

DINÁMICA DE VIGAS FISURADAS EMPLEANDO LA TEORÍA DE TIMOSHENKO TRUNCADA: ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA.

DYNAMICS OF CRACKED BEAMS EMPLOYING THE TRUNCATED TIMOSHENKO THEORY: PARAMETRIC UNCERTAINTY ANALYSIS

María A. De Rosa^a, María Lippiello^b y Marcelo T. Piovan^c

^a *School of Engineering, University of Basilicata, Viale dell'Ateneo Lucano 10, 85100 Potenza, Italy,
maria.derosa@unibas.it*

^b *Department of Structures for Engineering and Architecture, University of Naples "Federico II",
Via Forno Vecchio 36, 80134 Naples, Italy, maria.lippiello@unina.it.*

^c *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional
FRBB, 11 de abril 416,8000 Bahía Blanca, Argentina, mpiovan@frbb.utn.edu.ar .*

Palabras clave: Incertidumbre paramétrica. Vigas fisuradas. Teoría Timoshenko truncada.

Resumen. En este trabajo se estudia la respuesta incierta vinculada a parámetros de un modelo de viga con fisuras concebida en el marco teórico de flexibilidad por corte. Recientemente los autores desarrollaron un modelo de viga con deformación por corte a través del enfoque de la teoría truncada de Timoshenko. Con la finalidad de calcular la propagación de incertidumbre en la respuesta de la viga, algunos parámetros del modelo se consideran con cierto grado de variabilidad aleatoria, por ejemplo rigidez de los soportes elásticos, profundidad de la fisura, etc. Siguiendo el Enfoque Paramétrico Probabilístico, a tales parámetros inciertos se le asocian variables aleatorias cuyas funciones de densidad de probabilidades se deducen mediante el Principio de Entropía Máxima presuponiendo alguna información estadística. Se adoptan las soluciones analíticas previamente desarrolladas como herramienta de cálculo para simular con el Método Monte Carlo realizaciones y luego evaluar la propagación de incertidumbre respecto de los valores nominales de los parámetros. Se presentan estudios mostrando la propagación de incertidumbre y la sensibilidad de cada parámetro.

Keywords: Parametric uncertainty. Cracked beams. Truncated Timoshenko theory.

Abstract. In this work it is studied the uncertain response linked to some parameters of a cracked beam model conceived within the theoretical framework of shear flexibility. Recently the authors developed a shear strain beam model through the Timoshenko truncated theory approach. In order to calculate the propagation of uncertainty in the response of the beam, some parameters of the model are considered uncertain or with a certain degree of random variability, for example stiffness of the elastic supports, among others. Following the Probabilistic Parametric Approach, such uncertain parameters are associated with random variables whose probability density functions are deduced with the Maximum Entropy Principle assuming some statistical information. The Analytical solutions previously developed are adopted as a calculation tool to simulate, through the Monte Carlo Method, a set of realizations to later evaluate the dispersion with respect to the expected values of the parameters. Studies are presented showing the propagation of uncertainty and the sensitivity of each parameter.

1 INTRODUCCIÓN

La detección de fisuras o grietas en las paredes de un componente estructural, como un puente metálico o montajes de maquinaria, puede ser una señal temprana de alerta sobre su integridad estructural. Estas fisuras pueden ser el resultado de una o más acciones (e.g. acción humana, terremotos u otros eventos naturales) sobre la estructura que incrementan los esfuerzos a los que se someten los materiales. Dan el indicio de situaciones graves que no deben ser ignoradas, ya que eventualmente pueden provocar fallos estructurales y, en ocasiones, incluso colapsos. Las grietas y/o fisuras suelen formarse debido a la mala calidad de los materiales de construcción, diseño irregular, o a la deformación no prevista del terreno donde se apoya la estructura como en el caso de recipientes de almacenaje de gases a la intemperie. Tales situaciones son las potencialmente peligrosas, pudiendo dar lugar a evoluciones de falla sobre las que es necesario actuar rápidamente. Otra clase de fisuras, condicionadas por acciones no estructurales, como los fenómenos normales de dilatación o retracción de los materiales también se deben a la acción de los agentes atmosféricos como la lluvia, la humedad y la nieve. El causante de las grietas no es necesariamente preocupante, aunque sí su presencia. Por ello, la detección de grietas y fisuras en estructuras es de interés crucial para evaluar y ejecutar procedimientos de control para garantizar la integridad estructural. Consecuentemente, los estudios para comprender la respuesta dinámica y la estabilidad de las vigas fisuradas, como elemento básico de análisis, han sido motivo de atención recurrente de la comunidad científica-tecnológica.

En los últimos veinte años, varios investigadores se han enfocado detalladamente en el análisis de vibraciones de componentes esbeltos (barras, vigas, ejes, etc), como una herramienta rápida y eficiente para detección de grietas. En particular la teoría clásica de Bernoulli-Euler ha sido utilizada por no pocos investigadores (Thatoi et al., 2011; Khiem & Hai, 2001; Caddemi & Calio, 2009) para la implementación y construcción de modelos dinámicos con presencia de fisuras. Posteriormente estos modelos fueron considerados inadecuados, por no contemplar las contribuciones de las deformaciones debidas a la deformación por corte y la inercia rotacional, propias de la Teoría Timoshenko. Entre los autores que han empleado este enfoque para la detección de fisuras y la evaluación de la dinámica asociada a ellas, se pueden citar Loya et al. (2006), Khaji et al. (2009), Elishakoff et al. (2013), De Rosa & Lippiello (2021) entre otros. A su vez los autores han propuesto una variante a la teoría a la Teoría Timoshenko empleando un truncamiento en algunos términos de orden superior en las ecuaciones diferenciales y con las cuales han efectuado estudios preliminares sobre vibraciones libres (De Rosa et al., 2022) y sobre vigas fisuradas (De Rosa et al., 2023). A este tipo de modelos se lo ha denominado Teoría Truncada de Timoshenko (De Rosa et al., 2022).

En este artículo se propone evaluar aspectos vinculados a la propagación de incertidumbre y en consecuencia de la sensibilidad de ciertos parámetros que intervienen en la modelación de vigas con fisuras desde la representación de una teoría de Timoshenko truncada. Para ello el modelo desarrollado por De Rosa et al. (2023) es empleado como modelo determinístico y algunos parámetros importantes del mismo son considerados como variables aleatorias cuyas funciones de distribución de probabilidad son deducidas a partir del Principio de Máxima Entropía. Con tales variables aleatorias se construye el modelo probabilístico y se emplea el Método de Monte Carlo para efectuar realizaciones independientes con las cuales cuantificar efectos de la fisura y su ubicación en los patrones dinámicos de vibración.

2 BREVE DESCRIPCIÓN DEL MODELO DETERMINISTICO

En la Figura 1 se muestra una viga con una fisura de profundidad “a” y ubicada a una distancia γ_L del extremo izquierdo. La viga, en ambos extremos, se apoya sobre soportes elásticos que limitan desplazamientos y rotaciones flexionales dependiendo del valor de las constantes de rigidez k_{LR} , k_{LT} , k_{RR} y k_{RT} de los muelles. En particular la viga tiene una longitud L , área seccional A , momento de inercia I , módulo de elasticidad longitudinal E , módulo de cizallamiento G , factor de corte ξ , densidad másica ρ y coeficiente de Poisson ν . Se considera una sección rectangular de altura h .

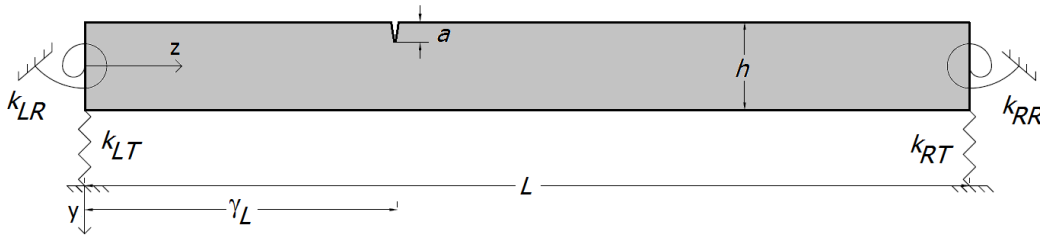


Figura 1: Disposición de la página.

Las ecuaciones del modelo Timoshenko truncado con fisura en $z = \gamma_L$, sin considerar solicitaciones distribuidas, se deducen mediante el principio de Hamilton (De Rosa et al., 2022) quedando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\rho A \frac{\partial^2 v_i(z,t)}{\partial t^2} + GA\chi \left(\frac{\partial^2 v_i(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \phi_i(z,t)}{\partial z} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^3 v_i(z,t)}{\partial t^2 \partial z} + EI \frac{\partial^2 \phi_i(z,t)}{\partial z^2} - GA\chi \left(\frac{\partial v_i(z,t)}{\partial z} + \phi_i(z,t) \right) = 0 \end{cases} \quad /i = \begin{cases} 1, \{v_1(z), \phi_1(z)\} \forall z \in [0, \gamma_L] \\ 2, \{v_2(z), \phi_2(z)\} \forall z \in [\gamma_L, L] \end{cases} \quad (1)$$

Siendo $v_i(z,t)$ y $\phi_i(z,t)$, $i=1,2$, el desplazamiento vertical y la rotación total de la sección transversal definida como $\phi_i(z,t) = \phi_{bi}(z,t) + \psi_i(z,t) = -\frac{\partial v_i(z,t)}{\partial z} + \psi_i(z,t)$, donde $\phi_{bi}(z,t)$ es la rotación por flexión pura (o bien la pendiente de la curva de desplazamiento), mientras que $\psi_i(z,t)$ es la rotación debida al efecto de cizalladura.

Se propone la solución dinámica de la Ec. (1) apelando a la siguiente representación armónica:

$$v_i(z,t) = V_i(z)e^{j\omega t}, \phi_i(z,t) = \Phi_i(z)e^{j\omega t}, \forall i = 1,2 \quad (2)$$

definiendo las siguientes entidades adimensionales:

$$\zeta = \frac{z}{L}, \Omega = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}, e = \frac{E}{G\kappa}, r = \frac{I}{AL^2}, s = er, \gamma = \frac{\gamma_L}{L} \quad (3)$$

Entonces substituyendo la Ec. (2) en la Ec. (1) y teniendo en cuenta las entidades adimensionales definidas en la Ec. (3) se llega a:

$$\Omega er V_i + \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \zeta} \right) = 0, i = 1,2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}_i}{\partial \zeta^2} - \Omega r \frac{\partial V_i}{\partial \zeta} - \frac{1}{er} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \zeta} + \bar{\Phi}_i \right) = 0, i = 1,2 \quad (5)$$

Siendo $\bar{\Phi}_i = \Phi_i L$. Ahora bien, despejando $\frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial \zeta}$ de la Ec. (4), substituyéndola en la Ec. (5) y

luego derivando la expresión remanente se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^4 v_i}{\partial \zeta^4} + \Omega(s+r) \frac{\partial^2 v_i}{\partial \zeta^2} - \Omega v_i = 0, i = 1,2 \quad (6)$$

La solución de estas ecuaciones dinámicas se puede plantear con:

$$v_1(\zeta) = A_1 \cos(b_1 \zeta) + A_2 \sin(b_1 \zeta) + A_3 \cosh(b_2 \zeta) + A_4 \sinh(b_2 \zeta), \quad \forall 0 < \zeta < \gamma \quad (7)$$

$$v_2(\zeta) = A_5 \cos(b_1 \zeta) + A_6 \sin(b_1 \zeta) + A_7 \cosh(b_2 \zeta) + A_8 \sinh(b_2 \zeta), \quad \forall \gamma < \zeta < 1 \quad (8)$$

siendo

$$b_1 = \sqrt{\frac{1}{2p}(q + \sqrt{q^2 + 4pg})}; b_2 = \sqrt{\frac{1}{2p}(-q + \sqrt{q^2 + 4pg})}, \quad \text{con} \begin{cases} p = 1 \\ q = \Omega(s+r) \\ g = \Omega \end{cases} \quad (9)$$

Las condiciones de borde, ya en forma no dimensional, para imponer a la estructura de la Figura 1, son las siguientes:

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1(0)}{\partial \zeta} - K_{LR} \bar{\phi}_1(0) = 0 \quad (10)$$

$$\left(\bar{\phi}_1(0) + \frac{\partial V_1(0)}{\partial \zeta} \right) - s K_{LT} V_1(0) = 0 \quad (11)$$

$$V_2(\gamma) = V_1(\gamma) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_1(\gamma)}{\partial \zeta} = \frac{\partial \bar{\phi}_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (13)$$

$$\bar{\phi}_2(\gamma) - \bar{\phi}_1(\gamma) = -\theta \frac{\partial \bar{\phi}_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (14)$$

$$\bar{\phi}_1(\gamma) + \frac{\partial V_1(\gamma)}{\partial \zeta} = \bar{\phi}_2(\gamma) + \frac{\partial V_2(\gamma)}{\partial \zeta} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_2(1)}{\partial \zeta} + K_{RR} \bar{\phi}_2(1) = 0 \quad (16)$$

$$\left(\bar{\phi}_2(1) + \frac{\partial V_2(1)}{\partial \zeta} \right) + s K_{RT} V_2(1) = 0 \quad (17)$$

En estas condiciones de borde se han incorporado las constantes de resorte en su forma adimensional, mismas que vienen definidas como sigue:

$$K_{LR} = \frac{k_{LR}L}{EI}, K_{RR} = \frac{k_{RR}L}{EI}, K_{LT} = \frac{k_{LT}L^3}{EI}, K_{RT} = \frac{k_{RT}L^3}{EI} \quad (18)$$

En las Ec. (10) a (17) se necesita el valor de $\bar{\phi}_i(\zeta)$ que puede obtenerse recordando la sustitución efectuada más arriba entre las Ecs. (4) y (5), de manera que operando un poco se llega a:

$$\bar{\phi}_i(\zeta) = -s \frac{\partial^3 v_i}{\partial \zeta^3} - (1 + s\Omega r + \Omega s^2) \frac{\partial v_i}{\partial \zeta}, i = 1,2 \quad (19)$$

Además θ es la flexibilidad (en forma no dimensional) de la sección donde se ubica la

fisura. La misma se halla en función de parámetros geométricos y materiales (Khaji et al., 2009). A su vez se debe tener presente que los coeficientes de flexibilidad se suelen modelar con alguna forma reductiva empleando resortes de rotación y/o de translación (ver Loya et al., 2006 o De Rosa y Lippiello, 2021). En los casos en que se involucre en la viga una sola fisura de borde abierto (o tipo “breathing” en el argot internacional), la flexibilidad de la misma se asocia con un resorte de rotación flexional únicamente, en tanto que se suelen despreciar los efectos extensionales puesto que es ínfima en comparación con su contraparte rotacional.

Considerando la fisura puesta en la estructura de la Figura 1, la flexibilidad se puede definir (en forma no dimensional) como sigue:

$$\theta = 6\pi\xi^2 f_j(\xi)(h/L) \quad (20)$$

siendo

$$f_j(\xi) = 0.6384 - 1.035\xi + 3.72\xi^2 - 5.1773\xi^3 + 7.553\xi^4 - 7.332\xi^5 + 2.4909\xi^6, \quad \xi = \frac{a}{h} \quad (21)$$

la función de flexibilidad para una fisura de borde abierto desde la superficie libre y expuesta a un momento de flexión.

Ahora bien, si se sustituyen las Ecs.: (7)-(8) y (19) en las Ecs. (10)-(17) y operando apropiadamente se obtendrá un sistema de 8 ecuaciones en las incógnitas A_i , $i=1,\dots,8$, igualado a cero, es decir:

$$[\Xi(\Omega)]\{A_i\} = \{0\}, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (22)$$

Cuya solución no trivial, dada por la siguiente expresión:

$$\text{Det}[\Xi(\Omega)] = 0 \quad (23)$$

permite calcular los coeficientes de frecuencia no dimensionales Ω definidos según la Ec. (3) y luego los valores dimensionales de la frecuencia, según sea de conveniencia o utilidad.

Para hallar los coeficientes Ω se puede utilizar cualquier rutina de búsqueda de raíces de la Ec. (23) que tenga los softwares comerciales o bien programarla ad-hoc. Las primeras dos autoras han hecho uso extensivo de las ventajas que aporta el software *Mathematica* tanto para manipulación simbólica como aplicativos numéricos, mismos que se emplearán junto con rutinas específicas para contemplar las realizaciones del subsiguiente modelo probabilístico.

3 DESARROLLO DEL MODELO PROBABILISITICO

El modelo probabilístico para evaluar la propagación de incertidumbre asociada al problema de la viga fisurada, se construye partiendo del modelo determinístico formulado en el apartado anterior, pero incorporando variables aleatorias vinculadas a los parámetros cuya incertidumbre se pretende cuantificar. Estas variables aleatorias se representan por funciones de densidad de probabilidades deducidas mediante el Principio de Entropía Máxima (Jaynes, 1957). Si bien el modelo contiene varios parámetros que pueden acarrear incertidumbre, en este artículo se pretende evaluar como parámetros inciertos a (1) la profundidad adimensional de fisura (a/h), (2) la distancia de la fisura al extremo izquierdo ($\gamma=\gamma_L/L$) y (3) algunos de los soportes elásticos adimensionales (K_{LR} , K_{LT} , K_{RR} y K_{RT}), para simular irregularidad en el tipo de montaje. Los parámetros mencionados como aleatorios se consideran independientes y no correlacionados, además se consideran acotados con límites conocidos. Bajo estas hipótesis el empleo del Principio de Entropía Máxima permite deducir como funciones de distribución de probabilidad de cada variable aleatoria W_i , a una con la siguiente forma:

$$p_i(w_i) = S_{[L_{w_i}, U_{w_i}]}(w_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\bar{W}_i\delta_{w_i}}, i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Donde $S_{[L_{w_i}, U_{w_i}]}(w_i)$ es la función soporte, L_{w_i} y U_{w_i} son los límites inferior y superior de la variable aleatoria, \bar{W}_i es la expectativa o valor medio de la variable aleatoria y δ_{w_i} es el coeficiente de variación, definido como la razón entre el desvío estándar y la media de la variable aleatoria. Así pues, se puede observar que la Ec. (24) representa distribuciones uniformes.

Se emplea el método Monte Carlo de simulación estocástica, para un conjunto de realizaciones de las variables aleatorias mencionadas. Esto implica efectuar para cada realización aleatoria independiente, el cálculo de la Ec. (23) para la cantidad de coeficientes de frecuencia Ω deseados, dando así una distribución probabilística de salida en los coeficientes de frecuencia. La convergencia de la simulación Monte Carlo se evalúa en términos de la media cuadrática de los coeficientes de frecuencia aleatorios $\hat{\Omega}_{ji}$ respecto del valor correspondiente al valor nominal $\bar{\Omega}_j$ (o del modelo determinístico), es decir:

$$Conv(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{i=1}^{N_{MS}} \|\bar{\Omega}_j - \hat{\Omega}_{ji}\|^2}, j = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Una de las formas para cuantificar la incertidumbre de la respuesta se puede asociar al valor de los coeficientes de variación de las variables aleatorias de entrada (por ejemplo posición y profundidad de fisura entre otras) y cotejar en los coeficientes de variación (δ_{Ω}) para coeficientes de frecuencia en distintos contextos y/o condiciones de vinculación.

4 ALGUNOS ESTUDIOS

En este apartado se presentará algunos estudios de cuantificación y propagación de incertidumbre en la respuesta del modelo probabilístico. En particular se empleará una viga con las siguientes dimensiones $h = 0.025$ m., $b = h/2$, $h/L = 1/3$, con las propiedades materiales $E = 210$ GPa, $\rho = 7860$ kg/m³, $\nu = 0.3$.

Dado que en el modelo se han incorporado apoyos elásticos en los extremos, los mismos pueden fungir como indicativos de la restricción que se pretenda imponer como condición de borde aplicando valores muy altos a los mismos. Así pues, como ensayo previo de control, se ha determinado los valores de los parámetros de soportes elásticos (tanto a translación como a rotación) para llegar a converger a los primeros 5 coeficientes de frecuencias de una viga Timoshenko sin fisura, con un error menor al 0.1%, para las tres condiciones de borde más convencionales (i.e. empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-empotrada). De tales ensayos surgió emplear $K_{ij} > 10^{10}$.

Como primer estudio de observación se contemplará el caso de una viga cantiléver con soporte elástico rotacional en el extremo libre. Se pretende evaluar la propagación de incertidumbre vinculada a la variable aleatoria de la profundidad de fisura, manteniendo en un valor constante el parámetro de posición de la fisura y el parámetro correspondiente a la constante de resorte rotacional en el extremo libre. El parámetro de posición de la fisura se ha tomado con un valor fijo de $\gamma = 0.5$, y el parámetro de profundidad con media $a/h = 0.3$ con un coeficiente de variación de entrada $\delta_{a/h} = 0.1$, mientras que el parámetro del resorte rotacional se mantiene constante en cada proceso de simulación Monte Carlo con la variable aleatoria a/h . En la Figura 2 se muestra el valor medio y las bandas mínima y máxima de las

realizaciones, que se grafican en función del valor del parámetro K_{RR} en representación logarítmica. Se puede apreciar que en todo el dominio el primer coeficiente de frecuencia, como se ve en la Figura 2(a), asociado al primer modo flexional, hay poca dispersión para cada uno de los valores de K_{RR} evaluados en las simulaciones; en efecto el coeficiente de variación de la salida es muy pequeño: $\text{Max}|\delta_{\Omega_1}| < 0.005$. Con lo cual para esta condición no habría repercusión vinculada a la variabilidad de la profundidad de fisura en el primer modo. Por otro lado, según se ve en las Figuras 2(b) y 2(c) correspondientes a las simulaciones de los coeficientes de frecuencia Ω_2 y Ω_3 hay una variabilidad en la respuesta que asociada K_{RR} , aunque con baja cuantía. Esto es que para $K_{RR}=1$, $\delta_{\Omega_2}=0.044$ y $\delta_{\Omega_3}=0.005$, mientras que para $K_{RR}=100000$, $\delta_{\Omega_2}=0.024$ y $\delta_{\Omega_3}=0.015$. Téngase presente que estas simulaciones se han hecho con una convergencia garantizada por encima de las 800 realizaciones.

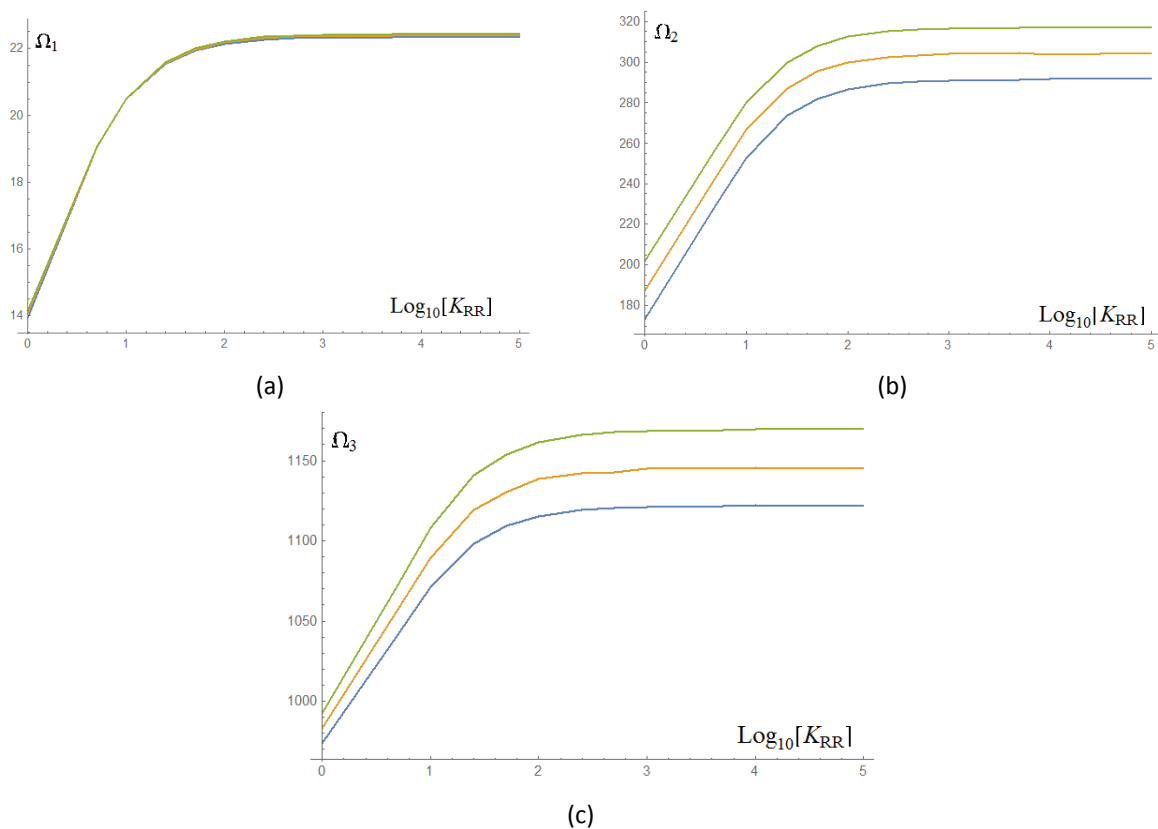


Figura 2: Variación de los coeficientes de frecuencia Ω de una viga cantiléver con muelle a rotación en el extremo libre. Fisura aleatoria en la mitad de la estructura. (a) primer (b) segundo (c) tercer modos

Como segundo ejemplo se analiza una viga con las mismas características del ejemplo anterior (es decir con la geometría, propiedades, misma variable aleatoria de profundidad de fisura y misma ubicación de la fisura), pero solamente con un soporte elástico a translación en el extremo libre. En las Figuras 3(a), 3(b) y 3(c) se muestra el valor medio, rango mínimo y máximo para las simulaciones de los primeros tres coeficientes de frecuencia, respectivamente. Como en el caso anterior se observa que dependiendo del modo y el valor del parámetro de resorte K_{RT} la influencia de incertidumbre en el parámetro de fisura sobre la incertidumbre de la respuesta puede tener incidencia como se aprecia en las Figuras 3(a) y 3(c) para $K_{RT} > 100$, mientras que no tendría casi ninguna influencia como se ve en la Figura 3(b) para $K_{RT} > 100$.

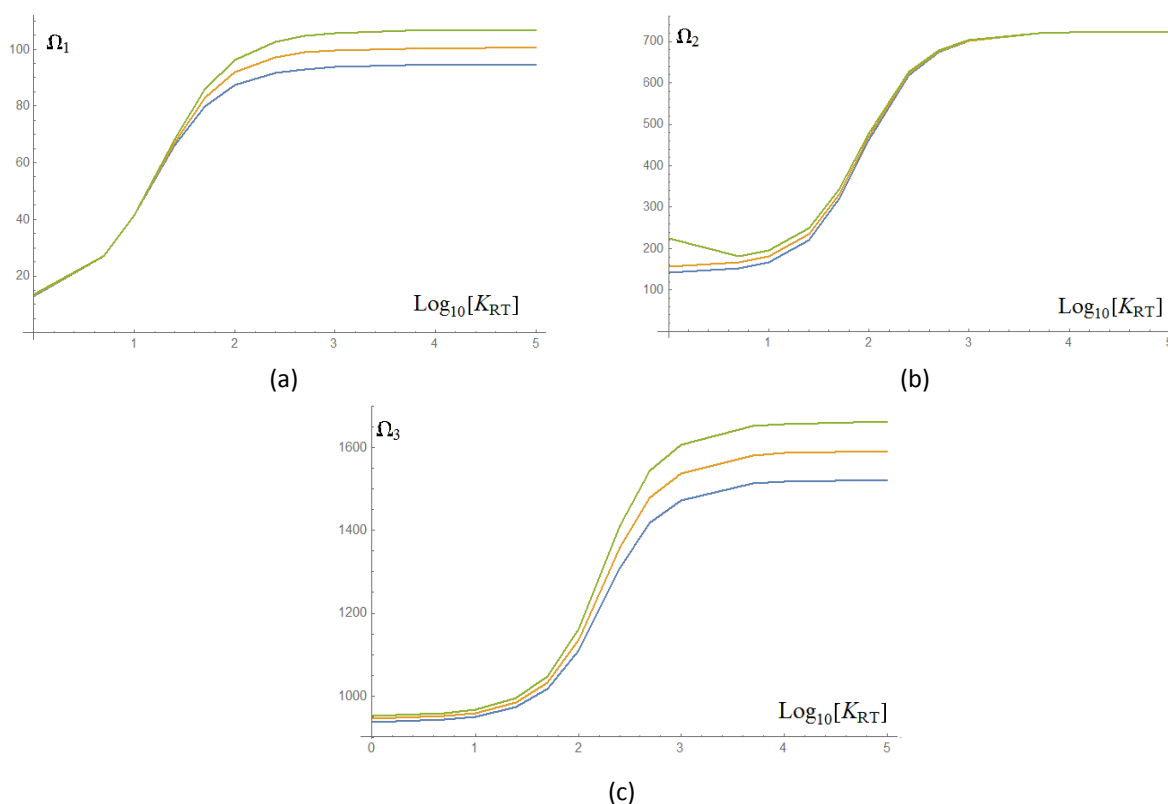


Figura 3: Variación de los coeficientes de frecuencia Ω de una viga cantiléver con muelle a traslación en el extremo libre. Fisura aleatoria en la mitad de la estructura. (a) primer (b) segundo (c) tercer modos.

En el siguiente ejemplo se analizará el efecto de la posición y profundidad de la fisura ante una incertidumbre de la profundidad del orden de $\delta_{a/h}=0.1$, para algunos niveles de profundidad de fisura. Se evalúa una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, sin la presencia de muelles elásticos en el extremo libre. La viga tiene las mismas características geométricas y materiales de los ejemplos anteriores. Así pues en la Figura 4 se muestra los valores que toman los coeficientes de variación de las salidas δ_{Ω} para el primer coeficiente de frecuencia a lo largo de distintas ubicaciones de la falla y para 3 niveles de profundidad de falla. Claramente en la medida que aumenta la profundidad de fisura es más notorio el incremento de incertidumbre del cálculo del primer coeficiente de frecuencia.

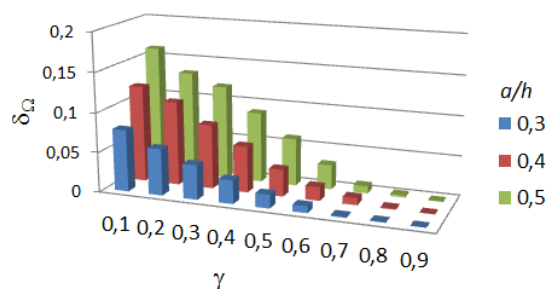


Figura 4: Coeficiente de Variación δ_{Ω} para el primer coeficiente de frecuencia Ω_1 de una viga cantiléver, para diferentes ubicaciones de la fisura con profundidad aleatoria $\delta_{a/h}=0.1$ y diversos grados de falla.

Un comportamiento similar al del anterior ejemplo se puede observar en la Figura 5 que corresponde a una viga simplemente apoyada en ambos extremos, de similares características geométricas y materiales de los anteriores ejemplos, aunque en este caso se muestra la influencia del coeficiente de variación $\delta_{a/h}$ con una profundidad de fisura con media $a/h=0.3$.

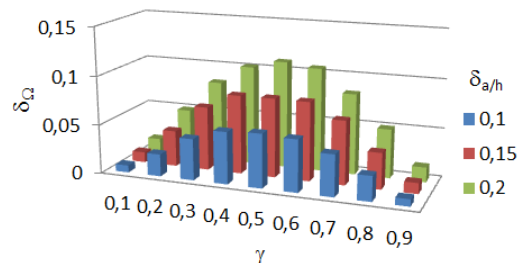


Figura 5: Coeficiente de Variación δ_{Ω} para el primer coeficiente de frecuencia Ω_1 de una simplemente apoyada, para diferentes ubicaciones de la fisura con falla $a/h=0.3$ y diversa coeficientes de variación $\delta_{a/h}$.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un estudio de cuantificación y propagación de incertidumbre en la respuesta de vibraciones naturales de vigas gruesas empleado la teoría de Timoshenko truncada. La misma permite agilizar el procedimiento de cálculo empleando una solución analítica eficiente al problema de autovalores dinámicos.

Se ha empleado el método Monte Carlo para efectuar la simulación con el modelo probabilístico, en el cual solo se consideraron unos pocos parámetros de posición y tamaño de la fisura como aleatorios como también las constantes de los soportes elásticos tanto a rotación como a traslación en ambos extremos. Se ha podido observar que la incertidumbre en la determinación del valor de los coeficientes de frecuencia es caso dependiente del modo de vibración y de la influencia de los apoyos elásticos. A su vez se ha podido observar que en ciertos rangos paramétricos prácticamente no hay incidencia de la incertidumbre de entrada de las variables aleatorias del modelo probabilístico sobre el incremento de incertidumbre de la respuesta.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de las siguientes instituciones italianas: Universidad de la Basilicata y Universidad Federico II de Nápoles; y de las siguientes instituciones argentinas: Universidad Tecnológica Nacional (proyecto PID 8454TC) y CONICET.

REFERENCIAS

- Caddemi S, Calio I. Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks. *Journal of Sound and Vibration* 327 (3), 473-489, 2009.
- De Rosa M., Lippiello M. Closed-form solutions for vibrations analysis of cracked Timoshenko beams on elastic medium: An analytical approach. *Eng. Struc.* 236, 111946, 2021.
- De Rosa M., Lippiello M., Elishakoff, I. Variational Derivation of Truncated Timoshenko-Ehrenfest Beam Theory. *Journal Appl. Comput. Mech.* 8(3), 996-1004, 2022.

- De Rosa, M.A., Lippiello, A. Onorato, M., Elishakoff, I. A new theory for Timoshenko SWCNT analysis. To appear *Applied Mechanics*.
- De Rosa, M.A., Lippiello, C. Ceraldi, H. Martín, A. Onorato, M. Piovan. Analisis vibratorio de vigas fisuradas: Teoría de Timoshenko Truncada. *Actas del VIII Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica*, Santa Fe, Argentina, 2023.
- Elishakoff I, Hache F, Challamel N. Critical contrasting of three versions of vibrating Bresse-Timoshenko beam with a crack. *Intl. Jou. Solids and Structures* 109, 143-151, 2017.
- Jaynes E. Information theory and statistical mechanics I and II. *The Physical Review* 106:1620-1630, 1957.
- Khaji N, Shafiei M, Jalalpour M. Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Intl. Jou. Mech. Sci.* 51, 667-681, 2009.
- Khiem N., Hai T. A closed-form solution for free vibration of beams with arbitrary number of cracks. In *Proc. of the Scientific Conference dedicated to 35th Anniversary of Vietnam Academy of Science and Technology*, Vol. 1, Hanoi, Vietnam pp 30-42, 2010.
- Khiem N., Hung D. A closed-form solution for free vibration of multiple cracked Timoshenko beam and application. *Vietnam Journal of Mechanics*, 39(4), 315-328, 2017.
- Khiem N., Lien T. A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of Sound and Vibration* 245 (4), 737-751, 2001.
- Li Q. Vibratory characteristics of Timoshenko beams with arbitrary number of cracks. *Journal of Engineering Mechanics* 129(11), 1355-1359, 2003.
- Loya J., Rubio L, Fernandez-Saez J. Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration* 290(3), 640-653, 2006.
- Thatoi D., Jena P., Acharya A., Mohapatra S., Nanda J. Analysis of the dynamic response of a cracked cantilever beam. *AICTE Sponsored National Conference on Emerging Trend & its Application in Engineering (NCETAE)*, 2011.
- Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophy Magazine* 1921;41(245):744-746, 1924.