

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS CON SIMETRÍA AXIAL: IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN PARA ELASTICIDAD LINEAL

Yomar A. González<sup>a</sup>, Adrián P. Cisilino<sup>b</sup>, Miguel E. Cerrolaza<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Instituto Nacional de Bioingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela,  
gonzalyo@gmail.com, <http://www.ucv.ve/cebio.htm>

<sup>b</sup> División de Soldadura y Fractomecánica, Instituto Tecnológico de Materiales - INTEMA,  
Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, Argentina, [cisilino@fi.mdp.edu.ar](mailto:cisilino@fi.mdp.edu.ar),  
<http://intema.fi.mdp.edu.ar/>

**Palabras claves:** Elementos de Contorno, simetría axial, elasticidad lineal, regeneración ósea.

**Resumen.** El Método de los Elementos de Contorno ha demostrado ser una de las técnicas más poderosas en la solución de problemas de elastostática. El principal requerimiento para la implementación del método es contar con algoritmos eficientes para la integración de las soluciones fundamentales. En general, estos algoritmos se encuentran disponibles para la implementación de problemas planos o tridimensionales. Sin embargo para los problemas con simetría axial, la formulación 3D para elastostática sufre una transformación de coordenadas y un proceso de integración adicional para generar las soluciones axisimétricas requeridas, las cuales suelen expresarse en términos de las integrales elípticas completas de primer y segundo orden. El comportamiento asintótico de éstas últimas es determinante para establecer el procedimiento de integración más adecuado en los casos singulares.

Este trabajo presenta la implementación de las soluciones axisimétricas para el estudio de problemas en el campo elástico-lineal. Las expresiones analíticas de las soluciones y el desarrollo asintótico de las mismas fueron extraídas de la literatura (Balas, Sládek y Sládek, 1989). La implementación de las mismas, basados en un código de Elementos de Contorno multi zona (Beer, 2001), sigue la metodología general propuesta por Graciani et al. (2005).

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación que amerita el desarrollo de herramientas, basadas en el Método de Elementos de Contorno, para el estudio de problemas biológicos. La nueva herramienta es aplicada a diferentes ejemplos con solución analítica conocida, cotejando los resultados y comprobando la precisión y eficacia del código.

## 1 INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta el primer paso para la implementación de un modelo mecanobiológico computacional propuesto por J.M. García-Aznar et al. (2002) basándonos ahora en un método de frontera capaz de simular y caracterizar los patrones de osificación ósea durante el proceso de curación de fracturas en huesos largos, así como también las propiedades mecánicas de los tejidos vivos involucrados. El primer paso consiste en la incorporación de la formulación axisimétrica para el estudio de problemas en el campo elástico-lineal presentada por Balas, Sládek y Sládek, (1989), siguiendo la metodología propuesta por Graciani et al., *J. Comp. Estruc.*, 83: 836-855 (2005) en un código multi zona basado en el Método de los Elementos de Contorno desarrollado por G. Beer, (2001).

En una primera etapa de la investigación, se pretende estudiar el proceso de regeneración ósea en base a un modelo simplificado de una fractura a nivel medio de la diáfisis tibial (Maria J. Gómez-Benito et al., *Journal of Theoretical Biology*, 235: 105-119 (2005)), cuya geometría y condiciones de contorno presentan simetría axial. Aprovechando esta ventaja, se hace necesario contar con un algoritmo capaz de establecer el campo tensión-deformación partiendo de la teoría de elasticidad axisimétrica en el rango lineal. De esta manera, y según la hipótesis general del modelo mecanobiológico, se podrá calcular la función principal de estímulo mecánico (segundo invariante del tensor desviador de deformaciones “J”) que desencadenará una secuencia de fenómenos biológicos propios del proceso de regeneración ósea. La caracterización de estos fenómenos y de los procesos inherentes, así como su tratamiento matemático será objeto de futuras adaptaciones del código de Elementos de Contorno, según la(s) teoría(s) requerida(s) para tales efectos. La nueva herramienta es aplicada a diferentes ejemplos con solución analítica conocida, cotejando los resultados y comprobando la precisión y eficacia del código.

## 2 FORMULACIÓN AXISIMÉTRICA EN ELEMENTOS DE CONTORNO

En esta sección, se presenta en forma general la ecuación integral de contorno axisimétrica para los desplazamientos correspondiente a un punto de colocación ubicado en el contorno  $\Gamma$  de la geometría.

Asumamos que el cuerpo B en dos dimensiones (figura 1.a) rota  $360^\circ$  con respecto al eje z. Esto permite formar una geometría axisimétrica bajo una carga también axisimétrica, donde  $r$  y  $\Phi$  son las direcciones radial y angular respectivamente. Se puede afirmar que tanto los desplazamientos como las tensiones calculadas son constantes para cualquier valor de  $\Phi$ , por lo que esta clase de problemas pueden ser analizados eficientemente, con tan solo considerar al cuerpo B en vez de todo el dominio del problema en tres dimensiones. Como resultado de esta simetría axial, las direcciones  $r$  y  $z$  son suficientes para definir el problema. (De Lacerda et al., 2000)

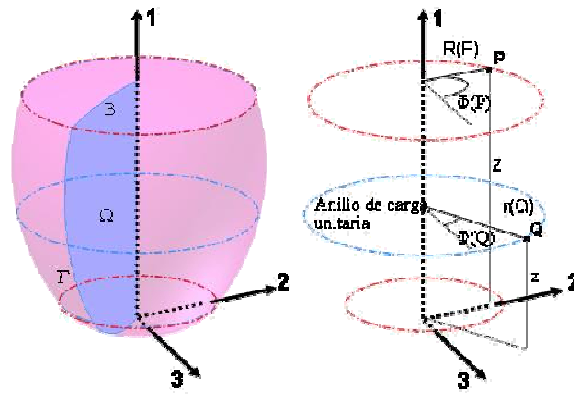


Figura 1: (a) Definición del contorno  $\Gamma$  y de la región  $B$  en un problema tridimensional, (b) Definición del sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ . (Balas, Sládek y Sládek, 1989)

La formulación para la elasticidad lineal axisimétrica ha sido estudiada y desarrollada, entre otros, por Kemandis (1975), Cruse et al. (1977), y Rizzo y Hippy (1979). Actualmente investigadores como Abdul-Mihsein (1986) y De Lacerda et al. (2000) han trabajado en la aplicación de ésta formulación en problemas de contacto, obteniendo excelentes resultados. (Graciani et al., 2005)

Se puede encontrar en la literatura (Brebbia et al., 1984; Brebbia et al., 2003; Banerjee, 1994 y Graciani et al., 2005) un análisis detallado acerca de la derivación de la ecuación integral de somigliana tomando en cuenta la simetría axial. Consecuentemente, tan solo se hará mención en el texto a las consideraciones más relevantes en el desarrollo matemático, antes de presentar las soluciones fundamentales y su respectivo análisis en casos de integración singular.

La deducción de la ecuación integral de los desplazamientos para un punto de colocación en el contorno axisimétrico  $\Gamma$ , comienza describiendo la expresión tridimensional del *kernel* de desplazamientos (1), deducida considerando un problema genérico como el mostrado en la figura 2.a, en términos del nuevo sistema en coordenadas cilíndricas (2). La nueva ecuación ahora puede ser integrada a lo largo de una trayectoria circular (anillo de carga unitaria) con respecto al eje de simetría considerado (4) (Balas, Sládek y Sládek, 1989; Brebbia et al., 2003). De manera análoga se procede con la ecuación que describe el campo de tracciones.

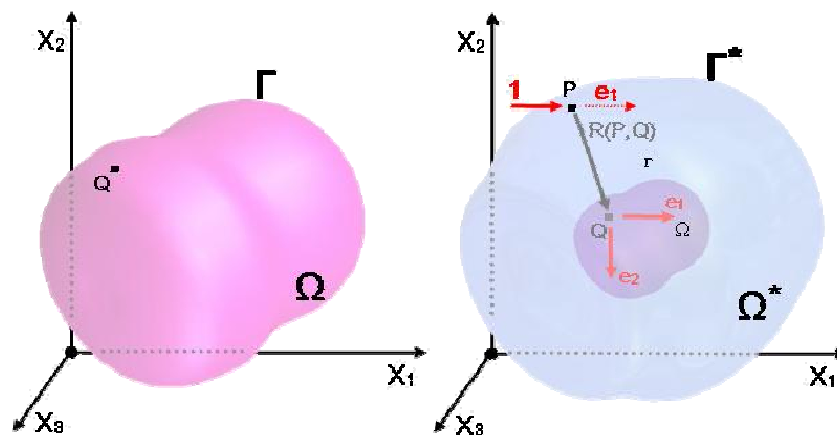


Figura 2: Representación clásica del dominio para la deducción de la ecuación integral de contorno: (a) representación 3D de un cuerpo  $(\Omega + \Gamma)$ , (b) región genérica  $(\Omega^* + \Gamma^*)$  donde la carga unitaria es aplicada, con las mismas propiedades elásticas que  $(\Omega + \Gamma)$ . También se evidencia la relación existente entre el punto fuente "P" y el punto de integración "Q". (Brebbia et al., 1984)

$$U_{kl}^*(P, Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{kl} + r_{,k}r_{,l}], \text{ siendo } r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{r_k}{r} \text{ y } r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} = \frac{r_l}{r} \quad (1)$$

$$\widehat{U}^*(P, Q) = T^T(P)Y(P)U^*(P, Q)T(Q) \quad (2)$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Y = \begin{pmatrix} 1/(\cos\varphi - \sin\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\cos\varphi + \sin\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

T es la matriz que provee la transformación de coordenadas e Y relaciona las direcciones de las cargas unitarias en el punto P, con las correspondientes direcciones en el nuevo sistema de coordenadas. El nuevo campo de desplazamientos viene dado entonces por

$$U_{ij}^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{U}_{ij}^*(P, Q) d\varphi(P), \quad i, j = r, \varphi, z \quad (4)$$

Por lo tanto, la ecuación integral de contorno axisimétrica que describe el problema general es de la forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} C_{rr}(P) & C_{rz}(P) \\ C_{zr}(P) & C_{zz}(P) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_r(P) \\ u_z(P) \end{bmatrix} = 2\pi \int_r \begin{bmatrix} U_{rr}^*(P, Q) & U_{rz}^*(P, Q) \\ U_{zr}^*(P, Q) & U_{zz}^*(P, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(Q) \\ t_z(Q) \end{bmatrix} \cdot r(Q) d\Gamma - \dots \\ & \dots - 2\pi \int_r \begin{bmatrix} T_{rr}^*(P, Q) & T_{rz}^*(P, Q) \\ T_{zr}^*(P, Q) & T_{zz}^*(P, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(Q) \\ u_z(Q) \end{bmatrix} \cdot r(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

Donde P es el punto del anillo donde la carga unitaria es aplicada, Q es el punto de integración,  $C_{\alpha\beta}(P)$  son constantes las cuales dependen de la geometría en P,  $r(Q)$  es la distancia radial desde el eje de simetría hasta el punto de integración,  $u_r$  y  $u_z$  son los desplazamientos radiales y axiales respectivamente,  $t_r$  y  $t_z$ , son las tracciones radiales y axiales respectivamente, y  $U_{\alpha\beta}^*(P, Q)$  y  $T_{\alpha\beta}^*(P, Q)$  son los kernels axisimétricos para los desplazamientos y tracciones respectivamente. (De Lacerda et al., 2000)

Haciendo uso de integrales particulares (Balas, Sládek y Sládek, 1989) y tomando en cuenta el término  $2\pi r(Q)$  e introduciendo notaciones especiales (6), se pueden escribir las expresiones explícitas (7-10) para los desplazamientos en términos de r,  $\varphi$  y z (coordenadas cilíndricas) considerando el caso general donde  $R > 0$ . (Balas, Sládek y Sládek, 1989)

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{s^2}{2Rr}, \quad s^2 = (r-R)^2 + (z-Z)^2, \quad b = r-R, \quad c = z-Z \\ a &= 4Rr + s^2, \quad d = 2Rr + s^2, \quad k = \left( 2 \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{a}} \right)^2 \quad (*) \\ r &= r(Q), \quad R = R(P), \quad z = z(Q), \quad Z = Z(P) \end{aligned} \quad (6)$$

En las expresiones (6), R y r representan al radio del punto de colocación e integración respectivamente, k es el argumento para la integral elíptica de primer orden "K" y de segundo orden "E", Z y z, son las coordenadas axiales de los puntos de colocación e integración

respectivamente.

(\*) Esta expresión difiere de la presentada por Balas, Sládek y Sládek (1989). Al comparar esta última con la contraparte presentada por Brebbia et al. (1984), se hace necesario que el argumento  $k$  quede elevado a una potencia cuadrada.

$$U_{rr}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ (3-4\nu) \left( r + \frac{s^2}{2R} \right) + \frac{c^2}{2R} \right] K(k) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left[ (3-4\nu) \left( 2r + \frac{s^2}{2R} \right) + r \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \frac{c^2}{2R} \right] E(k) \right\} \quad (7)$$

$$U_{rz}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ -\frac{c}{2} \frac{r}{R} \right] K(k) + \left[ r \frac{cb}{s^2} + \frac{c}{2} \frac{r}{R} \right] E(k) \right\} \quad (**) \quad (8)$$

$$U_{zr}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \frac{c}{2} \right] K(k) + \left[ r \frac{cb}{s^2} - \frac{c}{2} \right] E(k) \right\} \quad (***) \quad (9)$$

$$U_{zz}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi G(1-\nu)\sqrt{a}} r \left\{ [3-4\nu] K(k) + \left( \frac{c}{s} \right)^2 E(k) \right\} \quad (10)$$

(\*\*) La notación empleada aquí es la transpuesta a la presentada por Balas, Sládek y Sládek (1989). Al comparar éstas últimas con la contraparte propuesta por Brebbia et al. (1984).

Las ecuaciones arriba descritas están deducidas a partir de su expresión general en términos de las funciones de *Legendre* de orden cero y de sus derivadas, las cuales, a su vez, suelen ser escritas en función de las integrales elípticas completas de primer y segundo orden  $K(k)$  y  $E(k)$ . (Balas, Sládek y Sládek, 1989; Brebbia et al., 1984)

Sustituyendo las expresiones (7-10) en las ecuaciones de las tensiones expresadas en coordenadas cilíndricas y tomando en cuenta el vector normal unitario en el punto de integración  $Q$ , se obtienen las tracciones (11-14) sobre el contorno  $\Gamma$ . (Balas, Sládek y Sládek, 1989)

$$T_{rr}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \left( \frac{s^4}{4aRr} + \frac{bs^2}{a} \left( \frac{1}{2r} - \frac{1}{R} \right) + b^2 \left( \frac{3}{2Rr} + \frac{r}{Ra} - \frac{2}{a} \right) + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \dots + \frac{(16\nu-17)}{4Rr} s^2 + b \left( \frac{3}{2R} + \frac{2r}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) + (2\nu-1) \left( 4 - \frac{r}{R} \right) \right] n_r + \dots \\ \left. \dots + \frac{c}{R} \left[ \frac{b^2-c^2}{2a} + \frac{2Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 + \frac{5}{2} - 2\nu \right] n_z \right\} K(k) + \left\{ \left[ \left( \frac{5-8\nu}{2Rr} + \frac{2R}{ar} \right) s^2 + \dots \right. \right. \\ \left. \dots + 3 \frac{c^2-b^2}{2Rr} + 2 \frac{b}{R} \left( \nu - 6 \frac{R^2}{a} \right) + 10 - 14\nu + \left( \frac{b}{s} \right)^2 \left( \frac{24Rr}{a} - \frac{r}{R} - 6 \right) - \dots \right. \right. \\ \left. \left. \right\} E(k) \quad (11)$$

$$\dots - \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \left[ n_r - \left[ c \left( \frac{4R}{a} + 2 \frac{(1-v)}{R} \right) + \frac{bc}{s} \left( 3 + \frac{r}{R} - 16 \frac{Rr}{a} \right) + \dots \right. \right. \tag{11}$$

$$\left. \left. \dots + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2v + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \right) E(k) \left. \right\}$$

$$T_{rz}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \frac{c}{R} \left[ \frac{b^2 - c^2}{2a} + \frac{2Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 + \frac{5}{2} - 2v \right] n_r + \dots \right. \right. \tag{12}$$

$$\left. \dots + \frac{r}{R} \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2Rb + s^2}{a} + 2v - 1 \right] n_z \right) K(k) + \left( - \left[ c \left( \frac{4R}{a} + 2 \frac{(1-v)}{R} \right) + \dots \right. \right. \tag{12}$$

$$\left. \dots + \frac{bc}{s} \left( 3 + \frac{r}{R} - 16 \frac{Rr}{a} \right) + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2v + \frac{8Rr}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] n_r + \dots$$

$$\left. \dots + r \left[ \frac{1-2v}{R} + \left( \frac{c}{s} \right)^2 \left( \frac{8R}{a} - \frac{1}{R} \right) + \frac{2}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v - \frac{8Rr}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \right) E(k) \left. \right\}$$

$$T_{rz}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \frac{c}{r} \left[ \frac{1}{2a} + \left( 2r \frac{b}{s} - s \right)^2 - \frac{3}{2} \right] n_r + \dots \right. \right. \tag{13}$$

$$\left. + \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2Rb - s^2}{a} + 2v - 1 \right] n_z \right) K(k) + \left( \left[ \frac{c}{r} \left( 3 - 2 \frac{d}{a} \right) - \dots \right. \right. \tag{13}$$

$$\left. \dots - 2 \frac{bc}{s} \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) + \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left( 1 - 2v - 4 \frac{d}{a} \left( \frac{b}{s} \right)^2 \right) \right] n_r - \dots$$

$$\left. \dots - \left[ 2v - 1 + \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v + 4 \frac{d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_z \right) E(k) \left. \right\}$$

$$T_{zz}^*(r, z, R, Z) = \frac{1}{4\pi(1-v)\sqrt{a}} \left\{ \left[ \left( \frac{c}{s} \right)^2 \frac{2Rb - s^2}{a} + 2v - 1 \right] n_r + \dots \right. \tag{14}$$

$$\left. \dots + \frac{2rc}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 n_z \right) K(k) + \left( - \left[ 2v - 1 + \left( 3 - 4 \frac{d}{a} \right) \left( \frac{c}{s} \right)^2 + \right. \right. \tag{14}$$

$$\left. \left. + \frac{2r}{s} \frac{b}{s} \left( 1 - 2v + 4 \frac{d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 \right) \right] n_r - \frac{2r}{s} \frac{c}{s} \left[ 4 \frac{d}{a} \left( \frac{c}{s} \right)^2 + 1 - 2v \right] n_z \right) E(k) \left. \right\}$$

En las ecuaciones (7-14),  $G$  y  $\nu$  representan a los módulos de corte y Young respectivamente y,  $n_r$  y  $n_z$ , son las componentes radial y axial del vector normal unitario definido en el punto de integración Q.

De esta forma  $U_{\alpha\beta}^*(P, Q)$  y  $T_{\alpha\beta}^*(P, Q)$  corresponden, respectivamente, a las componentes axial y radial de los desplazamientos y del vector tensión asociado a un plano cuya normal es

$n$ , provocados en un punto Q, cuando se aplican unos anillos de cargas unitarias, según la dirección axial y radial, en el punto P. (Graciani, 2006)

Cuando la coordenada radial del punto de colocación es cero ( $R = 0$ ), las expresiones para los desplazamientos y las tracciones se reducen a las ecuaciones (15) y (16) respectivamente. (Balas, Sládek y Sládek, 1989)

$$\begin{aligned} U_{rr}^*(r, z, 0, Z) &= 0 \\ U_{rz}^*(r, z, 0, Z) &= 0 \quad (***) \\ U_{zr}^*(r, z, 0, Z) &= \frac{l}{8\mu(1-\nu)} \left(\frac{b}{s}\right)^2 \frac{c}{s} \quad (***) \\ U_{zz}^*(r, z, 0, Z) &= \frac{l}{8\mu(1-\nu)} \frac{b}{s} \left[ 3 - 4\nu + \left(\frac{c}{s}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} T_{rr}^*(r, z, 0, Z) &= 0 \\ T_{rz}^*(r, z, 0, Z) &= 0 \quad (***) \\ T_{zr}^*(r, z, 0, Z) &= \frac{-3b^2c}{4(1-\nu)s^5} [bn_r + cn_z] - \frac{(1-2\nu)b}{4(1-\nu)s^3} [bn_z - cn_r] \quad (***) \\ T_{zz}^*(r, z, 0, Z) &= \frac{-3bc^2}{4(1-\nu)s^5} [bn_r + cn_z] - \frac{(1-2\nu)b}{4(1-\nu)s^3} [bn_r - cn_z] \end{aligned} \quad (16)$$

(\*\*\*) La notación empleada aquí es la transpuesta a la presentada por Balas, Sládek y Sládek (1989), como consecuencia del cambio observado en (8) y (9).

## 2.1 Comportamiento singular de las soluciones fundamentales

Las ecuaciones (7-14) presentan un comportamiento singular bajo dos circunstancias,  $s \rightarrow 0$  y cuando  $R = 0$  (Banerjee, 1994). A continuación se presenta un resumen del comportamiento asintótico de las soluciones fundamentales en la vecindad del punto de colocación P. (Graciani et al., 2005)

Como ya se ha mencionado, las expresiones analíticas de los *kernels* para problemas con simetría axial, están dadas en términos de integrales elípticas completas de primer y segundo orden con

$$k = 2 \frac{\sqrt{R(P)r(Q)}}{\sqrt{4R(P)r(Q) + [r(Q) - R(P)]^2 + [z(Q) - Z(P)]^2}} \quad (17)$$

Sí el punto de integración tiende hacia el punto de colocación ( $s \rightarrow 0$ ), esto puede ser expresado como:

$$\bar{Q} = \bar{P} + \varepsilon r(\theta), \text{ donde } r \text{ es el vector unitario } \overline{PQ} \quad (18)$$

Introduciendo (18) en (17) resulta en (19)

$$k \rightarrow 1 \text{ sí } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (19)$$

Permitiendo realizar las siguientes expansiones en serie

$$K(k) = -\ln(\varepsilon) + O[I], \quad E(k) = I + O[\varepsilon], \quad \text{para } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (20)$$

El uso de (20) resulta, en las siguientes expansiones generales para los *kernels*, las cuales corresponden a las funciones a integrar en caso de comportamiento singular. (Graciani et al., 2005)

$$U_{\beta\alpha}^*(P, Q) = U_{\beta\alpha}^w \ln(\varepsilon) + U_{\beta\alpha}^B(P, \tau(Q)) \varepsilon \ln(\varepsilon) + O[I]$$

$$T_{\beta\alpha}^*(P, Q) = \frac{T_{\beta\alpha}^S(\tau(Q), n(Q))}{\varepsilon} + T_{\beta\alpha}^w(P, n(Q)) \ln(\varepsilon) + T_{\beta\alpha}^B(P, \tau(Q), n(Q)) \varepsilon \ln(\varepsilon) + O[I] \quad (21)$$

Donde  $\tau$  y  $n$  son los vectores tangente y normal respectivamente en  $Q$ . Las expresiones para  $U_{\beta\alpha}^w, U_{\beta\alpha}^B(P, r), T_{\beta\alpha}^S, T_{\beta\alpha}^w(P, n)$  y  $T_{\beta\alpha}^B(P, r, n)$  pueden ser encontradas, entre otras referencias, en Graciani et al. (2005).

### 2.1.1 Punto de colocación fuera del eje de simetría ( $R > 0$ )

Para un punto de colocación  $P \in \Gamma$  con  $R > 0$ , y según el análisis particular del caso realizado en (Graciani et al., 2005) para las expresiones (21), se llega a los términos singulares (22), tanto para  $U^*$  (con una singularidad débil presente), como para  $T^*$  (con una singularidad fuerte más una débil).

$$U_{\beta\alpha}^*(P, Q) = U_{\beta\alpha}^w \ln(\varepsilon) + U_{\beta\alpha}^B(P, \tau(Q)) \varepsilon \ln(\varepsilon) + U_{\beta\alpha}^R(P, Q)$$

$$T_{\beta\alpha}^*(P, Q) = \frac{T_{\beta\alpha}^S(\tau(Q), n(Q))}{\varepsilon} + T_{\beta\alpha}^w(P, n(Q)) \ln(\varepsilon) + T_{\beta\alpha}^B(P, \tau(Q), n(Q)) \varepsilon \ln(\varepsilon) + \dots \quad (22)$$

$$\dots + T_{\beta\alpha}^R(P, Q)$$

Siendo  $U_{\beta\alpha}^R(P, Q)$  y  $T_{\beta\alpha}^R(P, Q)$  las funciones regulares resultantes de la expansión singular de los *kernels* respectivos. Éstas últimas se obtienen al sustraer de la solución fundamental original (7 – 14), los términos evaluados restantes de la expansión respectiva.

### 2.1.2 Punto de colocación en el eje de simetría ( $R = 0$ )

Para un punto de colocación  $P \in \Gamma$  con  $R = 0$ , el comportamiento de las soluciones fundamentales se describe como sigue (Graciani et al., 2005)

$$U_{r\alpha}^*(P, Q) = 0$$

$$U_{z\alpha}^*(P, Q) = \frac{\tau_r [\tau_z \tau_\alpha + (3 - 4\nu) \delta_{z\alpha}]}{8G(1 - \nu)}$$

$$T_{r\alpha}^*(P, Q) \rightarrow 0, \text{ como } r \rightarrow 0 \quad (23)$$

$$T_{zr}^*(P, Q) = -\frac{\tau_r}{4\varepsilon(1 - \nu)} [3\tau_z \tau_r (\tau_r n_r + \tau_z n_z) + (1 - 2\nu)(\tau_r n_z - \tau_z n_r)]$$

$$T_{zz}^*(P, Q) = -\frac{\tau_r}{4\varepsilon(1 - \nu)} [3\tau_z \tau_z (\tau_r n_r + \tau_z n_z) + (1 - 2\nu)(\tau_r n_r + \tau_z n_z)]$$

Donde  $\tau$  y  $n$  son los vectores tangente y normal respectivamente definidos en el punto de integración  $Q$  y,  $G$  y  $\nu$  son los *módulos de corte* y *de Young* respectivamente.



Cuando los puntos finales del contorno coinciden con el eje de simetría, dos de los componentes del *Kernel*  $T^*$ ,  $T_{rr}^*(P,Q)$  y  $T_{rz}^*(P,Q)$ , incluyen términos particulares proporcionales a  $r^{-1}$ . A pesar de esta singularidad estos *kernels* convergen a cero tanto como  $r \rightarrow 0$ . (Balas, Sládek y Sládek, 1989)

## 2.2 Integración de las soluciones fundamentales

Sí el punto  $P$  está fuera del elemento “t” de integración, los integrando en (5) son regulares y corresponden a la evaluación de las expresiones (7-14), por lo que las integrales pueden ser computadas numéricamente mediante la implementación de la cuadratura de *Gauss-Legendre*. Sí por el contrario, el punto  $P$  coincide con alguno de los nodos del elemento en integración, algunos de los integrando son singulares y deben ser evaluados en base a las expresiones respectivas en (22) y (23) según sea el caso. Las integrales numéricas relacionadas a estos términos deben ser calculadas con una cuadratura especial o método correspondiente, por ejemplo, en el caso de la integración de los términos  $U_{\beta\alpha}^R(P,Q)$  y  $T_{\beta\alpha}^R(P,Q)$ , aunque su comportamiento es regular, ameritan de un método de integración numérica más refinado y/o adaptativo, como por ejemplo el *Método Adaptativo de Romberg*. Para el caso de  $U_{\beta\alpha}^w(P,Q)$  dada la función logarítmica que la acompaña, se emplea la cuadratura especial de *Gauss-Laguerre*. (G. Beer, 2001)

A pesar de que la integración numérica del *kernel*  $T^*$  sobre el elemento singular amerita especial atención, existe un método alternativo para evitar este paso basado en la combinación de dos técnicas: *Rigid Body Motion* en dirección  $z$  e *Inflation Mode* para axisimetría en dirección  $r$ , obteniendo así las integrales impropias más la influencia de los coeficientes  $C_{\alpha\beta}$  con gran exactitud (Banerjee, 1994; De Lacerda et al., 2000). En el caso de que  $R = 0$  y cuando  $s \rightarrow 0$ , las técnicas mencionadas arriba no se aplicaron, debido a las restricciones geométricas inherentes, obteniendo los valores correspondientes en la diagonal de la matriz  $H$  del sistema inicial  $HU^\circ = GT^\circ$ , mediante la integración por cuadratura de Gauss de las expresiones (23), más la adición del único término libre distinto de “cero”,  $C_{zz}$  (Graciani et al., 2005). Para ello, se consideró la singularidad como débil.

Basados en las expresiones para todas las expresiones deducidas anteriormente, el método analítico también se presenta como una excelente opción para integrar con gran precisión los términos singulares de las expansiones, en aquellos casos donde se empleen elementos lineales continuos. (Graciani et al., 2005)

## 2.3 Expresión integral para las tensiones internas

$$\sigma_{ab}(P) = \int_r \left[ t_\alpha(Q) D_{ab\alpha}^*(P,Q) + \frac{\partial u_\alpha(Q)}{\partial \tau} B_{ab\alpha}^*(P,Q) + \frac{u_r(Q)}{r} A_{abr}^*(P,Q) \right] d\Gamma_Q \quad (24)$$

Donde  $a, b = r, \varphi, z$ , mientras que  $\alpha = r, z$ .

A partir de la expresión (24) y a través de los análisis correspondientes, se puede deducir la formulación directa explícita para evaluar el campo de tensiones en puntos pertenecientes al contorno, con  $r > 0$  (Balas, Sládek y Sládek, 1989). En aquellos casos donde  $r = 0$ , y después del estudio asintótico correspondiente (Graciani et al., 2005), se puede hacer uso de (24) integrando sobre el contorno, o, hacer uso de la interpolación como herramienta para obtener una aproximación de la tensión en los puntos pertenecientes al eje de simetría.

Las expresiones explícitas para los *kernels* axisimétricos  $D_{aba}^*$ ,  $B_{aba}^*$  y  $A_{abr}^*$  están dadas en Balas, Sládek y Sládek (1989). Sin embargo, Graciani et al. (2005) propuso correcciones sustentadas para algunos términos en estas expresiones, las cuales se muestran en Graciani (2006).

Como en el caso de integración para puntos en el contorno, también se hace necesario el análisis del comportamiento asintótico, ya que términos del tipo  $r^{-1}$ ,  $R^{-1}$ ,  $R^{-2}$  están incluidos en los *kernels* axisimétricos  $D_{aba}^*$ ,  $B_{aba}^*$  y  $A_{abr}^*$ , además de la singularidad del tipo  $r^{-1}$ , asociada con aquellos puntos con  $r = 0$ . Estos análisis están reportados en Balas, Sládek y Sládek (1989).

### 3 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Las expresiones descritas en el punto 2, fueron implementadas siguiendo el algoritmo propuesto por G. Beer (2001), según la metodología propuesta por Graciani et al. (2005). El código original (G. Beer, 2001) está estructurado en una secuencia de subrutinas que permiten la obtención de los campos de desplazamiento/temperatura y tensión/flujo en el rango elástico-lineal según sea el caso. Para la implementación de la nueva formulación, se realizaron cambios en las subrutinas más importantes (aquellas relacionadas con la evaluación e integración de los *Kernels* para el ensamblaje del sistema de ecuaciones algebraicas), manteniendo la estructura inicial del algoritmo.

### 4 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Para validar la implementación de la formulación axisimétrica para elasticidad lineal y su correspondiente comportamiento asintótico, se tomaron dos problemas de la mecánica con solución analítica conocida, para el estudio de los casos  $R > 0$  y  $R = 0$  respectivamente:

- Tubo de pared gruesa sometido a presión interna constante uniformemente distribuida, abierto en sus extremos ( $\sigma_{zz} \approx 0$ ).
- Cilindro de pared gruesa sometido a presión externa constante uniformemente distribuida, abierto en sus extremos.

Así mismo, para el primer tipo de problema se plantearon dos modelos diferentes: tubo encamisado y no encamisado, con el objeto de verificar la formulación implementada bajo simulación multi – zona.

$$u_r = \frac{(1-\nu)}{E} \frac{(p_i R_i^2 - p_e R_e^2)}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(p_i - p_e)}{r} \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} r \quad (25)$$

$$\sigma_{rr, \varphi\varphi} = \frac{(p_i R_i^2 - p_e R_e^2)}{R_e^2 - R_i^2} \pm (p_i - p_e) \left( \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \frac{1}{r^2} \quad (26)$$

Las expresiones generales 25 y 26 representan los desplazamientos en dirección radial y las tensiones en dirección radial y circunferencial respectivamente (M. Chapetti, 2005), generados por la aplicación de una presión uniformemente distribuida en la pared interna de un cilindro (problema clásico N° 1). Por otra parte, al hacer tender el valor de  $R_i$  a “cero” en las expresiones anteriores, conseguiremos las expresiones analíticas para el problema clásico N° 2.

#### 4.1 Definición de geometrías

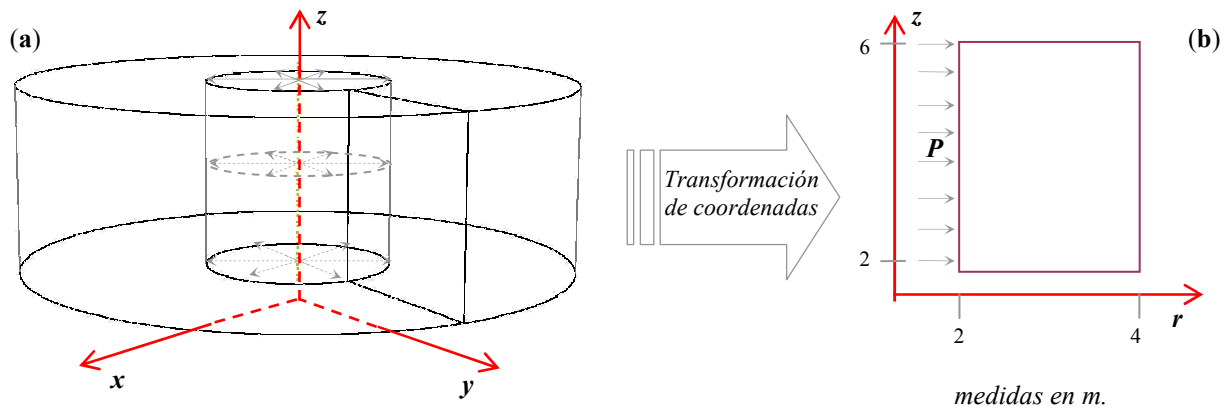


Figura 3: Problema clásico N° 1: Tubo de pared gruesa sometido a presión interna uniforme  $P$ . (a) geometría según sistema coordenado  $x$ ,  $y$  y  $z$ , (b) representación clásica del dominio axisimétrico. (Chapetti, 2005)

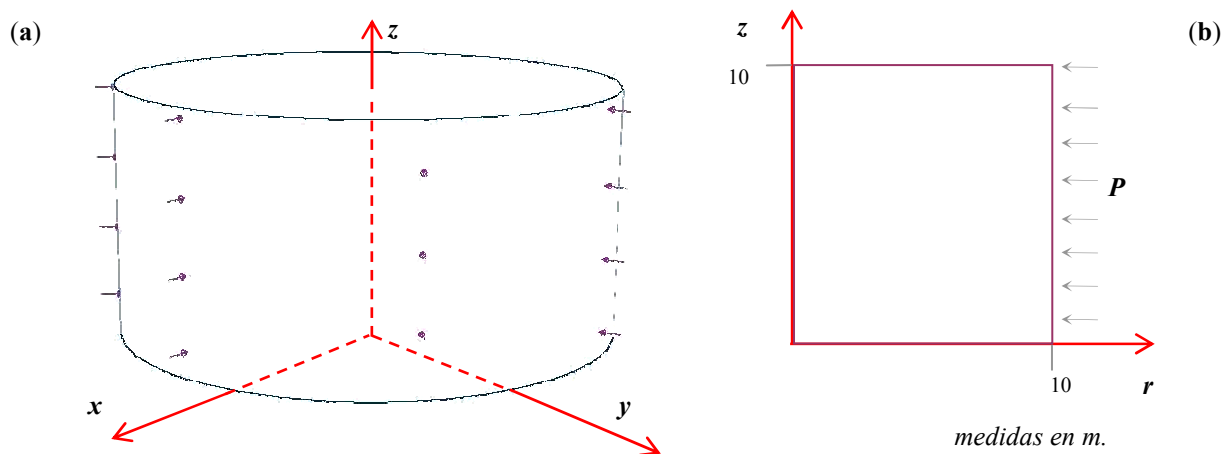


Figura 4: Problema clásico N° 2: Cilindro de pared gruesa sometido a presión externa uniforme  $P$ . (a) geometría según sistema coordenado  $x$ ,  $y$  y  $z$ , (b) representación clásica del dominio axisimétrico.

#### 4.2 Tubo de pared gruesa (no encamisado) sometido a presión interna uniforme

*Consideraciones generales:*

Región(es): 1

Material isotrópico, comportamiento elástico – lineal:  $E = 1.0 \text{ KPa}$ . y  $\nu = 0.3$

Pared interna del cilindro sometida a una presión  $P$  (KN/m) unitaria.

*Discretización y condiciones de contorno:*

Se presentan dos modelos basados en la geometría mostrada en la figura 3.b, ambos sometidos a una presión constante uniforme  $P$  en la pared interna. Con el objeto de realizar un sencillo análisis de sensibilidad. En la figura 5.a se muestra la base de la geometría discretizada con 2 elementos lineales condicionados a un movimiento de cuerpo rígido en dirección  $r$ , mientras que en el plano  $z = 6$  se establece una condición de tensión plana. En la figura 5.b, la misma base se discretiza con 16 elementos lineales, manteniendo las mismas condiciones de contorno. Ambos modelos contienen 10 puntos internos distribuidos

uniformemente con coordenadas  $r, 4$  ( $2 < r < 4$ ).

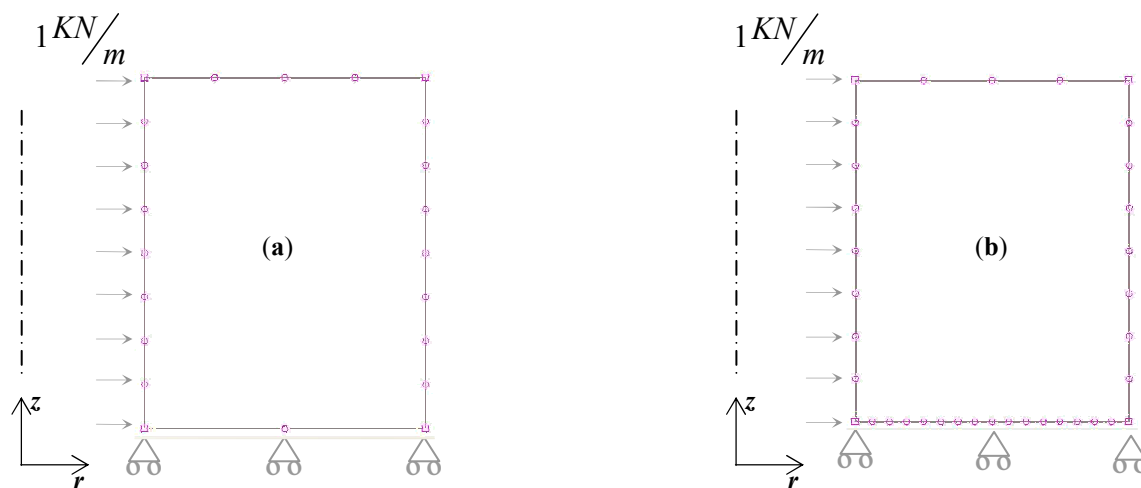


Figura 5: Discretización y condiciones de contorno impuestas. (a) 22 nodos y 22 elementos lineales. (b) 36 nodos y 36 elementos lineales. Nótese la diferencia en la cantidad de nodos de la base

### 4.3 Tubo de pared gruesa (encamisado) sometido a presión interna uniforme

*Consideraciones generales:*

Región(es): 2

Materiales isótropos, comportamiento elástico – lineal:

Región 1:  $E = 1.0 \text{ KPa}$ . y  $\nu = 0.3$ , Región 2:  $E = 4.0 \text{ KPa}$ . y  $\nu = 0.3$

Pared interna del cilindro sometida a una presión  $P$  (KN/m) unitaria.

No se considera interferencia en la interface.

*Discretización y condiciones de contorno:*

Se presenta nuevamente un modelo basado en la geometría mostrada en la figura 3.b, sometido a una presión constante uniforme  $P$  en la pared interna del cilindro. Se dispone ahora de una “camisa” de un material 2, que recubre al cilindro (material 1). En la figura 6 se muestra la base de la geometría discretizada con 16 elementos lineales condicionados a un movimiento de cuerpo rígido en dirección  $r$ , mientras que en el plano  $z = 6$  se establece una condición de tensión plana.

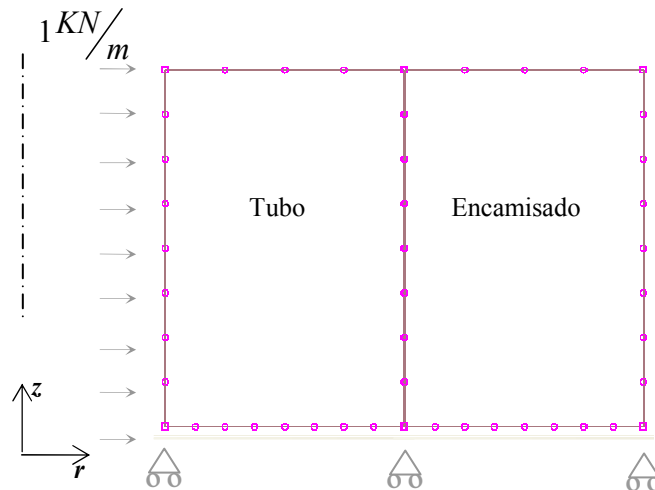


Figura 6: Discretización y condiciones de contorno impuesta a la sección axisimétrica de un problema multi región: “tubo encamisado”. Se dispuso de un total de 16 elementos en la base de la geometría.

#### 4.4 Cilindro de pared gruesa sometido a presión externa uniformemente distribuida

*Consideraciones generales:*

Región(es): 1

Material isótropo, comportamiento elástico – lineal:  $E = 1000.0 \text{ KPa}$ . y  $\nu = 0.3$

Pared externa del cilindro sometida a una presión  $P = 1000.0 \text{ KN/m}$ .

*Discretización y condiciones de contorno:*

Se presentan un modelo basado en la geometría mostrada en al figura 4.b, sometido a una presión constante uniforme  $P$  en la pared externa. Con el objeto de realizar un proceso de integración más estable en la cercanías del eje de simetría, se discretiza el modelo (figura 7) con 60 elementos lineales, 20 de ellos condicionados a un movimiento de cuerpo rígido en dirección  $r$  en su parte inferior, mientras que aquellos con nodos en el eje de simetría se establece la condición necesaria que simule la porción faltante del material. En el plano  $z = 6$  se establece una condición de tensión plana. El modelo contiene, además, 19 puntos internos distribuidos uniformemente con coordenadas  $r, 5$  ( $0,5 < r < 9,5$ ).

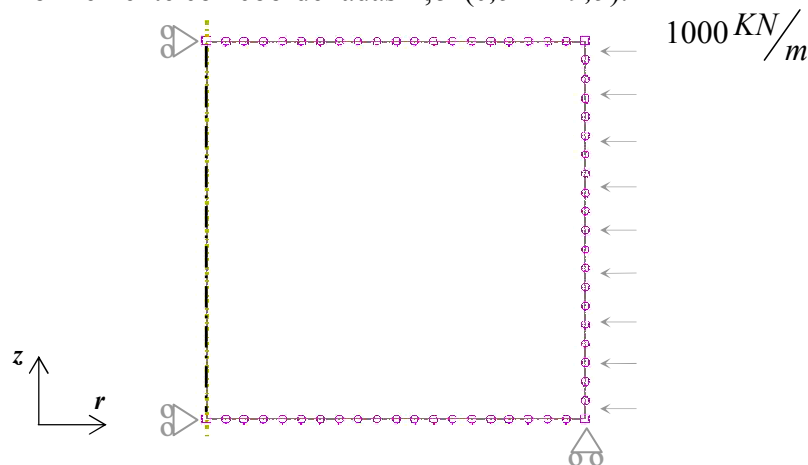


Figura 7: Discretización y condiciones de contorno impuesta a la sección axisimétrica del problema con  $R=0$ . Se dispuso de un total de 20 elementos en la base de la geometría.

## 5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se comparan los desplazamientos en dirección radial, así como las tensiones en dirección radial, longitudinal y circunferencial obtenidos de las expresiones analíticas 25 y 26, con los resultados numéricos obtenidos mediante la aplicación del nuevo código, para los nodos que conforman los elementos de la base y en puntos internos.

### 5.1 Tubo de pared gruesa (no encamisado) sometido a presión interna uniforme

$U_r$  (m)

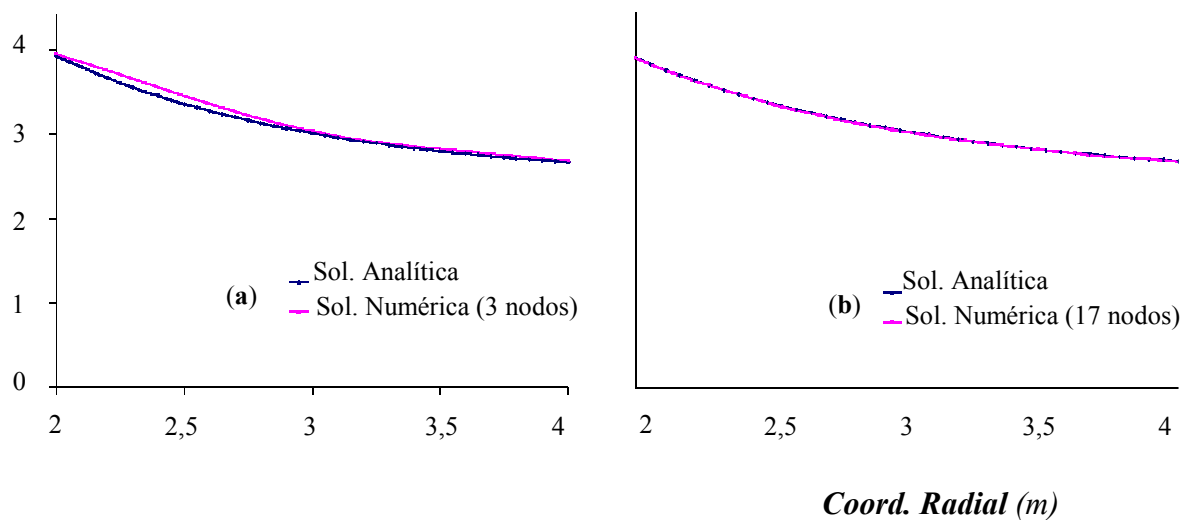


Figura 8: Comparación entre resultados analíticos y numéricos para la variable “desplazamiento” en dirección radial para los nodos de la base. (a) 2 elementos lineales y 3 nodos en la base, (b) 16 elementos lineales y 17 nodos en la base

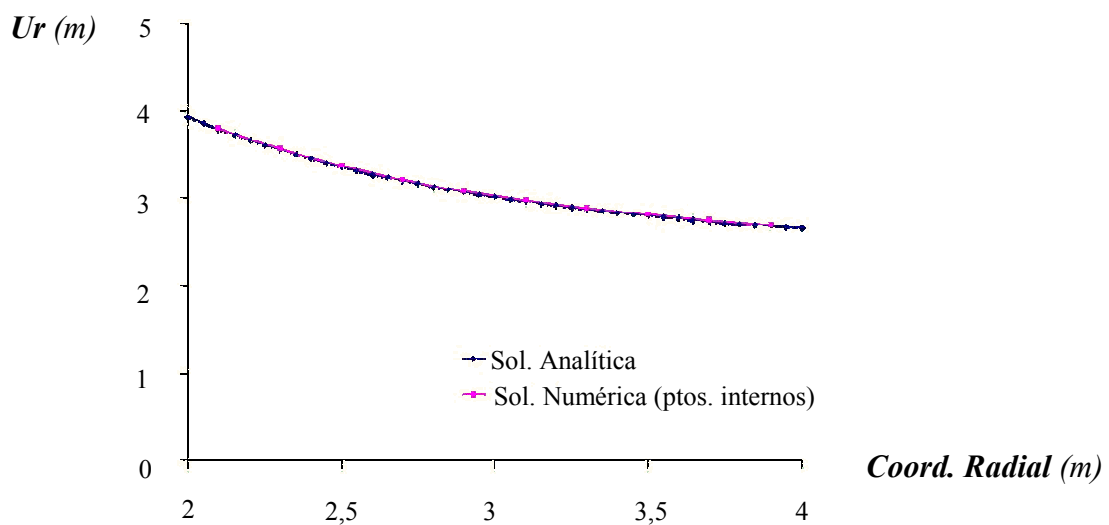


Figura 9: Resultados analíticos y numéricos para el campo de desplazamientos en dirección radial.

A pesar de que en el ejemplo mostrado en la figura 8.a se presenta una discretización pobre en el segmento de la base, se evidencia una tendencia numérica aceptable hacia la curva de desplazamientos obtenida de la solución analítica (25). Esta aproximación mejora significativamente al incrementar el número de elementos (figura 8.b), lo cual era de esperarse considerando que en el método de los elementos de contorno, al aumentar la cantidad de puntos de colocación (nodos) el error de aproximación tiende a disminuir (G. Beer, 2001). De igual manera ocurre con la evaluación del campo de desplazamientos en los puntos internos (figura 9), aunque solo se reportan los resultados tomando en cuenta 10 puntos internos.

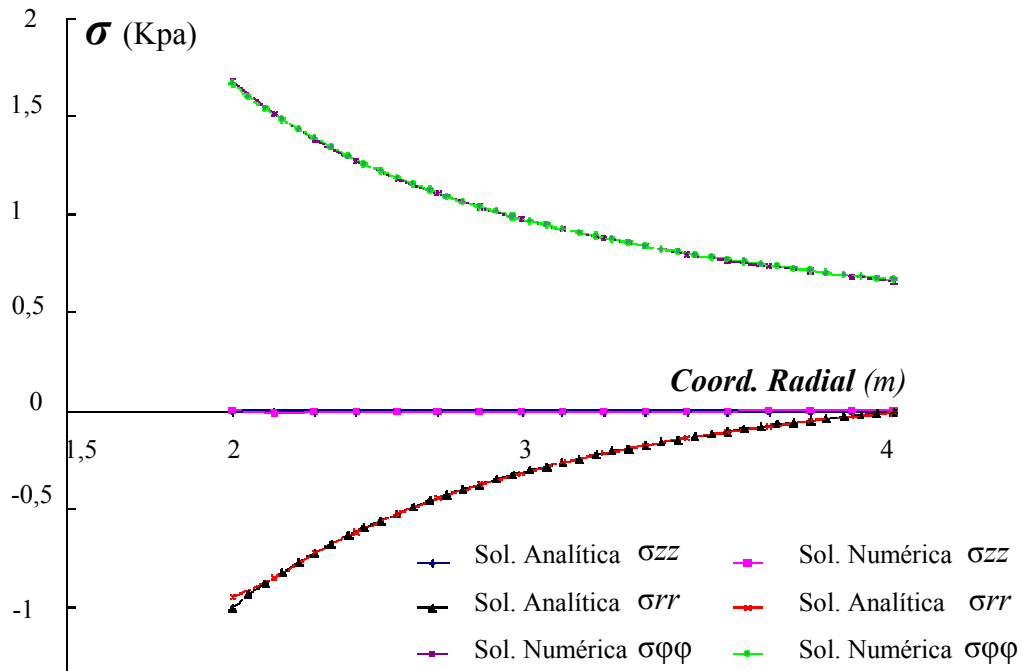


Figura 10: Resultados numéricos y analíticos para el campo de tensiones radial, longitudinal y circunferencial.

En cuanto al comportamiento del campo de tensiones, se presenta una tendencia similar a la reportada en el análisis anterior. En relación a  $\sigma_{zz}$ , la figura 10 muestra un comportamiento continuo y constante a lo largo de todos los puntos del dominio en estudio, lo cual era de esperarse considerando la condición de “tensión plana” en el plano  $(r,\phi)$  impuesta al modelo. De igual manera ocurre con otros puntos del contorno, al no poseer restricciones de movimiento en dirección  $z$ . El comportamiento mostrado por las otras variables también coincidió notablemente con el resultado analítico (26).

## 5.2 Tubo de pared gruesa (encamisado) sometido a presión interna uniforme

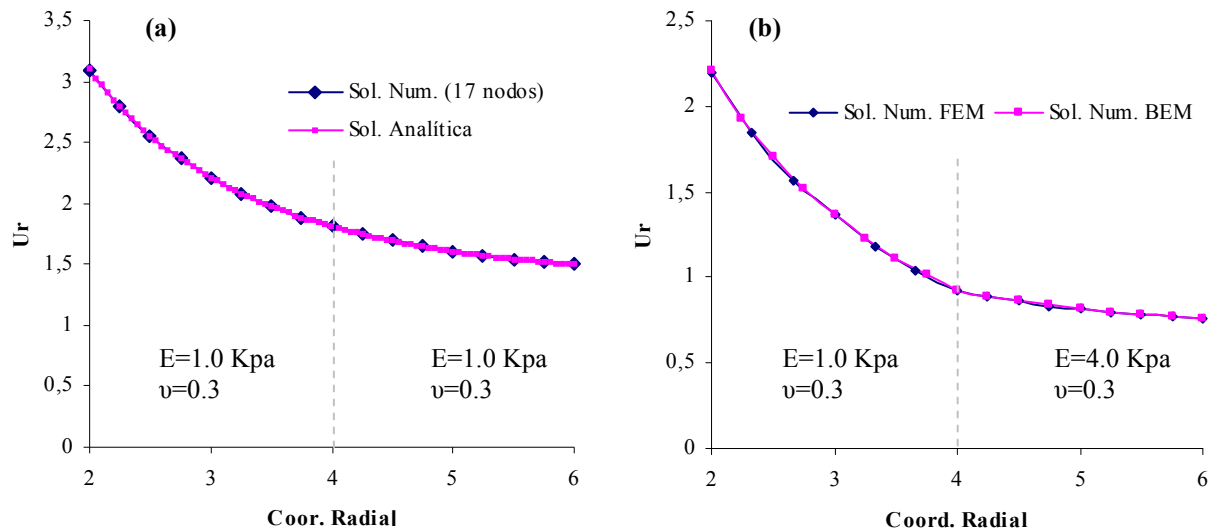


Figura 11: (a) Resultados numéricos y analíticos para el campo de desplazamientos en dirección radial, tomando propiedades iguales para ambos materiales. (b) Comparación FEM (Abaqus, 6.5-1) & BEM de los resultados obtenidos para el campo de desplazamientos, tomando diferentes propiedades para ambos materiales.

La figura 11.b muestra una rápida tendencia de los desplazamientos a disminuir en comparación con los valores reportados para el ejemplo de la figura 11.a, cuya tendencia es menos pronunciada. La principal razón es el aumento en el espesor al considerar ahora dos regiones, lo cual opone mayor resistencia al movimiento en dirección radial. Por otra parte, en la figura 11.a, se evidencia que en la interface, no se presenta un cambio significativo en el comportamiento de la curva (pendiente), debido a que las propiedades de los materiales involucrados fueron consideradas iguales para este ejemplo. Caso contrario muestra el comportamiento de la curva en la figura 11.b, donde la pendiente disminuye considerablemente al presentarse en la interface una variación en las propiedades mecánicas consideradas.



### 5.3 Cilindro de pared gruesa sometido a presión externa uniformemente distribuida

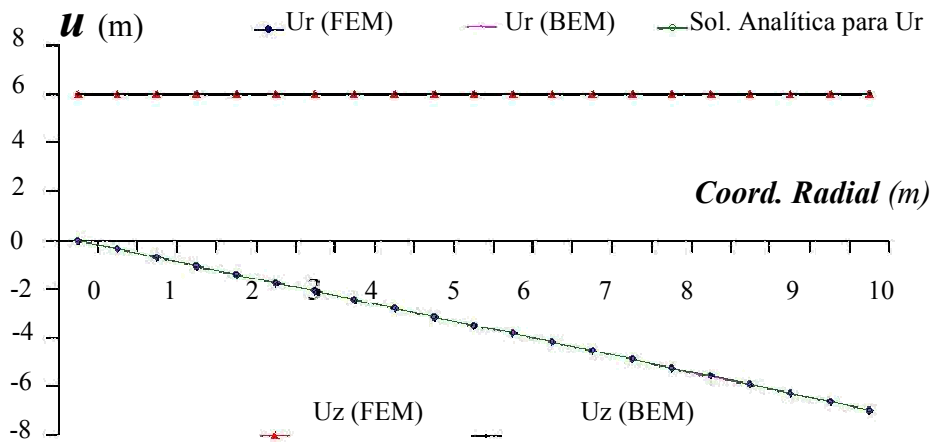


Figura 12: Se muestran los resultados numéricos, para el campo de desplazamientos en dirección radial y longitudinal, obtenidos por ambos métodos (FEM y BEM) y la curva de tendencia analítica en dirección  $r$ . Los nodos evaluados, corresponden a aquellos contenidos en el extremo superior discretizado. Los resultados de la simulación en FEM fueron obtenidos mediante la aplicación de Abaqus 6.5-1.

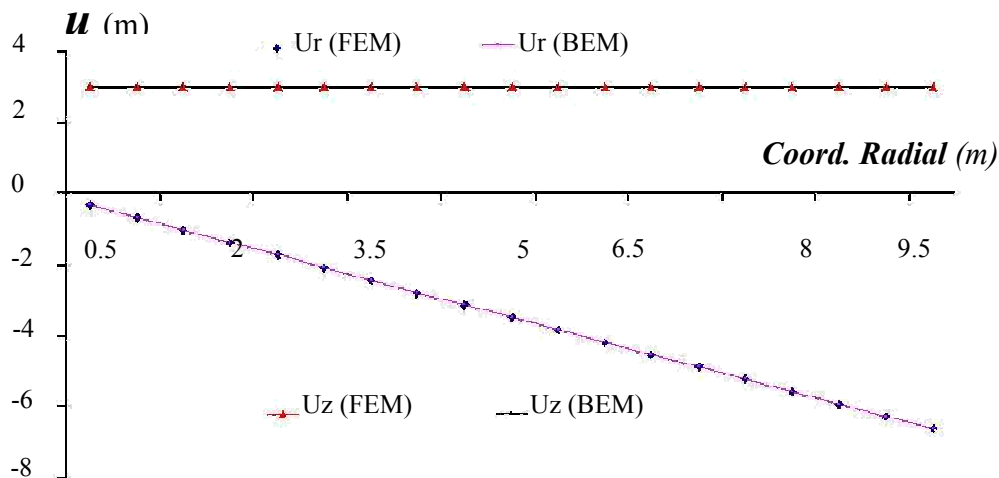


Figura 13: Resultados numéricos, para el campo de desplazamientos en dirección radial y longitudinal, obtenidos por ambos métodos (FEM y BEM) en los 19 puntos internos considerados en el problema clásico N° 2. Nuevamente, los resultados de la simulación en FEM fueron obtenidos mediante la aplicación de Abaqus 6.5-1.

A pesar de que la evaluación e integración de la expansión singular de los *kernels*, en aquellos casos cuando el radio de un punto de colocación es “cero” amerita de cierto cuidado, el hecho de contar con una cantidad de elementos importantes en la discretización, suele garantizar una buena aproximación en los resultados obtenidos, sobretudo, en las adyacencias del eje de simetría. Los resultados reportados, tomando como base, el problema clásico N° 2, demuestran una vez más, la eficacia de la formulación implementada.

## 6 CONCLUSIONES

Los problemas que implican los sólidos tridimensionales de simetría axial (o sólidos de revolución) sometidos a carga axial simétrica se reducen a problemas bidimensionales, muy útiles a la hora simplificar el problema y disminuir los tiempos de cómputo. El ya versátil Método de los Elementos de Contorno (BEM) también pudo incorporar esta ventaja, gracias a la forma general la ecuación integral de contorno axisimétrica deducida, entre otros, por Balas, Sládek y Sládek (1989) y con correcciones propuestas por Graciani (2006). Las singularidades inherentes a los campos de desplazamientos y tensiones requirieron de un estudio asintótico más profundo dentro de la formulación, lo que condicionó la evaluación e integración de términos adicionales. Sin embargo, la incorporación de las nuevas soluciones fundamentales en un algoritmo clásico basado en la teoría de elasticidad para BEM (G. Beer, 2001) fue relativamente fácil, debido a la versatilidad presentada por la estructura de programación de dicho código.

El ejemplo clásico seleccionado para la validar la implementación, permitió verificar la eficiencia en la evaluación de la nueva formulación. El proceso de integración requirió especial cuidado debido a la presencia de las integrales elípticas completas de primer y segundo orden, cuyo comportamiento asintótico fue determinante para establecer el procedimiento de integración más adecuado en los casos singulares.

Como se mencionó al principio, la idea de este trabajo fue la de generar una de las herramientas requeridas, basada en el Método de los Elementos de Contorno, que permitiera obtener el campo “tensión-deformación” en modelos simplificados de segmentos de huesos largos humanos. Este es el paso principal para la realización de un análisis quasi-estático que permitirá simular el patrón de osificación ósea durante el proceso de curación de fracturas.

## 7 AGRADECIMIENTOS

- Proyecto ALFA II-0357-FA-FCD-FI (ELBEnet).
- División de Soldadura y Fractomecánica, Instituto Tecnológico de Materiales (INTEMA), Universidad Nacional de Mar del Plata, Mar del Plata, Argentina.
- Instituto Nacional de Bioingeniería (INaBio), Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), Caracas, Venezuela.
- Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (CDCH), Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- Prof. Enrique Graciani, Escuela Superior de Ingenieros, Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Universidad de Sevilla, España.

## REFERENCIAS

- C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel. *Boundary Element Techniques: Theory and applications in Engineering*, 1th edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984
- C.A. Brebbia, J. Dominguez. *Boundary element: an introductory course*. 2th edition, Computational Mechanics Publications, U.K., 2003
- E. Graciani, V. Mantic, F. Paris, A. Blazques. Weak formulation of axisymmetric frictionless contact problems with boundary elements. Application to interface cracks. *J. Comp. Estruc.*, 83:836-855, 2005.

- E. Graciani (2006). Formulación e implementación del Método de los Elementos de Contorno para problemas axisimétricos con contacto. Aplicación a la caracterización de la interfase fibra matriz en materiales compuestos. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.
- G. Beer. *Programming the boundary element method: An introduction for engineers*. 1th edition, John Wiley & Sons, Ltd., U.K., 2001
- J. Balas, J. Slâdek, V. Slâdek. *Stress analysis by boundary element method*. 1th edition, Amsterdam, Elsevier, 1989
- J. M. García, J. H. Kuiper, M. Doblaré, J. B. Richardson, M. J. Gómez. Simulación numérica del proceso de reparación de fracturas óseas. *V Congreso sobre Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI)*, España, junio 2002
- L.A. de Lacerda, L.C. Wrobel. Frictional contact análisis of coated axisymmetric bodies using the boundary element method. *Journal of strain Analysis*. 35(5): 423-440, 2000
- M.J. Gómez-Benito, J.M. García-Aznar, J.H. Kuiper, M. Doblaré. Influence of fracture gap size on the pattern of long bone healing: a computational study. *Journal of Theoretical Biology*, 235: 105-119, 2005
- Mirco Chapetti D., *Mecánica de Materiales*. 1era edición, Ediciones Al Margen, La Plata – Buenos Aires, 2005
- P.K. Banerjee, *The Boundary Element Methods in Engineering*. 2th edition, McGraw-Hill International, U.K., 1994