

OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL USANDO LA DERIVADA TOPOLÓGICA Y EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO (XFEM)

STRUCTURAL OPTIMIZATION BASED ON THE TOPOLOGICAL DERIVATIVE AND THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD (XFEM)

Santiago Delgado y Alfredo Canelas

*Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Julio
Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay, sdelgado@fing.edu.uy, <https://www.fing.edu.uy/iet/>*

Palabras clave: Optimización Estructural, Derivada Topológica, XFEM.

Resumen. El diseño óptimo de estructuras es de gran interés por un gran número de razones, entre las que se destaca el uso más eficiente posible de los recursos naturales. Dentro de los métodos para el diseño óptimo de estructuras se encuentran los de optimización topológica. Un inconveniente tradicional de los esquemas numéricos asociados a estos métodos es el elevado costo computacional asociado al empleo de mallas densas de elementos finitos para el análisis estructural de las geometrías obtenidas. En este trabajo se presenta una herramienta computacional basada en el concepto de la derivada topológica, que utiliza el método de los elementos finitos extendido (XFEM) con el objetivo de reducir el costo computacional del análisis estructural. El XFEM utiliza una malla de elementos finitos fija, con lo cual evita el uso de algoritmos de refinamiento de mallas, y obtiene resultados precisos enriqueciendo el espacio tradicional de elementos finitos con funciones de forma especializadas. Resultados obtenidos para diferentes problemas muestran que el método propuesto permite obtener estructuras óptimas con un costo computacional adecuado.

Keywords: Structural Optimization, Topological derivative, XFEM

Abstract. The structural optimum design is of great interest for a number of reasons, highlighting the most efficient use of the natural resources. Among the methods for the structural optimum design we have those of topology optimization. These methods have a traditional drawback associated with the high computational cost involved in the use of the fine finite element meshes required by the structural analysis. In the present work, a computational tool based on the topological derivative concept is presented, that uses the extended finite element method (XFEM) with the purpose of reducing the computational cost associated with the structural analysis. The XFEM uses a fixed finite element mesh, thereby avoiding the use of mesh refinement algorithms, and obtains accurate results by enriching the traditional finite element space with specialized shape functions. Results obtained for several examples show that the proposed method allows obtaining optimal structures with reasonable computational cost.

1 INTRODUCCIÓN

El diseño óptimo de estructuras es, en pocas palabras, la disciplina que busca utilizar en la forma más eficientemente posible los materiales que conforman una estructura. El diseño óptimo es aquel que verifica todos los requisitos mecánicos y geométricos impuestos sobre el mismo para garantizar la aplicabilidad, seguridad y otras características de interés minimizando el costo de los distintos materiales utilizados.

La obtención del diseño óptimo es de gran interés en distintas áreas de la ingeniería; siendo en algunas la única opción económicamente viable. Además, el uso eficiente de los recursos finitos que proporciona la naturaleza es un principio fundamental del diseño en ingeniería.

Los primeros antecedentes para el diseño óptimo de estructuras son los métodos analíticos estudiados por [Michell \(1904\)](#), pero al ser estos solamente aplicables en casos muy particulares, existe gran preferencia por los métodos computacionales. Los métodos de optimización estructural pueden ser clasificados en tres categorías principales 1) los utilizados para optimización de parámetros de estructuras discretas, 2) los utilizados para optimización de forma de estructuras continuas y 3) los utilizados para optimización topológica de estructuras continuas ([Bendsøe y Sigmund, 2004](#)). Estos últimos poseen la ventaja que no requieren partir de un diseño inicial bueno para obtener la estructura óptima.

Hay varios métodos para la optimización topológica de estructuras continuas, entre los que se encuentran los métodos basados en la derivada topológica ([Novotny y Sokolowski, 2013](#)). El concepto de la derivada topológica, que es brevemente discutido en la [Sección 4](#), se basa en identificar las regiones del cuerpo que no utilizan eficientemente el material estructural y crear huecos en las mismas. La derivada topológica ha sido utilizada en algoritmos de optimización heurísticos basados en conjuntos de nivel como el propuesto en ([Amstutz y Andrä, 2006](#)).

Los algoritmos de optimización topológica tienen el gran inconveniente de poseer un elevado costo computacional, asociado a los múltiples análisis estructurales realizados durante el proceso de optimización. Este costo crece por la necesidad de utilizar mallas de elementos finitos muy densas o un refinamiento frecuente.

Por el motivo anterior, en este trabajo se presenta un método novedoso para el diseño óptimo de estructuras continuas, basado en el concepto de la derivada topológica y el método de los elementos finitos extendido (XFEM) para el análisis estructural. El XFEM es una variante del método de los elementos finitos, desarrollada inicialmente para modelar fisuras sin tener que modificar la malla ([Moës et al., 1999](#)) y ya ha sido utilizada en optimización topológica ([Abdi et al., 2013](#); [Geiss et al., 2019](#)) aunque en métodos heurísticos no basados en el concepto de la derivada topológica, lo cual hace novedoso a este trabajo.

Se presenta brevemente en la [Sección 2](#) la metodología considerada para el algoritmo de optimización estructural, desarrollando en las [Secciones 3 y 4](#) la implementación del XFEM y la derivada topológica respectivamente. En la [Sección 5](#) se presenta el pseudocódigo del algoritmo de optimización con el cual se generan los ejemplos presentados en la [Sección 6](#). Finalmente en la [Sección 7](#) se presentan las conclusiones y propuestas de trabajos a futuro.

2 PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

En el presente trabajo se consideran estructuras planas, elásticas y lineales, para lo cual se utiliza el problema de estado plano de tensiones ([Sadd, 2009](#)). Definiendo $D \subset \mathbb{R}^2$ como la región del espacio ocupable por la estructura; se asume que una región de la misma $\Omega \subseteq D$ está ocupada por un material elástico lineal de módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν , mientras que el complemento $D \setminus \Omega$ está ocupada por un material elástico lineal de módulo

de Young γE y coeficiente de Poisson ν , siendo $\gamma \ll 1$ un parámetro adimensional. Así, Ω es asociada a la región del espacio ocupada por la estructura y $D \setminus \Omega$ define las regiones vacías. La estructura compuesta por este material se encuentra sometida a la acción de un sistema de fuerzas y condiciones de borde como se muestra en la [Figura 1](#), donde $\gamma_\Omega b$ son las fuerzas de volumen, q son las fuerzas de superficie y Γ_D es el borde apoyado. γ_Ω es presentado en (1).

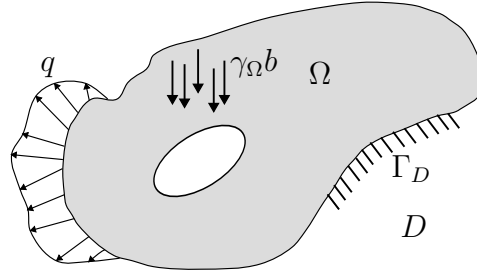


Figura 1: Esquema del problema de elasticidad plana.

$$\gamma_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega, \\ \gamma & \text{en } D \setminus \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

El problema de elasticidad plano consiste en hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} \in H^1(D)$ que satisface el siguiente problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma + \gamma_\Omega b = 0 & \text{en } D, \\ \sigma = \mathbb{C} \nabla^s \mathbf{u} & \text{en } D, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_D, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = q & \text{en } \partial D \setminus \Gamma_D, \end{cases} \quad (2)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario normal a $\partial D \setminus \Gamma_D$ y

$$\mathbb{C} = \frac{\gamma_\Omega E}{1 + \nu} \mathbb{I} + \frac{\nu \gamma_\Omega E}{1 - \nu^2} I \otimes I. \quad (3)$$

El sistema (2) es presentado para una cierta configuración de cargas. En un caso más general con NCC casos de carga, se denomina \mathbf{u}_i a la solución del problema dado por los datos b_i y q_i .

El problema de optimización estructural que se considera consiste en encontrar la configuración estructural que minimice la suma de los trabajos de las fuerzas externas, considerando además una cierta restricción del volumen, como se presenta en ([Lopes et al., 2015](#)). Esto es:

$$\begin{cases} \text{Minimizar}_{\Omega \subset D} \mathcal{F}_\Omega := \sum_{i=1}^{NCC} \left(\int_D \gamma_\Omega b_i \cdot \mathbf{u}_i dD + \int_{\partial D \setminus \Gamma_D} q_i \cdot \mathbf{u}_i d\partial D \right), \\ \text{dado } |\Omega| = M|D|, \end{cases} \quad (4)$$

donde $|\cdot|$ es la medida del dominio y M es un número entre 0 y 1. Este problema de optimización puede ser interpretado como encontrar la estructura más rígida, tal que el espacio ocupado por Ω sea una fracción M del espacio disponible.

Este problema de optimización con restricciones es transformado a un problema sin restricciones mediante el método del Lagrangiano Aumentado ([Luenberger y Ye, 2008](#)). En el mismo se busca resolver el problema presentado en (5) para un par de parámetros α y β .

$$\text{Minimizar}_{\Omega \subset D} \mathcal{J}_\Omega := \mathcal{F}_\Omega + \alpha(|\Omega| - M|D|) + \frac{\beta}{2}(|\Omega| - M|D|)^2. \quad (5)$$

El esquema del Lagrangiano Aumentado consiste en partir de un par de coeficientes $\alpha = 0$ y $\beta > 0$, siendo este último fijo pero suficientemente grande, obtener la solución del problema (5) y actualizar iterativamente el valor de α según (6) hasta que la diferencia entre $|\Omega|$ y $M|D|$ sea menor a una tolerancia previamente definida.

$$\alpha_{k+1} := \alpha_k + \beta(|\Omega| - M|D|). \quad (6)$$

2.1 Función de nivel

Para considerar la topología del dominio de cálculo, se hace uso de una función de nivel ψ . Se considera que las regiones donde $\psi > 0$ son parte de la estructura (definen Ω) mientras que las zonas donde $\psi < 0$ son parte de los vacíos (definen $D \setminus \Omega$). Un ejemplo es presentado en la Figura 2 donde en el cuadro de la derecha se considera el color negro para la zona de la estructura y blanco para los vacíos.

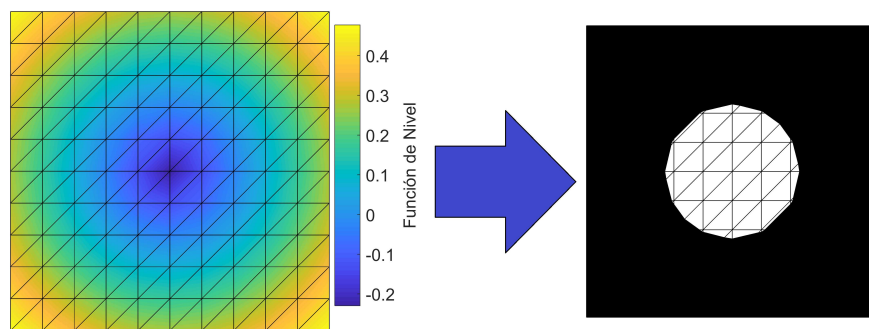


Figura 2: Ejemplo del uso de la función de nivel para definir la topología.

3 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO

El método de los elementos finitos tradicional es un método numérico que se basa en transformar un problema continuo en un problema discreto mediante el empleo de *nodos* y *elementos* (Oñate, 2009). Se presenta en (7) el campo de desplazamientos aproximado correspondiente al método de elementos finitos.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{x,n} \\ \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{no}} N_n u_{y,n} \end{pmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{U}, \quad (7)$$

donde \mathcal{N}_{no} es la cantidad de nodos de la malla de elementos finitos, N_n es la función de interpolación tradicional para el nodo n -ésimo, \mathbf{N} es

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 & \dots & N_{\mathcal{N}_{no}} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n & \dots & 0 & N_{\mathcal{N}_{no}} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

y \mathbf{U} es

$$\mathbf{U} = (u_{x,1} \ u_{y,1} \ \dots \ u_{x,n} \ u_{y,n} \ \dots \ u_{x,N_{no}} \ u_{y,N_{no}})^T. \tag{9}$$

En este trabajo se utilizan elementos triangulares de 3 nodos, como se muestra en la [Figura 2](#), lo que implica que las funciones de interpolación N_n son lineales por partes, continuas en cada elemento y cumplen que valen 1 en el nodo n y 0 en los demás. La resolución aproximada del problema (2), mediante este método, es presentado en ([Oñate, 2009](#)).

Con el método de los elementos finitos tradicional no se pueden obtener resultados precisos a menos que se adapte la malla de elementos finitos en cada sucesivo cambio de geometría de la estructura. Para solventar este problema se utiliza el XFEM que, asistido por la función de nivel, logra representar adecuadamente los cambios en la geometría del dominio utilizando una malla fija. Existen en la bibliografía diversas propuestas para enriquecer los elementos cortados por interfaces entre dos materiales ([Abdi et al., 2013](#); [Liu et al., 2016](#); [Van Mieghroet y Duysinx, 2007](#)), considerándose en este trabajo la presentada por [Van Mieghroet y Duysinx \(2007\)](#) por su simplicidad y precisión.

Se define una función auxiliar según:

$$g = \sum_n^{N_{no}} |\psi_n| N_n - \left| \sum_n^{N_{no}} N_n \psi_n \right|, \tag{10}$$

donde ψ_n es el valor de la función de nivel en el nodo n -ésimo. Se puede apreciar que g solamente es no nula en los elementos cortados por la interfase, denominados elementos extendidos. De esta manera se obtiene una nueva interpolación para el campo de desplazamientos introduciendo K variables adicionales a , dos por cada nodo asociado a un elemento extendido (nodo extendido), según se muestra en (11).

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N_{no}} N_n u_{x,n} + \sum_{n \in K_X} g N_n a_{x,n} \\ \sum_{n=1}^{N_{no}} N_n u_{y,n} + \sum_{n \in K_X} g N_n a_{y,n} \end{pmatrix} = \mathbf{N}_X \mathbf{U}_X, \tag{11}$$

donde K_X es el subconjunto de los nodos extendidos,

$$\mathbf{N}_X = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 & \dots & N_{N_{no}} & 0 & \dots & gN_k & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n & \dots & 0 & N_{N_{no}} & \dots & 0 & gN_k & \dots \end{pmatrix}, \tag{12}$$

y

$$\mathbf{U}_X = (u_{x,1} \ u_{y,1} \ \dots \ u_{x,n} \ u_{y,n} \ \dots \ u_{x,N_{no}} \ u_{y,N_{no}} \ \dots \ a_{x,k} \ a_{y,k} \ \dots)^T. \tag{13}$$

Para obtener el sistema discreto de ecuaciones, en el XFEM se procede como en la variante tradicional, pero utilizando la interpolación “extendida” (11).

Para calcular integrales en los elementos extendidos, se utiliza una técnica de integración en subdominios como en ([Dréau et al., 2010](#)).

4 DERIVADA TOPOLÓGICA

Para obtener un mínimo local de \mathcal{J}_Ω planteado en (5) se utiliza un método inspirado en el método del máximo descenso (Luenberger y Ye, 2008) para modificar la función de nivel. Para esto interesa conocer la sensibilidad del funcional \mathcal{J}_Ω respecto a modificaciones en la topología, utilizándose por tanto el concepto de la derivada topológica (Novotny y Sokolowski, 2013).

Para definir la derivada topológica se debe considerar el problema presentado en la Sección 2 con una perturbación singular del dominio. Esta perturbación se basa en modificar el material de una región circular ($B_{x_0, \epsilon}$) de radio ϵ alrededor de un punto $x_0 \in D$, es decir si $x_0 \in \Omega$ el dominio perturbado es $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B_{x_0, \epsilon}$, mientras que si $x_0 \notin \Omega$ el mismo es $\Omega_\epsilon = \Omega \cup B_{x_0, \epsilon}$. En el dominio perturbado se puede calcular el funcional y el valor obtenido es $\mathcal{J}_{\Omega_\epsilon}$.

Sea $f(\epsilon)$ una función monótona creciente (para ϵ positivo) tal que $f(\epsilon) \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se define la derivada topológica evaluada en x_0 como la función:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}_{\Omega_\epsilon} - \mathcal{J}_\Omega}{f(\epsilon)}. \quad (14)$$

Se demuestra en (Lopes et al., 2015) que esta función existe, y en el problema considerado $f(\epsilon) = \pi\epsilon^2$.

Como la derivada topológica cumple las reglas básicas del cálculo diferencial (Novotny y Sokolowski, 2013) se aprecia que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}}(x_0) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(x_0) + \mathcal{T}_{|\Omega|}(x_0) (\alpha + \beta(|\Omega| - M|D|)), \quad (15)$$

donde $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{T}_{|\Omega|}$ son las derivadas topológicas de los funcionales \mathcal{F} y $|\Omega|$ respectivamente. Es fácilmente demostrable que

$$\mathcal{T}_{|\Omega|}(x_0) = \begin{cases} -1 & \text{si } x_0 \in \Omega, \\ +1 & \text{si } x_0 \notin \Omega. \end{cases} \quad (16)$$

La derivada topológica del trabajo acumulado de las fuerzas externas es (Giusti et al., 2008)

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}(x_0) = \sum_{i=1}^{NCC} [-(\mathbb{P}_{\gamma_1} \sigma(\mathbf{u}_i)(x_0)) \cdot \nabla^S \mathbf{u}_i(x_0) + 2(\gamma_1 - 1)b_i \cdot \mathbf{u}_i(x_0)], \quad (17)$$

con

$$\mathbb{P}_{\gamma_1} = \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1 \xi} \left((1 + \xi)\mathbb{I} + \frac{1}{2}(\eta - \xi) \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1 \eta} I \otimes I \right), \quad (18)$$

$$\eta = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad \xi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{y} \quad \gamma_1 = \begin{cases} \gamma & \text{si } x_0 \in \Omega, \\ 1/\gamma & \text{si } x_0 \notin \Omega. \end{cases} \quad (19)$$

Por la formulación de elementos finitos considerada, se tienen discontinuidades en los valores de la derivada topológica en las fronteras entre elementos, e incluso en la interfase del elemento extendido. Como es de interés obtener un valor representativo de la derivada topológica en los nodos para el algoritmo de optimización presentado en la siguiente sección, se calcula un valor nodal según se presenta en (20) para el nodo n .

$$\mathcal{T}_n = \frac{\int_D N_n \mathcal{T} dD}{\int_D N_n dD}. \quad (20)$$

5 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

El método heurístico de optimización utiliza la siguiente función (Lopes et al., 2015) como dirección de descenso del funcional:

$$G := \mathcal{J}_{\text{sig}}(\psi_n), \quad (21)$$

donde ψ_n es la función de nivel de la iteración *actual*, la cual se supone que cumple $\|\psi_n\| = 1$. Se define el ángulo entre la función de nivel actual y la dirección de descenso según:

$$\theta = \arccos \frac{\langle G, \psi \rangle}{\|G\|}. \quad (22)$$

Finalmente, la función de nivel de una siguiente iteración es calculada según (Amstutz y Andrä, 2006)

$$\psi_{n+1} := \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\sin((1 - \kappa)\theta)\psi_n + \sin(\kappa\theta) \frac{G}{\|G\|} \right), \quad (23)$$

donde ψ_{n+1} es la función de nivel de la siguiente iteración y κ es un coeficiente de búsqueda lineal. La búsqueda lineal consiste en ir evaluando \mathcal{J}_{Ω} para valores decrecientes de κ hasta que la misma descienda respecto a la iteración anterior. Inicialmente se define $\kappa := 1$ y se redefine iterativamente por la regla $\kappa := \kappa/2$ cada vez que no se obtiene un descenso en el valor del funcional.

La dirección de descenso considerada por defecto produce una geometría optimizada con importantes rugosidades, donde los bordes de Ω tienden a pasar por los nodos de la malla, y no se aprovecha el efecto beneficioso del XFEM. Para evitar esto se suaviza la función de nivel mediante el algoritmo de Garcia (2010) el cual requiere utilizar mallas estructuradas, y además admite un parámetro de entrada (δ) que establece el nivel de regularización.

A continuación se presenta el pseudocódigo del algoritmo implementado:

1. Se define D , ψ inicial, M , β , los casos de carga, tolerancias en el objetivo final de área (T_M) y en el mínimo cambio de área (T_A), el coeficiente de suavizado (δ) y $\alpha := 0$.
2. Se calcula el lagrangeano aumentado \mathcal{J}_{Ω} y su derivada $\mathcal{J}_{\mathcal{J}}$ según las expresiones (5) y (15).
3. Si el área a modificar con $\kappa = 1$ es menor a la tolerancia $T_A \rightarrow$ Se pasa al paso 4. En caso contrario se pasa al paso 5.
4. Se actualiza α según (6) \rightarrow Volver al paso 2.
5. Se ejecuta la búsqueda lineal \rightarrow Se obtiene ψ_{n+1} .
6. Se suaviza ψ_{n+1} .
7. Si no se obtuvo la tolerancia T_M , volver a paso 2. Si se obtuvo, fin del algoritmo, se devuelve la función de nivel final ψ_{fin} y el dominio optimizado Ω .

6 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan dos ejemplos numéricos del uso del método desarrollado. En todos los casos se consideró un módulo de Young $E = 1$, un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ y un valor del contraste entre los materiales $\gamma = 10^{-3}$.

El primer ejemplo es la estructura de ménsula presentada en la Figura 3 que posee una longitud de 2 y un alto de 1. La cara izquierda se encuentra apoyada en toda dirección mientras que en el centro de la cara derecha se aplica una carga descendente de valor $q = 1$. La región D es considerada como todo el rectángulo así como el dominio inicial Ω . Se considera una malla regular de 61×31 nodos, parámetros $\beta = 30$ y $\delta = 0,15$, un área objetivo del 50 % ($M = 0,5$) con una tolerancia de 1 % y una tolerancia en el mínimo cambio de área $T_A = 2$ %. Se presenta en la Figura 4 la geometría optimizada obtenida en 31 iteraciones, donde se aprecia la ventaja que ofrece el XFEM para poder representar barras oblicuas a la malla.



Figura 3: Condiciones iniciales del primer ejemplo

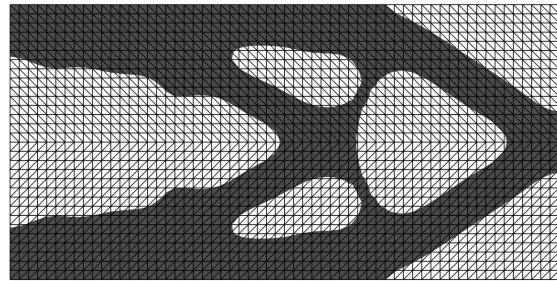


Figura 4: Geometría optimizada del primer ejemplo

A modo de ejemplo se presenta en las Figuras 5 y 6 los resultados en la segunda iteración, donde el área era del 87,7 % del volumen inicial y en la iteración número 18, donde el área era del 60,9 %. En la segunda figura se observa uno de los problemas que puede tener el método, donde las barras de tamaño similar al del elemento tienden a presentar una geometría irregular.



Figura 5: Iteración 2 para el primer ejemplo.

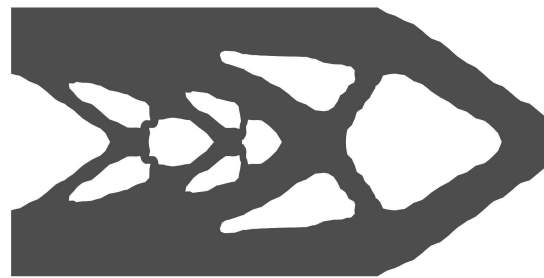


Figura 6: Iteración 18 para el primer ejemplo.

El segundo ejemplo es la estructura de gancho presentada en la Figura 7, donde la esquina tiene unas dimensiones de 2×2 y los brazos vuelan una longitud de 3. La cara superior se encuentra apoyada en toda dirección y en el centro de la cara derecha se aplican dos casos de carga, uno de una carga descendente de valor $q_1 = 1$ y otro una carga horizontal de valor $q_2 = 0,4$. La región D es considerada como la L presentada y nuevamente Ω inicial coincide con la misma. Se considera en este caso una malla regular de $5/60$ de lado, parámetros $\beta = 1$ y $\delta = 0,2$, un área objetivo del 50 % ($M = 0,5$) con una tolerancia de 0,2 % y una tolerancia en el cambio mínimo de área $T_A = 5$ %.

Se presenta en la **Figura 8** la estructura obtenida en 19 iteraciones, donde es importante destacar que la esquina recta es conservada, lo que es un problema para la estructura pues se producen tensiones altas en esa esquina. Al no existir ningún tipo de penalización de las tensiones el algoritmo propuesto proporciona soluciones que pueden presentar este inconveniente.

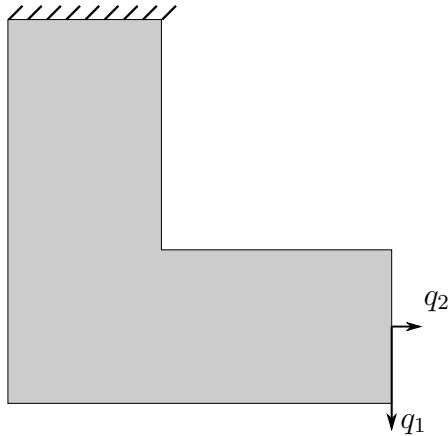


Figura 7: Condiciones iniciales del segundo ejemplo.

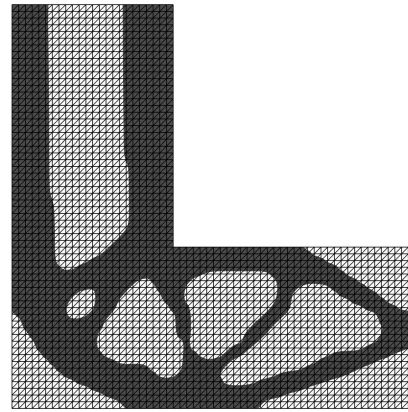


Figura 8: Topología óptima del segundo ejemplo.

7 CONCLUSIONES

Se logró desarrollar un código novedoso que permite diseñar estructuras planas minimizando el trabajo de las fuerzas externas, sin la necesidad de utilizar mallas de elementos finitas muy densas, mediante el uso del XFEM y el concepto de la derivada topológica.

Como gran ventaja del método implementado se aprecia el bajo requerimiento computacional por la posibilidad de utilizar mallas gruesas. Como desventajas, se destaca que no se pueden generar barras muy finas, tanto por el uso de mallas gruesas así como consecuencia del algoritmo de suavizado. Como punto adicional, el uso del método del lagrangeano aumentado y el algoritmo de suavizado requiere parámetros de calibración *caso a caso*. Además en ocasiones se obtienen estructuras algo rugosas, por lo cual la solución obtenida podría ser utilizada como insumo para algoritmos de optimización de forma.

Como posibles trabajos a futuro se propone extender la metodología a estructuras tridimensionales. Además, actualmente se está trabajando en implementar metodologías que permitan evitar la aparición de tensiones altas como la esquina del segundo ejemplo presentado.

AGRADECIMIENTOS

Los trabajos presentados en este artículo fueron realizados con el apoyo económico de la *beca de apoyo para la finalización de estudios de posgrado en la Udelar - Maestría* de la Comisión Académica de Posgrado de la Universidad de la República.

REFERENCIAS

- Abdi M., Wildman R., y Ashcroft I. Evolutionary topology optimization using the extended finite element method and isolines. *Engineering Optimization*, 46:628–647, 2013. doi:10.1080/0305215X.2013.791815.
- Amstutz S. y Andrä H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 216:573–588, 2006. doi:10.1016/j.jcp.2005.12.015.

- Bendsøe M.P. y Sigmund O. *Topology Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2ª edición, 2004. doi:10.1007/978-3-662-05086-6.
- Dréau K., Chevaugnon N., y Moës N. Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1922–1936, 2010. doi:10.1016/j.cma.2010.01.021.
- García D. Robust smoothing of gridded data in one and higher dimensions with missing values. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54:1167–1178, 2010. doi:10.1016/j.csda.2009.09.020.
- Geiss M.J., Barrera J.L., Boddetti N., y Maute K. A regularization scheme for explicit level-set XFEM topology optimization. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 14:153–170, 2019. doi:10.1007/s11465-019-0533-2.
- Giusti S.M., Novotny A.A., y Padra C. Topological sensitivity analysis of inclusion in two-dimensional linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32:926–935, 2008. doi:10.1016/j.enganabound.2007.12.007.
- Liu P., Luo Y., y Kang Z. Multi-material topology optimization considering interface behaviour via XFEM and level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 308:113–133, 2016. doi:10.1016/j.cma.2016.05.016.
- Lopes C.G., dos Santos R.B., y Novotny A.A. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12:834–860, 2015. doi:10.1590/1679-78251252.
- Luenberger D.G. y Ye Y. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, New York, 3ª edición, 2008.
- Michell A. The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edingburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8:589–597, 1904. doi:10.1080/14786440409463229.
- Moës N., Dolbow J., y Belytschko T. A finite element method for crack growth without re-meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- Novotny A.A. y Sokolowski J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1ª edición, 2013. doi:10.1007/978-3-642-35245-4.
- Oñate E. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics*. International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, España, 1ª edición, 2009. doi:10.1007/978-1-4020-8733-2.
- Sadd M.H. *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier Inc., Burlington, 2ª edición, 2009. doi:10.1016/B978-0-12-374446-3.X0001-6.
- Van Mieghroet L. y Duysinx P. Stress concentration minimization of 2D fillets using X-FEM and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33:425–438, 2007. doi:10.1007/s00158-006-0091-1.