

OPTIMIZACIÓN DE AMORTIGUAMIENTO INTERNO DE RESONADORES PARA LA ATENUACIÓN DE VIBRACIONES FLEXO- TORSIONALES EN METAESTRUCTURAS ESBELTAS LOCALMENTE RESONANTES

OPTIMIZATION OF INTERNAL DAMPING OF RESONATORS FOR ATTENUATING FLEXURAL-TORSIONAL VIBRATIONS IN LOCALLY RESONANT SLENDER METASTRUCTURES

Patricia N. Dominguez^{a,b} y Víctor H. Cortínez^{a,b,c}

^a*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^b*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@hotmail.com*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras clave: vigas localmente resonantes, atenuación de vibraciones, resonadores amortiguados.

Resumen. En este trabajo se investigan los efectos de la razón de amortiguamiento de los resonadores sobre la dinámica flexo-torsional de metaestructuras esbeltas localmente resonantes de sección asimétrica. Se estudian, en particular, criterios de diseño para la selección de las razones de amortiguamiento que generen una atenuación óptima de la estructura principal. La investigación se realiza a partir de una formulación matemática del problema basada en un enfoque homogeneizado de la teoría de vigas Vlasov. Se presenta la formulación del problema, se describe un enfoque simplificado de diseño práctico de la razón de amortiguamiento óptima y se muestran algunos estudios numéricos.

Keywords: locally resonant beams, vibration attenuation, damped resonators.

Abstract. In this work, the effects of the damping ratio of resonators on the flexural-torsional dynamics of locally resonant slender metastructures with asymmetric cross-sections are investigated. In particular, design criteria are studied for selecting damping ratios that result in optimal attenuation of the main structure. The research is carried out through a mathematical formulation of the problem, based on a homogenized approach of Vlasov beam theory. The formulation of the problem is presented, a simplified approach for practical design of the optimal damping ratio is described and some numerical studies are showcased.

1 INTRODUCCIÓN

En años recientes, las metaestructuras localmente resonantes han adquirido gran interés técnico-científico por sus aptitudes para la atenuación de amplitudes de vibraciones en diversos sistemas de ingeniería (Liu et al., 2000, Rohan et al., 2009). Se trata de una estructura principal, que se intenta proteger, sobre la cual se distribuyen de manera aproximadamente regular una gran cantidad de resonadores (sistemas masa-resorte). Si se seleccionan adecuadamente las características de estos últimos, las metaestructuras presentan “bandgaps” o rangos de frecuencia en los cuales las amplitudes de vibración de la estructura principal, bajo la acción de cargas dinámicas, es suprimida o minimizada. Esta estrategia ha sido investigada para atenuar vibraciones transversales, torsionales o longitudinales en vigas y vibraciones transversales en placas (Sun et al., 2010, Cveticanin y Mester, 2016, Sugino et al., 2017). Recientemente, se ha propuesto utilizar tal concepto para atenuar vibraciones flexo-torsionales acopladas en estructuras esbeltas de sección asimétrica (Dominguez et al., 2022), lo que puede ser de interés para su aplicación en puentes, alas de aviones y palas de aerogeneradores, entre otras.

Si bien la respuesta dinámica es fuertemente atenuada en los “bandgaps”, pueden presentarse grandes amplitudes si las frecuencias de excitación se apartan ligeramente de los mismos. Luego, para evitar el peligro de vibraciones de gran amplitud en cercanías de los “bandgaps” se puede recurrir al amortiguamiento interno de los resonadores. De esta manera, el rango efectivo de atenuación puede ampliarse. Sin embargo, si las constantes de amortiguamiento fueran muy altas podrían anular las propiedades de atenuación dentro de los “bandgaps”. Luego resulta necesario adoptar cuidadosamente el grado de amortiguamiento de los resonadores para lograr una atenuación óptima del sistema estructural (Shen y Lacarbonara, 2023). Tal tipo de problemática ha sido estudiada clásicamente en relación a la utilización de amortiguadores dinámicos aislados (Rao, 2012).

En este trabajo se investigan los efectos de la razón de amortiguamiento de los resonadores sobre la dinámica flexo-torsional de metaestructuras esbeltas localmente resonantes de sección asimétrica. Se estudian, en particular, criterios de diseño para la selección de las razones de amortiguamiento que generen una atenuación óptima de la estructura principal. La investigación se realiza a partir de una formulación matemática del problema basada en un enfoque homogeneizado de la teoría de vigas Vlasov (Dominguez et al., 2022). Se presenta la formulación del problema, se describe un enfoque simplificado de diseño práctico de la razón de amortiguamiento óptima y se realizan estudios numéricos apropiados.

2 DINÁMICA FLEXO-TORSIONAL DE VIGAS DE PARED DELGADA LOCALMENTE RESONANTES MONOSIMÉTRICAS

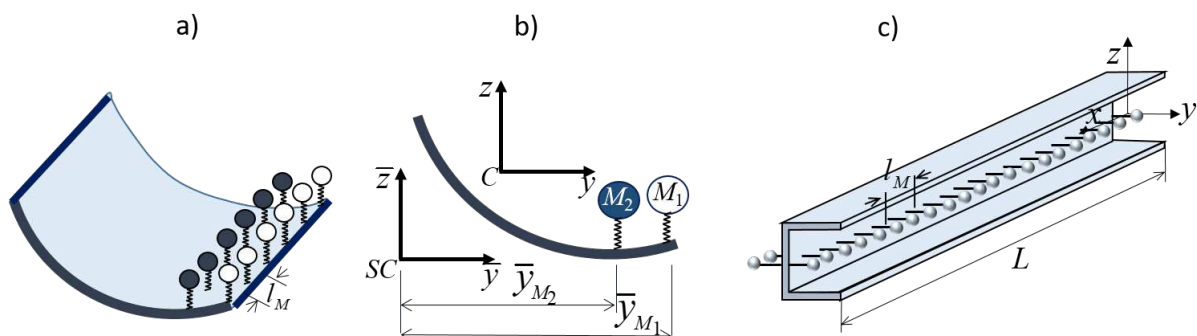


Figura 1: Viga de pared delgada con resonadores periódicamente distribuidos.

Se considera la viga monosimétrica de pared delgada (Figura 1), concebida como una sucesión de N_s celdas de igual longitud l_M , sujeta a cargas armónicas transversales. Cada celda (o tramo de viga) contiene N_r resonadores orientados en la dirección del eje z como se muestra en la Figura 1. Se asume que las N_s celdas tienen idéntica configuración de resonadores y que la distancia entre ellas es muy pequeña frente a la longitud total de la viga ($l_M \ll L$). Esta característica hace posible considerar, de manera aproximada, que los resonadores se encuentran distribuidos de manera continua sobre la viga (homogeneización). La dinámica flexo-torsional de tal sistema localmente resonante se describe mediante la teoría de Vlasov (Dominguez et al. 2022; Cortínez y Dominguez, 2022):

$$EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - y_s \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + CA \left(\frac{\partial w}{\partial t} - y_s \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = - \sum_{j=1}^{N_r} \rho A \alpha_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + \bar{q}_z \cos(\omega t)$$

$$EC_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{I_s}{A} \phi - y_s w \right) + CA \left(\frac{I_s}{A} \frac{\partial \phi}{\partial t} - y_s \frac{\partial w}{\partial t} \right) = - \sum_{j=1}^{N_r} \rho A \alpha_j \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} \bar{y}_{Mj} \quad (1a,b,c)$$

$$+ \bar{m}_x \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + 2\eta_j \omega_j \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \omega_j^2 \xi_j = \omega_j^2 (w + \phi \bar{y}_{Mj}) + 2\eta_j \omega_j \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \bar{y}_{Mj} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_r$$

donde:

$$\alpha_j = M_j / (\rho A l_M), \quad \omega_{Mj} = \sqrt{K_j / M_j}, \quad \eta_j = C_j / (2M_j \omega_{Mj}) \quad (2)$$

En las expresiones previas, w corresponde al desplazamiento transversal del centro de corte en la dirección z , ϕ a la rotación torsional, ξ_j es el desplazamiento, en la dirección de z de la masa j -ésima ubicada en una sección genérica x , EI_y , EC_w y GJ son las rigideces de flexión, torsión por alabeo y torsión pura respectivamente, ρ es la densidad, A , I_s , y_s corresponden al área de la sección transversal, el momento de inercia con respecto al centro de corte y la coordenada del centro de corte con respecto al centroide respectivamente, CA es la constante de amortiguamiento de la estructura, K_j , C_j y M_j son la rigidez, el coeficiente de amortiguamiento y la masa, respectivamente, de cada resonador j -ésimo, \bar{y}_{Mj} es la coordenada del punto de anclaje del resonador j -ésimo con respecto al centro de corte, α_j es el cociente entre la masa total del resonador j -ésimo y la masa de la viga en la celda, ω_{Mj} y η_j corresponden a la frecuencia local y al amortiguamiento del resonador j -ésimo, respectivamente, \bar{q}_z , \bar{m}_x corresponden a las amplitudes de las cargas distribuidas en la dirección z y al momento tursor distribuido con respecto al eje x , respectivamente, y ω es la frecuencia de excitación. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

La solución del problema de vibraciones forzadas estacionarias se obtiene mediante las expresiones:

$$w = W_c(x) \cos(\omega t) + W_s(x) \text{sen}(\omega t)$$

$$\phi = \psi_c(x) \cos(\omega t) + \psi_s(x) \text{sen}(\omega t) \quad (3)$$

$$\xi_j = \bar{\xi}_{cj} \cos(\omega t) + \bar{\xi}_{sj} \text{sen}(\omega t)$$

Introduciendo (3) en (1) y eliminando $\bar{\xi}_{cj}$ y $\bar{\xi}_{sj}$ se obtiene un sistema de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas incógnitas son W_c, W_s, ψ_c, ψ_s . Analizando las propiedades de tal sistema es posible distinguir la existencia de bandgaps. Éstos son rangos de frecuencias donde no existen frecuencias naturales de la estructura localmente resonante, y entonces, las vibraciones forzadas se mantienen moderadas ya que las cargas forzantes armónicas no provocarán gran amplificación dinámica. Dichos bandgaps dependen de las características del sistema de resonadores siendo independientes de las condiciones de borde y de la distribución espacial de la carga.

3 SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LAS VIBRACIONES FORZADAS DE VIGAS LOCALMENTE RESONANTES

La solución del sistema (1-2), considerando (3) puede ser obtenida por diferentes métodos analíticos y numéricos para diferentes condiciones de carga y condiciones de borde. En particular la solución analítica para condiciones de borde de apoyo simple ($W_c = W_s = \psi_c = \psi_s = W_c'' = W_s'' = \psi_c'' = \psi_s'' = 0$ en $x=0, L$) puede obtenerse por medio de las siguientes expansiones de Fourier para los desplazamientos generalizados y las cargas:

$$\begin{aligned} W_c &= \sum_n B_{1n} \text{sen}(\lambda_n x), \psi_c = \sum_n B_{2n} \text{sen}(\lambda_n x), W_s = \sum_n B_{3n} \text{sen}(\lambda_n x), \psi_s = \sum_n B_{4n} \text{sen}(\lambda_n x) \\ \bar{q}_z &= \sum_n q_n \text{sen}(\lambda_n x), \bar{m}_x = \sum_n q_n e_n \text{sen}(\lambda_n x), \lambda_n = n\pi / L \end{aligned} \quad (4)$$

Tales expresiones verifican las condiciones de borde. Sustituyendo (4) en (3), el resultado en (1), y eliminando $\bar{\xi}_{cj}$ y $\bar{\xi}_{sj}$, tal como se comentó anteriormente, se llega al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas para cada n :

$$\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n = \mathbf{q}_n; \quad \mathbf{B}_n = [B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}]^T; \quad \mathbf{q}_n = [q_n, q_n r_n, 0, 0]^T \quad (5)$$

donde las componentes de la matriz \mathbf{A}_n vienen dadas por:

$$\begin{aligned} A_{11}^n &= EI_y \lambda_n^4 - \rho A \omega^2 \left(1 + \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \right); \quad A_{12}^n = \rho A \omega^2 \left(y_s - \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj} \right) \\ A_{13}^n &= CA \omega - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j}; \quad A_{14}^n = -CA \omega y_s - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj} \\ A_{21}^n &= A_{12}^n; \quad A_{22}^n = EC_w \lambda_n^4 + GJ \lambda_n^2 - \rho A \omega^2 \left(I_s / A + \sum_j \alpha_j \beta_{1j} \bar{y}_{Mj}^2 \right); \quad A_{23}^n = A_{14}^n; \\ A_{24}^n &= CA \omega I_s / A - \rho A \omega^2 \sum_j \alpha_j \beta_{2j} \bar{y}_{Mj}^2; \quad A_{31}^n = -A_{13}^n; \quad A_{32}^n = -A_{14}^n; \quad A_{33}^n = A_{11}^n; \\ A_{34}^n &= A_{12}^n; \quad A_{41}^n = -A_{13}^n; \quad A_{42}^n = -A_{14}^n; \quad A_{43}^n = A_{11}^n; \quad A_{44}^n = A_{22}^n \end{aligned} \quad (6)$$

donde:

$$\beta_{1j} = \frac{1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2}{\left(1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 \right)^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2}; \quad \beta_{2j} = -\frac{2\eta_j (\omega / \omega_{Mj})^3}{\left(1 - (\omega / \omega_{Mj})^2 \right)^2 + 4\eta_j^2 (\omega / \omega_{Mj})^2} \quad (7)$$

La solución del sistema (5) permite determinar los coeficientes de Fourier

$B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}$, y entonces, la solución del problema a partir de (4).

4 RAZÓN DE AMORTIGUAMIENTO ÓPTIMO

Se pretende atenuar las amplitudes de vibración de una viga huésped (sin resonadores) que está sometida a una carga armónica. Se supone que la frecuencia de excitación de dicha carga es cercana a una de las frecuencias naturales de la viga. Entonces, el sistema de resonadores distribuidos a acoplar a la estructura huésped (Figuras 1 y 3) debe ser diseñado para evitar la resonancia asociada a tal frecuencia.

La estrategia básica consiste en adoptar valores de las constantes de rigidez y las masas de cada uno de los resonadores del sistema de manera tal de generar un bandgap que contenga a la frecuencia natural objetivo, lo que asegura la inexistencia de resonancias. Sin embargo, puede ocurrir que para rangos de frecuencia externos pero cercanos al bandgap, aparezcan amplitudes grandes. Esta situación se ilustra en la Figura 2 que muestra cualitativamente la función de respuesta en frecuencia para el desplazamiento en un punto de la viga. Para hacer más robusto el control de vibraciones, es entonces deseable generar bandgaps del mayor ancho posible. Si bien, en principio, esto se puede lograr mediante el incremento de las masas de los mismos, existe una limitación de tal posibilidad para evitar introducir peso adicional en la estructura huésped.

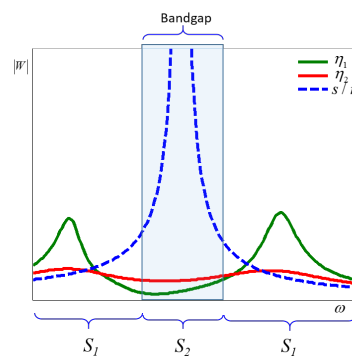


Figura 2: Esquema cualitativo de la función de respuesta en frecuencia para el desplazamiento en un punto de la viga de pared delgada con resonadores periódicamente distribuidos.

Como una alternativa para minimizar las amplitudes de vibración a los costados del bandgap, puede recurrirse al amortiguamiento interno en cada uno de los resonadores. Esta estrategia produce una disminución de tales amplitudes externas al bandgap a costa de un incremento de la respuesta dentro del mismo. Considerando que la estrategia principal es la utilización del efecto localmente resonante dentro del bandgap, ya que se asume mayor probabilidad de que la frecuencia de excitación se encuentre en este rango, debe procurarse que las razones de amortiguamiento de los resonadores sean tales que minimicen las amplitudes externas a los bangaps sin elevar en demasía el nivel de vibración dentro de éstos. En la Figura 2 se muestran conceptualmente dos funciones de respuesta en frecuencia para dos razones de amortiguamiento diferentes. La denominada η_1 aplanan la respuesta dentro del bandgap, incrementando de manera importante la amplitud fuera del mismo. En cambio, la razón de amortiguamiento η_2 , mantiene prácticamente iguales las amplitudes de vibración dentro del bandgap y al mismo tiempo disminuye las respuestas muy altas fuera de él. Ésta última es la situación perseguida en este trabajo.

Para determinar de manera cuantitativa el valor apropiado de η , se propone aquí seguir el

siguiente procedimiento: a) obtener la respuesta en frecuencia para el desplazamiento de un punto representativo de la estructura; b) evaluar la función objetivo (8) para diferentes valores de η ; c) el valor más apropiado de la razón de amortiguamiento es aquel que minimiza la función $F(\eta)$ indicada a continuación:

$$F(\eta) = \gamma_1 \int_{S_1} |W_A| d\omega + \gamma_2 \int_{S_2} |W_A| d\omega, \quad \eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_{\max} \quad (8)$$

donde W_A es el desplazamiento vertical de un punto representativo A de la estructura (Figura 3) y S_1 y S_2 corresponden a los rangos de frecuencias externas e internas del bandgap (Figura 2). Los factores γ_1 y γ_2 que se muestran en la expresión de $F(\eta)$ (8) indican la ponderación para las amplitudes en dichos rangos. Aquí se han adoptado $\gamma_1 = 0.25$ y $\gamma_2 = 0.75$. Como se mostrará en los estudios numéricos esta elección genera valores de amortiguamiento adecuados.

Para una viga simplemente apoyada (SA), la función de respuesta en frecuencia puede determinarse fácilmente mediante la solución analítica desarrollada en el punto anterior con condiciones de borde $W_C = W_S = \psi_C = \psi_S = W_C'' = W_S'' = \psi_C'' = \psi_S'' = 0$ en $x=0$ y en $x=L$. Debe definirse aún la distribución espacial de carga externa para obtener la respuesta forzada. Sin embargo, independientemente de la forma precisa de esta última, la componente de Fourier (4) más importante, en condiciones cercanas a resonancia, será aquella cuya forma coincida con la del modo resonante. En efecto, la respuesta para esta componente de carga será muy amplificada y, en consecuencia, probablemente dominante. Aquí se denominará a tal componente de carga como “carga modal”. En tal caso, la respuesta en frecuencia puede ser obtenida fácilmente con una sola componente de Fourier de la solución (5) y a partir de allí puede determinarse η de diseño minimizando la función $F(\eta)$ (8). Se espera que el valor así obtenido de η arroje valores apropiados para una distribución de carga arbitraria. Asimismo, se espera que los valores obtenidos con tal enfoque simplificado sean también representativos para otras condiciones de borde si se basan en una viga simplemente apoyada “equivalente”, en el sentido de que tenga una frecuencia natural idéntica a la frecuencia resonante de la viga de interés. Para ello hay que elegir apropiadamente la longitud de la viga equivalente. La fundamentación de esta idea es que la correspondiente respuesta en frecuencia es similar a la de la viga real.

Como se mostrará en los estudios numéricos, este criterio empírico produce valores apropiados para razones de amortiguamiento de resonadores independientemente de las condiciones de borde.

5 ESTUDIOS NUMÉRICOS

Se consideran las vibraciones flexo-torsionales (W, ψ) de una viga monosimétrica acoplada a resonadores tipo voladizo (Figura 3). Las propiedades de esta estructura sin resonadores (estructura base o huésped) son las siguientes: $L=2$ m, $h=0.1$ m, $b=0.04$ m, $t=0.006$ m, $y_s = -0.020816$ m, $E = 4.5E10$ Pa, $\rho = 2650$ kg/m³ y $G = 1.8E10$ Pa. En los ejemplos que siguen, se pretende atenuar la respuesta forzada en cercanías de alguna frecuencia natural del sistema base para lo cual se colocan 2 resonadores (1, 2) de iguales características, distribuidos periódicamente a lo largo de la viga ($Nr=2$). Las correspondientes frecuencias locales de los resonadores son $\omega_{M1} = \omega_{M2} = 0.94\omega_T$, siendo ω_T la frecuencia

resonante para la cual se pretende atenuar la respuesta de la estructura. En todos los casos se mantienen constantes la relación de masa de los resonadores $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.25$, y las ubicaciones con respecto al centro de corte, $\bar{y}_1 = 0.03m$ y $\bar{y}_2 = -0.03m$, donde los subíndices 1 y 2 corresponden a la ubicación de los resonadores a derecha (a_1) e izquierda (a_2) del mismo. Se ha realizado una serie de estudios de vibración forzada determinando en todos los casos la respuesta en frecuencia para el punto A (Figura 3) correspondiente a la sección media ($x=L/2$) de la viga. Con esta magnitud se determina la función objetivo $F(\eta)$ dada por la ecuación (8) con coeficientes de ponderación $\gamma_1 = 0.25$ y $\gamma_2 = 0.75$.

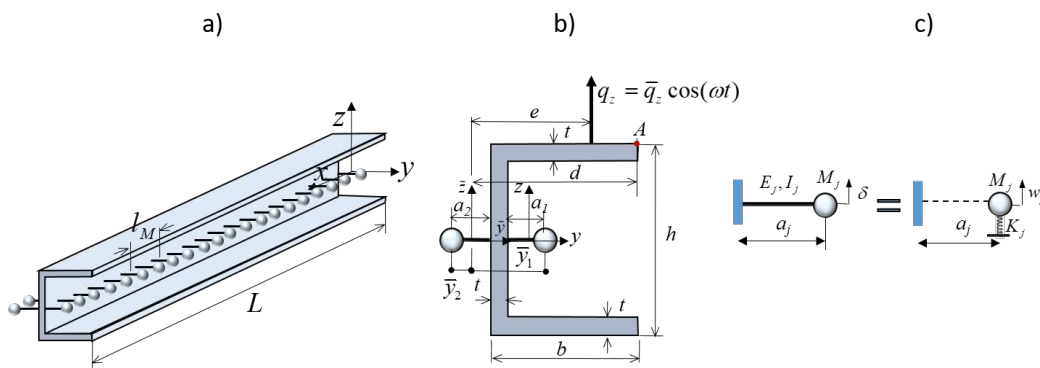


Figura 3: Viga localmente resonante analizada. a) Viga con resonadores distribuidos longitudinalmente, b) sección transversal de la estructura considerada, c) resonador masa-resorte equivalente.

En primer lugar, se considera como objetivo la atenuación de la respuesta dinámica en cercanías de la frecuencia natural de la viga simplemente apoyada sin resonadores $\omega_T = \omega_{n1} = 292.3 \text{ rad/s}$ (Dominguez et al. 2022) sometida a la carga “modal” $\bar{q}_z = (4q_0 / \pi) \text{sen}(\pi x / L)$, $m_x = \bar{q}_z d (Nm/m)$ con $q_0 = 1N/m$. El bandgap para esta configuración de resonadores se extiende entre 274.8 rad/s y 300.9 rad/s . Utilizando las expresiones (4-8) se ha determinado la función $F(\eta)$ para diferentes valores de la razón de amortiguamiento η .

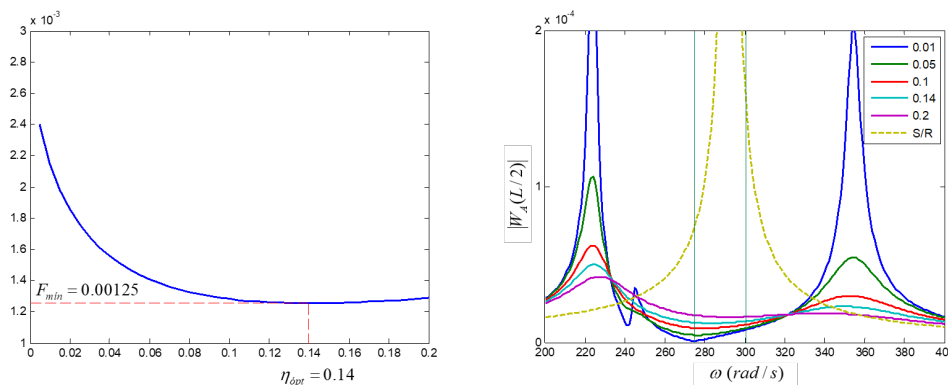


Figura 4: a) $F(\eta)$ para $\omega_T = \omega_{n1} = 292.3 \text{ rad/s}$ y $\bar{q}_z = (4q_0 / \pi) \text{sen}(\pi x / L) N/m$ y $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$, b) respuesta en frecuencia para diferentes valores de η

En la Figura 4a se puede apreciar esta variación, así como el valor óptimo que minimiza $F(\eta)$, $\eta_{\text{opt}} = 0.14$. En la Figura 4b se muestran las respuestas en frecuencia de $|W_A(L/2)|$ para diferentes valores de η y en particular para η_{opt} . Asimismo, se muestran los límites del

bandgap generado por los resonadores. Como se observa, para el valor óptimo de η , la respuesta en el bandgap se mantiene muy baja mientras que para los valores resonantes 225 rad/s y 355 rad/s se mantiene suficientemente baja.

Para estudiar si el valor obtenido tiene una independencia aproximada de la forma específica de la carga, se ha efectuado un análisis de vibración forzada para una carga $\bar{q}_z = 1 \cos(\omega t) N/m$ y $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$ empleando la solución (4-7) con n máximo igual a 15. Las curvas de las respuestas en frecuencia obtenidas para este caso son prácticamente idénticas a las de la situación anterior y el valor de la razón de amortiguamiento óptimo no cambia.

A continuación se considera la misma estructura, aunque ahora se pretende atenuar las vibraciones en cercanías de la frecuencia natural de la viga huésped (sin resonadores) $\omega_T = 3942.3 rad/s$, correspondiente a las formas modales proporcionales a $sen(3\pi x/L)$. El correspondiente bandgap se extiende entre 3705.8 rad/s y 4059.3 rad/s . Se consideran a continuación dos tipos de cargas: a) una carga modal $\bar{q}_z = (4q_0/3\pi) sen(3\pi x/L) N/m$, $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$ y b) una carga espacialmente uniforme: $\bar{q}_z = 1 \cos(\omega t) N/m$, $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$.

Mediante la solución simplificada se ha obtenido el valor de $\eta_{opt} = 0.165$, mientras que para la carga uniforme $\eta_{opt} = 0.095$. En la Figura 5 se muestran las respuesta en frecuencia para estos estados de carga para ambos valores de η . Comparando dichas respuestas para la carga simplificada (Figura 5a) y la uniforme (Figura 5b) se observa similitud de comportamiento en cercanías del bandgap. Alejándose en el sentido creciente de la frecuencia, para amortiguamiento más bajo aparecen algunas discrepancias. No obstante, la respuesta correspondiente al valor óptimo de η obtenido para el caso simplificado arroja también una buena respuesta para la carga uniforme.

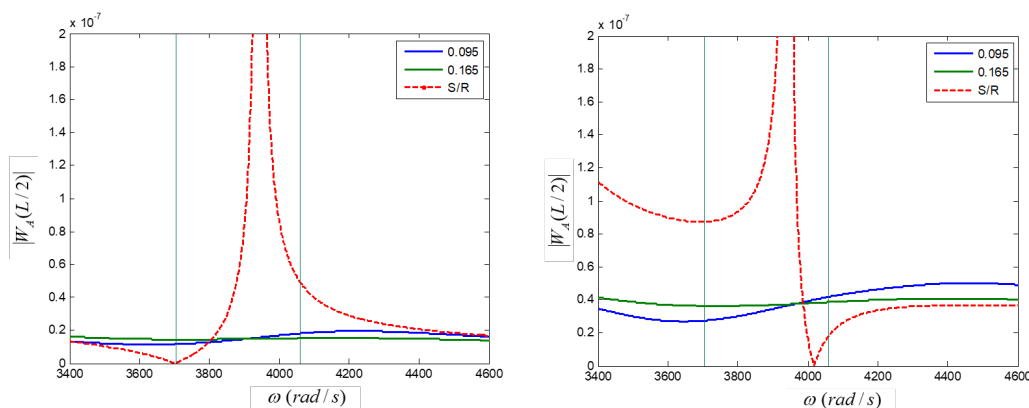


Figura 5: Respuesta en frecuencia para diferentes valores de η , a) $\bar{q}_z = (4q_0/3\pi) sen(3\pi x/L)$, $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$, b) $\bar{q}_z = 1 N/m$, $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm/m$

Finalmente, se analiza si existe similitud en la respuesta en frecuencia normalizada para diferentes condiciones de borde. Para esto, se considera la estructura descrita anteriormente pero, en este caso, con una longitud $L=4$ m y condiciones de empotramiento en ambos extremos. Se pretende atenuar la respuesta en cercanía de su frecuencia fundamental $\omega_T = 160.3 rad/s$ diseñando los resonadores con frecuencia local $\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = 155.5 rad/s$. El bandgap para esta configuración de resonadores se extiende entre 155.5 rad/s y 170.3 rad/s .

La frecuencia que se pretende atenuar es similar a la que corresponde a una viga simplemente apoyada con una longitud equivalente $L_{eq} = 2.92 m$. Se obtiene la respuesta en frecuencia de ambas estructuras cargando cada una de ellas con sus respectivas cargas modales. En la Figura 6 se muestra la comparación entre las respuestas en frecuencia normalizadas $|W_A(L/2)| / \text{máx} (|W_A(L/2)|)$ para ambos casos, observándose que existe una similitud entre ambas. La razón de amortiguamiento óptimo obtenida con la solución simplificada es $\eta = 0.2$, al igual que la obtenida para la estructura real biempotrada. Otros cálculos realizados, no mostrados aquí, indican que una comparación similar para una carga uniforme $\bar{q}_z = 1 \cos(\omega t) N / m$ y $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm / m$ arroja un resultado similar con el mismo valor de $\eta = 0.2$ para el modelo simplificado.

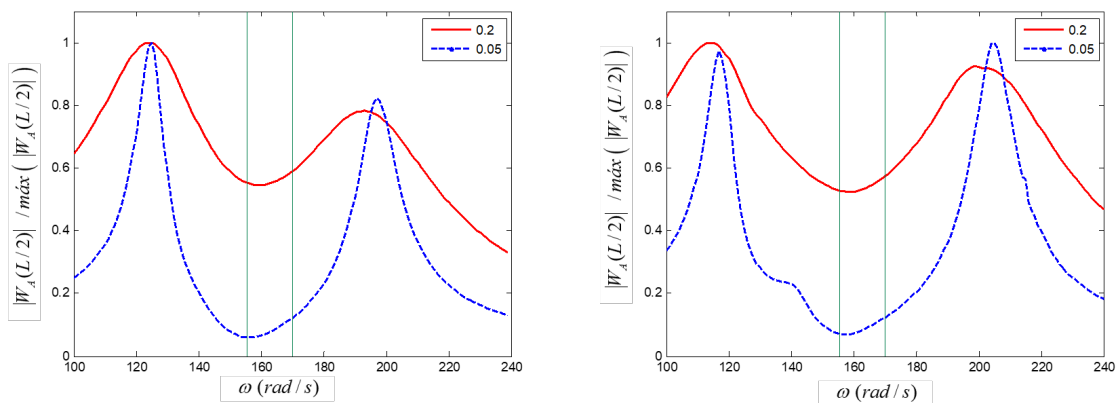


Figura 6: Respuesta en frecuencia normalizada: a) viga E-E, $L = 4 m$, $\bar{q}_z = (4q_0 / \pi) \text{sen}(\pi x / L) N / m$, $\bar{m}_x = \bar{q}_z d Nm / m$, b) viga simplificada SA, $L_{eq} = 2.92 m$ con la misma carga.

Tiene sentido comparar los valores de η aquí determinados con los que se obtendrían a partir de las conocidas fórmulas de Den Hartog.

$$\eta_{opt_DH} = \frac{3\beta_n}{8(1 + \beta_n)}, \quad \omega_{M_DH} = \frac{\omega_{Hn}}{1 + \beta_n} \tag{9}$$

donde β_n es la razón modal entre la masa de los resonadores y la de la estructura (estructura huésped SA), ω_{Hn} es la frecuencia a proteger de la estructura huésped y ω_{M_DH} es el valor de diseño de la frecuencia de cada resonador en el sentido óptimo recomendado por Den Hartog.

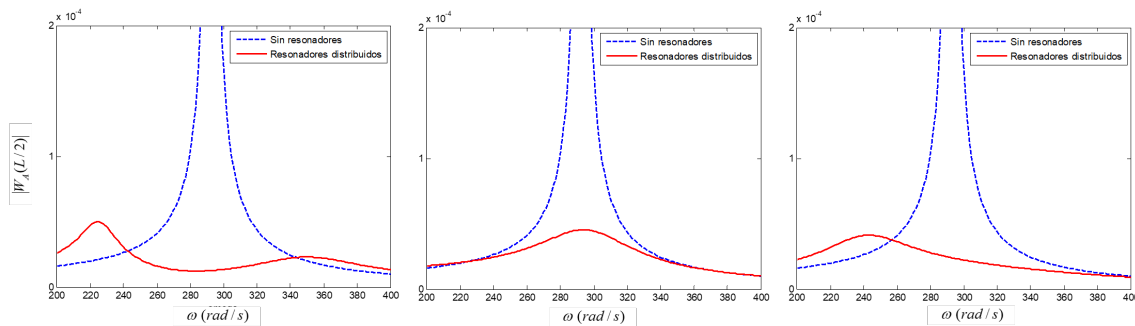


Figura 7: Respuesta en frecuencia para la viga SA con carga modal ($n=1$): a) $\eta_{opt} = 0.14$, $\omega_{M1} = \omega_{M2} = 274.8$, b) $\eta_{opt_DH} = 0.368$, $\omega_{M1} = \omega_{M2} = 186.9$ y c) $\eta_{opt_DH} = 0.368$ y $\omega_{M1} = \omega_{M2} = 274.8$.

En la **Figura 7** se observa una comparación de la respuesta en frecuencia para la estructura SA, con carga modal para $n=1$ ($\bar{q}_z = (4q_0 / \pi) \text{sen}(\pi x / L)$, $m_x = \bar{q}_z d (Nm / m)$) para $\omega_{Hn} = 292.3 \text{ rad} / s$, utilizando; a) el valor de $\eta_{opt} = 0.14$ calculado en el presente trabajo, b) el resultado análogo con los valores recomendados por Den Hartog (**9 a, b**) $\eta_{opt_DH} = 0.368$, $\omega_{M_DH} = 186.9 \text{ rad} / s$, y c) resultado análogo considerando únicamente la razón de amortiguamiento recomendada por Den Hartog (**9a**), aunque tomando la frecuencia local del resonador como se indica en el presente trabajo. Como es posible apreciar, el comportamiento es mucho mejor utilizando la razón de amortiguamiento propuesta en este trabajo. El enfoque clásico (**Figura 7b**) falla debido a que la frecuencia local recomendada provoca que el bandgap se aparte de la zona de resonancia que se quiere evitar, de tal manera que se pierde el efecto de la resonancia local. El enfoque híbrido (**Figura 7c**) funciona un poco mejor, aunque la razón de amortiguamiento es tan alta que tampoco permite utilizarse eficientemente el efecto localmente resonante.

6 CONCLUSIONES

Se ha estudiado el efecto de la razón de amortiguamiento de los resonadores sobre la respuesta en frecuencia dentro del bandgap generado como así también en cercanías del mismo. Se ha obtenido un procedimiento simplificado para determinar valores adecuados de tales coeficientes de manera tal de respetar las bajas amplitudes dentro del bandgap y al mismo tiempo disminuir adecuadamente los picos resonantes externos y cercanos al bandgap. Tal enfoque parece funcionar de manera correcta y mejor que enfoques clásicos tales como el de Den Hartog, por lo tanto es una propuesta útil para el prediseño del sistema de resonadores en vigas localmente resonantes.

REFERENCIAS

- Cortínez, V. H. y Dominguez, P.N. Una teoría general para la estimación de bandgaps en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov, *Mecánica Computacional* 39, 531-540, 2022.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H. y Piovan, M. T. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. *Thin-Walled Structures* 181 110115, 2022.
- Hu, G., Austin, A.C., Sorokin, V y Tang, L. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 146, 106982, 2021.
- Liu, Z. Y., Zhang, X. X., Mao, Y. W., Zhu, Y. Y., Yang, Z. Y., Chan, C. T. y Sheng, P., Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485), 1734–1736, 2000.
- Rao, S. S., *Vibraciones mecánicas*, 5^{ta} edición, Ed. Pearson Educación, México, ISBN: 978-607-32-0952-6, 2012.
- Rohan, E., Miara, B., Seifrt, F. Numerical simulation of acoustic band gaps in homogenized elastic composites, *International Journal of Engineering Science* 47(4):573-594, 2009.
- Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A., A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Shen, Y. y Lacarbonara, W. Optimal resonator damping for wave propagation control in mechanical metamaterials, *Mechanics Research Communications* 130, 104124, 2023.
- Sun, H., Du, X. y Frank Pai, P. Theory of Metamaterial beams for Broadband Vibration Absorption, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 21, 1086-1101, 2010.