Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXIX, págs. 1037-1046 (artículo completo)
F.E. Dotti, M. Febbo, S.P. Machado, M. Saravia, M.A. Storti (Eds.)
Bahía Blanca, 1-4 Noviembre 2022

SOLUCIÓN DE UNA CLASE DE ECUACIÓN INTEGRAL DE VOLTERRA BIDIMENSIONAL NO LINEAL COMO PROBLEMA INVERSO DE MOMENTOS.

SOLVING A CLASS OF TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS AS A GENERALIZED MOMENTS PROBLEM

María B. Pintarelli[a,b]

[a]*Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, LaPlata -1900. Argentina, mariabpintarelli@gmail.com*

[b]*Departmento de Ciencias Basicas de la Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional de La Plata -1900. Argentina, mariabpintarelli@gmail.com*

Palabras clave: Klein-Gordon, ecuación integral de Volterra, problema generalizado de momentos, problema inverso.

Resumen. Se mostrará que una ecuación bidimensional de Volterra no lineal puede resolverse numéricamente utilizando las técnicas de problema generalizado de momentos en dos pasos escribiendo la ecuación de Volterra como una ecuación de Klein-Gordon de la forma $w_{tt} - w_{xx} = H(x,t)$, donde $H(x,t)$ es desconocida. En un primer paso $H(x,t)$ se encuentra de manera aproximada, y en un segundo paso se aproxima numéricamente la solución de la ecuación de Klein-Gordon usando la aproximación para $H(x,t)$ previamente calculada. El método se ilustra con ejemplos.

Keywords: Klein-Gordon, nonlinear Volterra equation integral, generalized moments problem, inverse problem.

Abstract.
It will be shown that solve an equation two-dimensional Volterra nonlinear can be solved numerically applying the techniques of inverse generalized moments problem in two steps writing the Volterra's equation as a Klein-Gordon equation of the form $w_{tt} - w_{xx} = H(x,t)$, which $H(x,t)$ it is unknown. In a first step, $H(x,t)$ is numerically approximate, and in a second step we numerically approximate the solution of Klein-Gordon equation using the $H(x,t)$ previously approximated.
The method is illustrated with examples.

1 INTRODUCCIÓN

Se quiere hallar $w(x,t)$ tal que

$$w(x,t) - \int_0^t \int_0^x K(x,t,y,z,w(y,z))dydz = f(x,t) \quad (x,y) \epsilon D$$

Donde $w(x,t)$ es función desconocida y $f(x,t)$ conocida continua en D con $D = \{(x,t); x > 0, t > 0\}$ y $K(x,t,y,z,w)$ conocida continua en E con $E = \{(x,t,y,z); 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq t, x > 0, t > 0, -\infty < w < \infty\}$.

Además *f* y *K* son r veces continuamente diferenciables sobre *D* y *E* respectivamente con r = 2. En este caso la solución *w* será r = 2 veces continuamente diferenciable sobre *D*.
El espacio subyacente es $L^2(D)$
Notar que

$$w(0,t) = f(0,t) \quad , \quad w(x,0) = f(x,0) \qquad t \geq 0 \; , \; x \geq 0$$

$$w_x(0,t) \quad , \quad w_t(x,0) \quad t \geq 0 \; , \; x \geq 0 \text{ son conocidas}$$

Ecuaciones integrales es un tema especial en Matemática Aplicada, y constituye una herramienta importante para modelizar problemas en campos como ingeniería, astrofísica, química, mecánica cuántica y muchos otros campos.

El objetivo de este trabajo es mostrar que se puede resolver el problema usando las técnicas de problema generalizado de momentos. Se enfoca el estudio sobre la aproximación numérica.
El interés no está en comparar con otros métodos existentes, sino presentar un método diferente, novedoso según mi criterio.

El problema generalizado de momentos (D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002; J.A. Shohat and J.D. Tamarkin,1943; G. Talenti,1987) consiste en encontrar $f(x)$ sobre un dominio $\Omega \subset R^d$ que satisface la secuencia de ecuaciones

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \qquad i \epsilon N \tag{1}$$

donde N es el conjunto de los números naturales, $(g_i(x))$ es una secuencia de funciones en $L^2(\Omega)$ linealmente independientes conocidas y la sucesión de números reales $\{\mu_i\}_{i\epsilon N}$ son datos conocidos.
El problema de momentos es un problema mal condicionado en el sentido que podría no haber solución y si la hay no depende continuamente de los datos (D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002; J.A. Shohat and J.D. Tamarkin,1943; G. Talenti,1987). Hay varios métodos para construir soluciones regularizadas. Uno de ellos es el método de expansión truncada (D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002).
Este método aproxima la Ec. (1) con un problema de momentos finito

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{2}$$

Donde se considera una solución aproximada $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \phi_i(x)$, y las funciones $\{\phi_i(x)\}_{i=1,..,n}$ resultan de ortonormalizar $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ siendo λ_i coeficientes escritos en función de los datos μ_i. En el subespacio generado por $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ la solución es estable.

Si $n \in N$ es elegido en forma apropiada entonces la solución de Ec. (2) aproxima la solución del problema considerado en Ec.(1).
En el caso donde los datos $\mu_i$son inexactos serán aplicados teoremas de convergencia y se dará una cota para el error de la solución regularizada (páginas 19 - 30 de (D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, 2002).

2 ORGANIZACIÓN DEL ARTÍCULO

El problema de hallar $w(x,t)$ tal que

$$w(x,t) - \int_0^t \int_0^x K(x,t,y,z,w(y,z))dydz = f(x,t) \quad (x,y) \in D$$

se resolverá en dos pasos.
La próxima sección describe el primer paso.
La sección siguiente explica el segundo paso.
Entonces se explica cómo el problema de momentos generalizados se resuelve con el método de expansión truncada.
Finalmente se presenta un ejemplo numérico y las conclusiones.

3 PRIMER PASO

Consideramos

$$w(x,t) - \int_0^t \int_0^x K\big(x,t,y,z,w(y,z)\big)dydz = f(x,t) \tag{3}$$

Diferenciamos Ec. (3) con respecto a *t* dos veces:

$$w_{tt}(x,t) = \left(\int_0^t \int_0^x K(x,t,y,z,w(y,z))dydz\right)_{tt} + f_{tt}(x,t) = R(x,t)$$

$$w_{tt}(x,t) - w_{xx}(x,t) = R(x,t) - w_{xx}(x,t) = H(x,t)$$

Las condiciones son:

$$w(0,t) = f(0,t) \quad , \quad w(x,0) = f(x,0) \qquad t \geq 0 \quad x \geq 0$$

Notar que

$$w_t(x,t) = \int_0^t \int_0^x K_t(x,t,y,z,w(y,z))dydz + \int_0^x K(x,t,y,t,w(y,t))dy + f_t\,(x,t)$$

De aquí

$$w_t(x,0) = \int_0^x K(x\,,0,y,0,w(y,0))dy + f_t(x,0)$$

Análogamente

$$w_x(0,t) = \int_0^t K(0\,, t, 0, z, w(0,t))dz + f_x(0,t)$$

Esto es $w_x(0,t)$ $t \geq 0$, $w_t(x,0)$ $\boldsymbol{x} \geq 0$ son conocidas

Tomamos la función auxiliar

$$u(m,r,x,t) = e^{-mx}e^{-rt}$$

Notar que $u_{xx} = m^2 u$ y $u_{tt} = r^2 u$.

Consideramos

$$w_{xx}(x,t) - w_{tt}(x,t) = -H(x,t)$$

Se define el campo vectorial

$$F^* = \big(F_1(w), F_2(w)\big) = (w_x, -w_t)$$

Como $div(F^*) = -H(x,t)$ se tiene que:

$$\iint_D u\, div(F^*)dA = \iint_D u\,\big(-H(x,t)\big)dA$$

Además, como $udiv(F^*) = div(uF^*) - F^*.\nabla u$, entonces

$$\iint_D u\, div(F^*)dA = \iint_D div(uF^*)dA - \iint_D F^*.\nabla udA$$

donde $\nabla u = (u_x, u_t)$.

Y

$$\iint_D F^*.\nabla udA = \iint_D (F_1 u_x + F_2 u_t)dA$$

Integrando por partes con respecto a x:

$$\iint_D F_1\, u_x dA = \int_0^\infty \int_0^\infty F_1\, u_x dxdt =$$

$$= \int_0^\infty \big(-w(a_1,t)u_x(m,r,a_1,t)\big)dt - \iint_D w u_{xx}\, dA =$$

$$\int_0^\infty \big(-w(0,t)u_x(m,r,0,t)\big)dt - \iint_D w\,(m)^2 udA$$

Análogamente

$$\iint_D F_2\, u_t dA = \int_0^\infty \int_0^\infty F_2\, u_t dxdt = \int_0^\infty \big(-w(x,0)u_t(m,r,x,0)\big)dt - \int_0^\infty \int_0^\infty w(r)^2 u dxdt$$

entonces

$$\iint_D F^*.\nabla u dA = \int_0^\infty \big(-w(0,t)u_x(m,r,0,t)\big)dt -$$

$$-\int_0^\infty \big(-w(x,0)u_t(m,r,x,0)\big)dt - \iint_D w\, u(m^2 - r^2)dA = A(m,r)$$

Por otro lado,

$$\int_C (uF^*).nds =$$

$$= \int_0^\infty u(m,r,x,0)w_t(x,0)dx - \int_0^\infty u(m,r,0,t)w_x(0,t)dt = G(m,r)$$

$$\therefore \iint u\,\big(-H(x,t)\big)dA = G(m,r) - A(m,r) + \iint_D w\, u(m^2 - r^2)dA$$

Si $r = m$:

$$\iint u\,\big(-H(x,t)\big)dA = G(m,m) - A(m,m)$$

Esto es

$$\iint u\,\big(H(x,t)\big)dA = -G(m,m) + A(m,m) = \phi(m)$$

Para resolver esta ecuación integral se asignan valores enteros a m, $m = 0,1,2,\dots n$
Entonces

$$\int_{a_1}^\infty H(x,t)R_m(x,t)dx = \phi(m) = \mu_m \qquad (4)$$

Interpretamos Ec. (4) como un problema de momentos generalizados.
$p_{1n}(x,t)$ es la aproximación numérica encontrada con el método de expansión truncada para $H(x,t)$, con $R_m(x,t) = u(m,m,x,t) = e^{-mx}\, e^{-mt}$ $m = 0,1,2,\dots n$ donde n es convenientemente elegido.
En la sección 5 el método de expansión truncada será explicado en detalle y se dará un teorema que explica la exactitud de la solución encontrada con este método.

4 APROXIMACIÓN PARA $w(x,t)$ – SEGUNDO PASO

Para encontrar una aproximación de $w(x,t)$ se hace un planteo similar al hecho en el primer paso donde $H(x,t)$ es reemplazada por $p_{1n}(x)$ y no consideramos $r = m$.

Se toma la función auxiliar $u(m,r,x,t) = e^{-(m+1)x}e^{-(r+1)t}$.
Notar que $u_{xx} = (m+1)^2 u$ y $u_{tt} = (r+1)^2 u$.
Se define el campo vectorial $F^* = \left(F_1(w), F_2(w)\right) = (w_x, -w_t)$
Como $div(F^*) = -H(x,t)$ entonces
:

$$\iint_D u\, div(F^*) dA = \iint_D u\left(-H(x,t)\right) dA$$

Además, como $u div(F^*) = div(uF^*) - F^*.\nabla u$, entonces:

$$\iint_D u\, div(F^*) dA = \iint_D div(uF^*) dA - \iint_D F^*.\nabla u dA$$

De esta forma

$$\therefore \iint u\left(-H(x,t)\right) dA = G(m,r) - A(m,r) + \iint_D w\, u((m+1)^2 - (r+1)^2) dA$$

Entonces

$$\iint_D w\, u((m+1)^2 - (r+1)^2) dA = -G(m,r) + A(m,r) + \iint_D u\, H(x,t) dA$$

donde $G(m,r)$ y $A(m,r)$ fueron definidas anteriormente.
Se reemplaza $H(x,t)$ por $p_{1n}(x)$ y entonces

$$\iint_D w(x,t) H_{mr}(x,t) dA = \frac{-G(m,r) + A(m,r) + \iint_D u\, p_{1n}(x)\, dA}{((m+1)^2 - (r+1)^2)} = \phi(m,r) \\ = \mu_{mr} \tag{5}$$

donde

$$H_{m,r}(x) = u(m,r,x,t)$$

Se considera la Ec. (5) como un problema de momentos generalizado bidimensional y se dan valores enteros no negativos a m y r , $m = 0,1,2, \dots n_1$; $r = 0,1,2, \dots, n_2$, donde n_1 y n_2 son convenientemente elegidos.
Una aproximación $p_{2n}(x,t)$ se encuentra por el método de expansión truncada para $w(x,t)$ donde $n = n_1 \times n_2$.

5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE MOMENTOS GENERALIZADO

Podemos aplicar el método de expansión truncada detallado en (G. Talenti, 1987) y generalizado en (M. B. Pintarelli and F. Vericat, 2008) y (M.B. Pintarelli and F. Vericat, 2011) para encontrar una aproximación $p_n(x,t)$ para el correspondiente problema finito con $i = 0,1,2, \dots, n$ donde n es el número de momentos μ_i. Se considera la base $\phi_i(x,t)$ $i = 0,1,2, \dots, n$ obtenida por aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt sobre $H_i(x,t)$ $i = 0,1,2, \dots, n$.
Se aproxima la solución $w(x,t)$ con (G. Talenti, 1987) y generalizada en (M. B. Pintarelli and

F. Vericat, 2008) y (M.B. Pintarelli and F. Vericat, 2011):

$$p_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\phi_i(x,t)$$

donde

$$\lambda_i=\sum_{j=0}^{i}C_{ij}\,\mu_j \quad i=0,1,2,\dots,n$$

Y los coeficientes C_{ij} verifican

$$C_{ij}=\left(\sum_{k=j}^{i-1}(-1)\frac{\langle H_i(x,t)|\phi_k(x,t)\rangle}{\|\phi_k(x,t)\|^2}C_{kj}\right).\|\phi_i(x,t)\|^{-1} \quad 1<i\le n\,;1\le j<i\,.$$

Los términos de la diagonal son $\|\phi_i(x,t)\|^{-1}$ $i=0,1,\dots,n$.
La prueba del siguiente teorema está en (M.B. Pintarelli and F. Vericat, 2011) y (M.B.Pintarelli, 2015).
En (M.B.Pintarelli, 2015) la demostración está hecha para b_2 finito. Si $b_2 = \infty$ en lugar de tomar polinomios de Legendre se toman polinomios de Laguerre. En (M.B.Pintarelli, 2016) la demostración está hecha para el caso unidimensional.
Este teorema da una medida de la exactitud de la aproximación.

Teorema
Se considera $b_1 = b_2 = \infty$.
Sea $\{\mu_i\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de números reales y supongamos que $f(x,t)\,\epsilon\,L^2((a_1,b_1)\times(a_2,b_2))$ para dos números positivos ε y M verifica:

$$\sum_{i=0}^{n}\left|\iint_E H_i(x,t)f(x,t)dtdx-\mu_i\right|^2\le\varepsilon^2 \quad .$$

$$\iint_E \left(x\,{f_x}^2+t\,{f_t}^2\right)Exp[x+t]dtdx\le M^2 \tag{6}$$

Y además debe cumplirse que

$$t^i f(x,t)\to 0 \quad \text{si} \quad t\to\infty \quad \text{para todo} \quad i\in N$$

Entonces

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}|f(x,t)|^2\,dtdx\le min_i\left\{\|C^TC\|\varepsilon^2+\frac{1}{8(n+1)^2}M^2;i=0,1,\dots,n\right\}$$

donde C es una matriz triangular con elementos C_{ij} $(1<i\le n;\ 1\le j<i)$
y

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}|f(x,t)-p_n(x,t)|^2\,dtdx \leq \|C^T C\|\varepsilon^2 + \frac{1}{8(n+1)^2}M^2.$$

Si b_2 no es infinito entonces Ec. (6) cambia por

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}((b_1-a_1)^2 f_x^2 + (b_2-a_2)^2 f_t^2)dx\,dt \leq M^2$$

6 EJEMPLO NUMÉRICO

Se considera la ecuación

$$w(x,t) - \int_0^t\int_0^x e^{-(x+y)}\sqrt{w(y,z)}dydz =$$

$$= e^{-t-\frac{x^2}{20}} - 2e^{10-\frac{t}{2}-x}(-1+e^{\frac{t}{2}})\sqrt{10\pi}\,(Erf(\sqrt{10}) + Erf(\frac{-20+x}{2\sqrt{10}}))$$

La solución es: $w(x,t) = e^{-t-\frac{x^2}{20}}$
tomamos n=5 momentos y se obtiene la aproximación $p_{1n}(x,t) \approx H(x,t)$ donde la exactitud es

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-t}\,(p_{1n}(x,t)-H(x,t))^2 dtdx = 0.170473$$

Consideramos esta norma pues la base es $e^{-mx}\,e^{-mt}$ $m = 1,2,\ldots 5$.
En la Figura 1 las gráficas de: $p_{15}(x,t)$ (magenta) y $H(x,t)$ (azul claro) son superpuestas.
Se toman $n = 6$ momentos y se aproxima $w(x,t)$ con exactitud

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-2x-3t}\left(p_{26}(x,t)-w(x,t)\right)^2 dtdx = 0.00899724$$

Consideramos esta norma pues la base es
$\{e^{-3t-2x}, e^{-4t-2x}, e^{-4t-3x}, e^{-5t-3x}, e^{-5t-4x}, e^{-6t-4x}\}$.
En la Figura 2 las gráficas de: $p_{26}(x)$(magenta) y $w(x,t)$ (azul claro) son superpuestas.

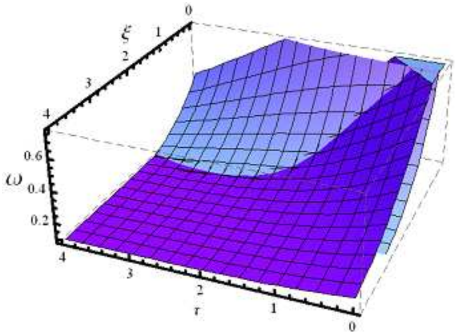

Figura 1: $p_{15}(x,t)$ y $H(x,t)$

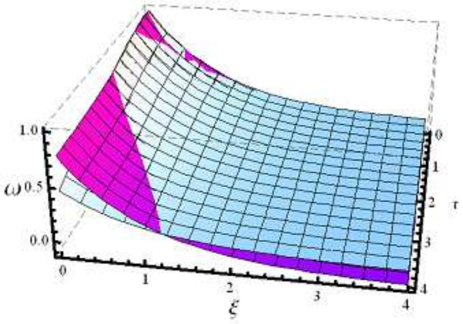

Figura 2:$w(x,t)$ y $p_{26}(x,t)$

7 CONCLUSIONES

Hallar aproximadamente $w(x,t)$ tal que

$$w(x,t) - \int_0^t \int_0^x K(x,t,y,z,w(y,z))dydz = f(x,t) \quad (x,y) \epsilon D$$

donde $w(x,t)$es deconocida y $f(x,t)$ y $K(x,t,y,z,w)$ son conocidas continuas en D y E respectivamente con $D = \{(x,t); x > 0, t > 0\}$ y $E = \{(x,t,y,z); 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq t, x > 0, t > 0, -\infty < w < \infty\}$ se puede realizar en dos pasos.

Diferenciamos con respecto a t dos veces y consideramos la ecuación en derivadas parciales de segundo orden $w_{xx}(x,t) - w_{tt}(x,t) = -H(x,t)$ con $H(x,t)$ desconocida.

1. En un primer paso aproximamos $H(x,t)$ con $p_{1n}(x)$ resolviendo la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{\infty} H(x,t) R_m(x,t) dx = \phi(m) = \mu_m$$

la cual es interpretada como un problema de momentos generalizados al discretizar m y $R_m(x,t) = u(m,m,x,t) = e^{-mx}\, e^{-mt} \quad m = 0,1,2, \dots n$ donde n es convenientemente elegido.

2. Para hallar una aproximación de $w(x,t)$ consideramos:

$$\iint_D w(x,t) H_{mr}(x,t) dA = \frac{-G(m,r) + A(m,r) + \iint_D u\, p_{1n}(x) dA}{((m+1)^2 - (r+1)^2)} = \phi(m,r) = \mu_{mr}$$

donde $H_{m,r}(x) = u(m,r,x,t)$. Podemos considerar que tenemos un problema de momentos bidimensional si discretizamos dando a m y r valores enteros no negativos. Una aproximación $p_{2n}(x,t)$ es encontrada por el método de expansión truncada para $w(x,t)$ donde $n = n_1 \times n_2$.

REFERENCIAS

D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K. Le and D.D. Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction. Lectures Notes in Mathematics*. Springer-Verlag,Berlin, 2002.

J.A. Shohat and J.D. Tamarkin, *The problem of Moments*. Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943.

G. Talenti, Recovering a function from a finite number of moments. *Inverse Problems*, 3:501- 517, 1987.

M. B. Pintarelli and F. Vericat, Stability theorem and inversion algorithm for a generalized moment problem. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 30: 253-274, 2008.

M.B. Pintarelli and F. Vericat, Bi-dimensional inverse moment problems. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 54: 1-23, 2011.

M.B.Pintarelli, Linear partial differential equations of first order as bi-dimensional inverse moment problem. *Applied Mathematics*, 6(6): 979-989, 2015.

M.B.Pintarelli, Parabolic partial differential equations as inverse moments problem. *Applied Mathematics*, 7 (1): 77-99, 2016.