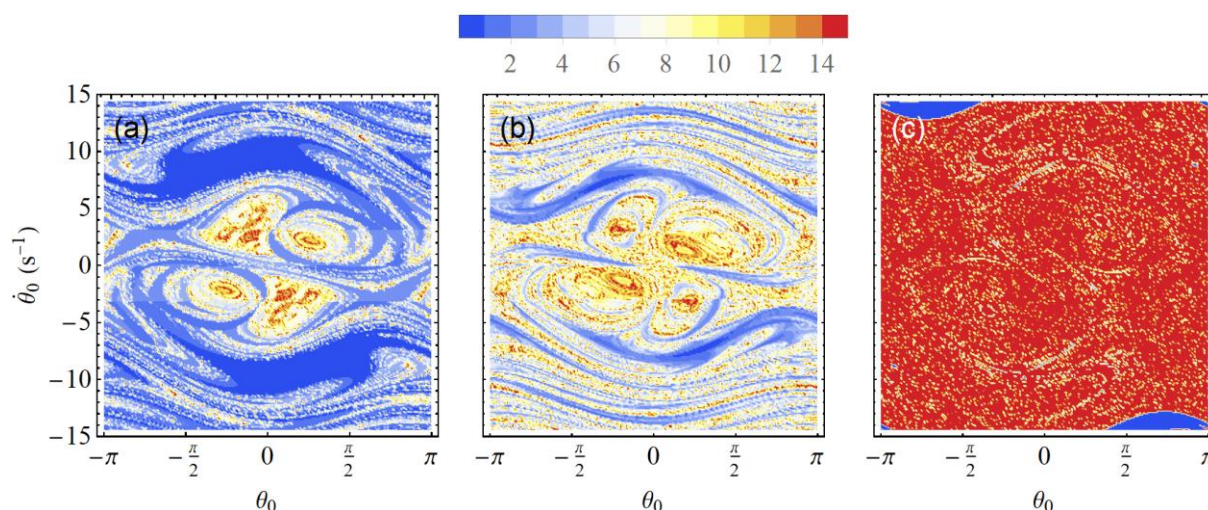


Figura 5: Cuencas simuladas para el sistema controlado, indicando la cantidad de ayudas aplicadas para cada dupla de condiciones iniciales. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

La Figura 5 muestra el número de ayudas empleadas en función de las condiciones iniciales. En el caso de  $S_1$  y  $S_2$  se observa que no se requiere acción de control cuando las condiciones iniciales pertenecen a la cuenca original de rotaciones. Esto es adecuado, dado que no es necesario controlar el sistema si naturalmente el mismo puede lograr una rotación. En el caso de  $S_3$ , se observa que en la mayoría de los casos se emplea el máximo de acciones de control para alcanzar las rotaciones. Esto se debe a los extensos transitorios caóticos con los que cuenta el sistema en estas condiciones. En muchos de los casos, no son necesarias tantas acciones de control, sino que basta con esperar el paso del estado transitorio. No obstante, la ley de control no identifica que el sistema se encuentra en un transitorio caótico y por eso continúa aplicando torques de ayuda.

Por último, la Figura 6 muestra la energía empleada en el control. En el caso de  $S_1$  y  $S_2$  se observa una aproximada proporcionalidad del gasto energético con respecto a la cantidad de ayudas empleadas (Figura 5). Pero para  $S_3$ , esto no se cumple: aun cuando la mayoría de las simulaciones predicen la necesidad de 15 ayudas, se ve que no en todos los casos se asocia a

un alto consumo de energía. Esto se atribuye también a los transitorios caóticos presentes en  $S_3$ : la ley de control identifica que el sistema está en todo momento “casi en rotación” y, por lo tanto, la ayuda que proporciona es de baja energía. Esto se observa especialmente en las zonas robustas de la cuenca de la Figura 4c.

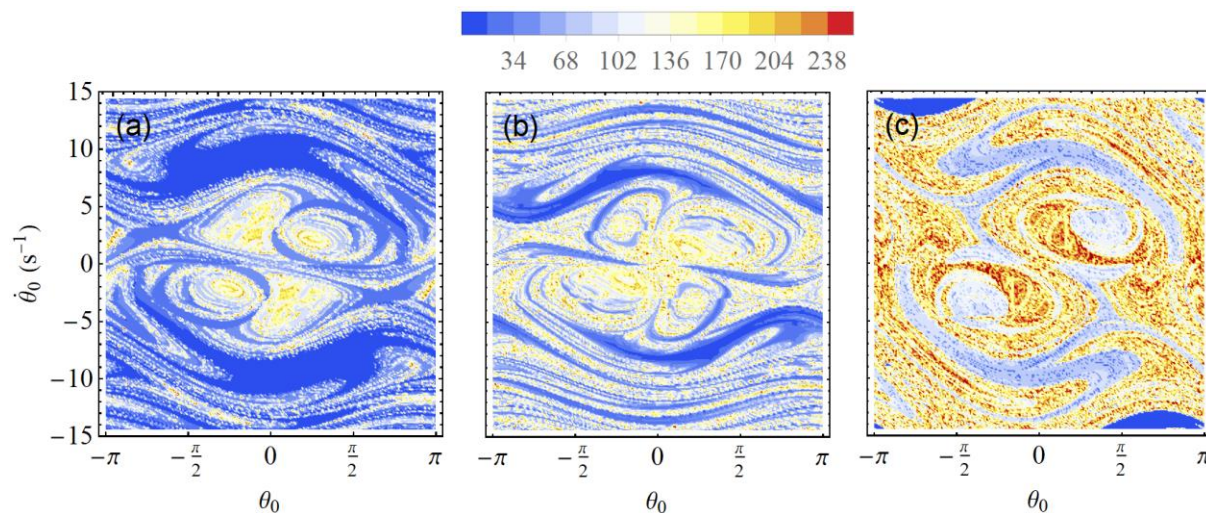


Figura 6: Cuenca simulada para el sistema controlado, indicando la energía total en J consumida en la aplicación de torques de ayuda, para cada cupla de condiciones iniciales. Escenarios de forzamiento: (a)  $S_1$ , (b)  $S_2$  y (c)  $S_3$ .

## 6 CONCLUSIONES

En este artículo se presentó un modelo matemático de una nueva técnica de control aplicada al péndulo paramétrico y basada únicamente en el cómputo de la velocidad angular. El objetivo de este control es alcanzar un movimiento rotatorio estable del péndulo, a partir de la desestabilización de un movimiento no rotatorio inicial. El modelo matemático se verificó experimentalmente con ensayos de laboratorio presentes en la literatura científica, realizados previamente por los mismos autores (Dotti et al., 2023). El acuerdo obtenido con los experimentos resultó aceptable desde el punto de vista práctico, con exiguas diferencias que resultaron atribuibles a los errores esperables en las mediciones. Luego de la verificación, se realizaron simulaciones computacionales con el modelo propuesto. Los resultados numéricos obtenidos predicen que la ley de control sería capaz de obtener rotaciones en más del 96% de las situaciones analizadas, logrando además incrementar la robustez de las cuencas rotatorias. Este resultado es auspicioso con miras a una aplicación futura en convertidores pendulares de energía undimotriz, donde la rotación es el movimiento deseado para la extracción energética. La acción de control propuesta fue capaz de desestabilizar fácilmente estados oscilatorios y de reposo para convertirlos en rotaciones, de una forma rápida y con bajo consumo de energía. En lo que respecta al caos, se analizaron situaciones de condiciones iniciales cercanas al atractor caótico. La acción de control también resultó exitosa en la conversión del movimiento en este caso, aunque presentó algunas dificultades en la identificación de transitorios que eventualmente hubiesen conducido a rotaciones con menos asistencia de control.

En futuras investigaciones, se indagará acerca del comportamiento de la ley de control bajo forzamientos irregulares y estocásticos. Se buscará además optimizar el consumo energético de las acciones de control, especialmente frente a respuestas dinámicas complejas como los transitorios caóticos. Tal búsqueda apunta a minimizar la energía gastada, que en el caso de, por ejemplo un convertidor undimotriz, debe ser extraída de la generación.



## 7 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires.

## REFERENCIAS

- Butikov E. Butikov, The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model. *European Journal of Physics*, 20:429–445, 1999.
- Clifford, M. y Bishop, S., Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum, *Physics Letters A*, 201:191-196, 1995.
- Das, S. y Wahi P., Initiation and directional control of period-1 rotation for a parametric pendulum. *Proceedings of the Royal Society A*, 472:20160719, 2016.
- De Paula, A., Savi, M., Wiercigroch, M. y Pavlovskaja, E., Bifurcation control of a parametric pendulum. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 22(5):1250111, 2012.
- De Paula, A., Savi, M., Vaziri, V., Pavlovskaja, E. y Wiercigroch, M., Experimental bifurcation control of a parametric pendulum. *Journal of Vibration and Control*, 23(14): 2256–2268, 2017.
- Dotti, F., Reguera, F. y Machado, S., A review on the nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting from ocean waves. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> PANACM*, 1516-1529, Buenos Aires, Argentina, 2015.
- Dotti, F., Reguera, F. y Machado S., Damping in a parametric pendulum with a view on energy harvesting. *Mechanics Research Communications*, 81:11–16, 2017.
- Dotti, F. y Virla, J., Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(6):061007, 2021.
- Dotti, F., Luna, S., Oxarango, L., Virla, J. y Rojas, L., Experimental rotation control of the parametric pendulum using a velocity approach. *Mechanics Research Communications*, 129:104085, 2023.
- Lenci, S. y Rega, G., Experimental versus theoretical robustness of rotating solutions in a parametrically excited pendulum: A dynamical integrity perspective. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(9–10):814–824, 2011.
- Nandakumar, K., Wiercigroch, M. y Chatterjee, A., Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43:7-14, 2012.
- Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 170:421–428, 1992.
- Socolar, J., Sukow, D. y Gauthier, D., Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems. *Physics Reviews E*, 50(4):3245–3248, 1994.
- Vaziri, V., Najdecka, A. y Wiercigroch, M., Experimental control for initiating and maintaining rotation of parametric pendulum. *The European Physical Journal Special Topics*, 223:795–812, 2014.
- Wiercigroch, M., Najdecka, A. y Vaziri, V., Nonlinear dynamics of pendulum systems for energy harvesting. *Vibration Problems ICOVP 2011: The 10th International Conference on Vibration Problems, Springer Proceedings in Physics* 139:35-42, 2011.
- Yokoi Y. y Hikihara, T., Tolerance of start-up control of rotation in parametric pendulum by delayed feedback. *Physics Letters A*, 375:1779–1783, 2011.

- Yurchenko, D. y Alevras, P., Dynamics of the  $N$ -pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4):290-299, 2013.
- Yurchenko, D. y Alevras, P., Parametric pendulum-based wave energy converter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99:504–515, 2018.