

UN MÉTODO LOCAL INTEGRAL ESTABILIZADO BASADO EN FBR PARA ECUACIONES DE TIPO HELMHOLTZ PARA APLICACIONES AL CAOS ONDULATORIO Y RESONADORES DIELECTRICOS

A STABILIZED LOCAL INTEGRAL METHOD USING RBF FOR HELMHOLTZ-TYPE EQUATIONS FOR APPLICATIONS TO WAVE CHAOS AND DIELECTRIC MICRORESONATORS

Luciano Ponzellini Marinelli^{a, b} y Lisandro A. Raviola^a

^aFacultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, (S2000BTP) Rosario, Argentina, luciano@fceia.unr.edu.ar, raviola@fceia.unr.edu.ar

^bFacultad de Química e Ingeniería, Universidad Católica Argentina, Av. Pellegrini 3314, (S2002QEO) Rosario, Argentina, ponzellini@uca.edu.ar

Palabras clave: Método local integral; Funciones de base radial, Ecuación de Helmholtz; Caos ondulatorio.

Resumen. La mayoría de los problemas en electrodinámica y acústica no tiene solución analítica, por lo que se ha invertido gran esfuerzo en desarrollar esquemas numéricos como diferencias finitas, elementos de volumen, elementos de frontera y métodos relacionados basados en ecuaciones integrales de contorno (J. Wiersig, *J Opt A: Pure Appl Opt*, 5:53-60 (2003); H. Cao et al., *Rev Mod Phys*, 87:61-111 (2015)) para contruir soluciones numéricas. En este trabajo, aplicamos un Método Integral Local de Frontera y Dominio Estabilizado basado en aproximaciones con Funciones de Base Radial (L. Ponzellini Marinelli et al., *Math Comput Simul*, 180:379-400 (2021)) para resolver la ecuación de Helmholtz en problemas bidimensionales asociados a resonadores dieléctricos. Se consideran dos ejemplos de prueba, resueltos mediante la implementación del software Matlab.

Keywords: Local integral method; Radial Basis Functions, Helmholtz equation, Wave chaos.

Abstract. Most problems in electrodynamics do not have an analytical solution so much effort has been put in the development of numerical schemes for the numerical solution, such as the finite-difference method, volume element methods, boundary element methods, and related methods based on boundary integral equations (J. Wiersig, *J Opt A: Pure Appl Opt*, 5:53-60 (2003); H. Cao et al., *Rev Mod Phys*, 87:61-111 (2015)). In this paper we introduce a local integral boundary domain method with a stable calculation based on Radial Basis Functions approximations, in the context of wave chaos in acoustics and dielectric microresonator problems. We present the recently developed Stabilized Local Boundary Domain Integral Method (L. Ponzellini Marinelli et al., *Math Comput Simul*, 180:379-400 (2021)) in the context of boundary integral methods that improves the solution of the Helmholtz equation with RBFs. Two test examples are considered, solved by implementing the Matlab software.

1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Helmholtz es muy importante en problemas de ciencia e ingeniería, como la física, la tecnología, la geofísica y particularmente en problemas de óptica (Wiersig, 2003; Cao y Wiersig, 2015). Existen muchas técnicas numéricas para abordar esta ecuación como el método de elementos finitos (MEF), el método de volúmenes finitos (MVF), el Método de Elementos de Contorno (MEC) o métodos espectrales (Trefethen, 2000). No obstante, varios estos requieren de la construcción de un mallado o refinamiento específico para abordar eficientemente determinados problemas numéricos sobre geometrías no triviales.

El Método de Elementos de Contorno (MEC), también conocido como Método de Elementos de Frontera (Boundary Element Method), transforma las ecuaciones en derivadas parciales formuladas en ecuaciones integrales, es decir, en una forma de integral sobre la frontera (Partridge et al., 1992; Brebbia y Dominguez, 1998). En el MEC la EDP que describe al problema físico se transforma en una ecuación integral de borde (EIB), también conocida como de frontera (Boundary Integral Equation), lo cual se logra haciendo uso de las identidades de Green para luego aplicar esta formulación integral sobre puntos distribuidos en el dominio. Muchos métodos integrales locales se basan en una formulación integral sobre estenciles chicos y fuertemente superpuestos con interpolaciones locales.

En las últimas décadas los métodos que involucran las Funciones de Base Radial (FBR) se han convertido en una herramienta extremadamente efectivos en geometrías no triviales para la interpolación en conjuntos de nodos dispersos y para aproximar numéricamente Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Existen muchos libros que abordan la teoría, las implementaciones y las aplicaciones (Fasshauer, 2007; Fornberg y Flyer, 2015b). Usando las FBR infinitamente diferenciales como las gaussianas, puede mostrarse la convergencia exponencial. Un obstáculo práctico es el mal condicionamiento de la matriz de interpolación cuando el parámetro de forma que define la FBR gaussiana tiende a cero. Es sabido que cuando dicho parámetro se achica, la exactitud de la interpolación del método mejora considerablemente pero empeora el condicionamiento numérico del problema si se lo resuelve con un método numérico de tipo directo. Es decir, existe un conflicto entre exactitud y el condicionamiento conocido como principio de incertidumbre (Schaback, 1995).

En este trabajo presentamos el Método Integral Local de Frontera y Dominio-Estabilizado (MILFD-Est) (Ponzellini Marinelli et al., 2021) aplicado a la ecuación de Helmholtz. Este es un nuevo método numérico local integral estable para aproximar soluciones de EDP de tipo elípticas para resolver Problemas de Valores de Contorno (PVC) en 2D que utiliza interpolaciones locales con FBR para valores bajo del parámetro de forma $\varepsilon > 0$. Esta técnica es una combinación de métodos sin malla, formulaciones locales integrales y elementos de frontera en multidominios independiente de un mallado estructurado y que sólo requiere una distribución de nodos no-estructurada del dominio Ω y su frontera $\Gamma = \partial\Omega$ que permite abordar geometrías complejas. Para las interpolaciones locales, se utiliza las FBR gaussianas $\varphi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en las interpolaciones locales en forma estable.

Se muestran resultados numéricos para parámetros de forma pequeños que estabilizan el error. Se discuten, además, comparaciones con otros métodos en varios casos. Se muestra que el método es computacionalmente eficiente y adecuado a geometrías que provienen de aplicaciones del caos ondulatorio y microresonadores dieléctricos. En particular, resolvemos problemas diferenciales con condiciones de borde de tipo Dirichlet sobre dominios cuadrados con distribuciones de puntos casi-uniformes desarrollados en (Fornberg y Flyer, 2015a).

2. UN MÉTODO LOCAL INTEGRAL ESTABILIZADO BASADO EN FBR PARA ECUACIONES DE TIPO HELMHOLTZ

2.1. Desarrollo del Método Integral Local de Frontera y Dominio

Consideremos el PVC sobre un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u](\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}[u](\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1a) \\ (1b) \end{matrix}$$

donde $\mathcal{L}[\cdot] = \Delta + \lambda$ operador diferencial lineal elíptico de tipo Helmholtz, siendo $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ el operador laplaciano, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}[\cdot]$ operador de frontera con condiciones de borde (CB)

Asumimos que la EDP (1a) se puede reescribirse como

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})), \quad (2)$$

donde $u(\mathbf{x})$ es el potencial incógnita en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ y f una función suave. Las CB pueden ser de Dirichlet, de Neumann o mixtas

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = g_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} (3a) \\ (3b) \end{matrix}$$

con g_1 y g_2 datos conocidos y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\}$.

Consideramos $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\Delta u^* = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad (4)$$

donde $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ es la delta de Dirac centrada en $\xi \in \Omega$ con solución fundamental dada por

$$u^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad r = \|\mathbf{x} - \xi\|. \quad (5)$$

Partiendo de la Ec. (2) obtenemos

$$\Delta u(\mathbf{x}) = b \Leftrightarrow \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi) \Delta u(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi) b d\Omega_{\mathbf{x}}. \quad (6)$$

Aplicando la segunda identidad de Green para u que satisface (2) y u^* que satisface (4)

$$\int_{\Omega} (u^* \Delta u - u \Delta u^*) d\Omega_{\mathbf{x}} = \oint_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma_{\mathbf{x}}, \quad (7)$$

resulta

$$u(\xi) = \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, \xi) b d\Omega_{\mathbf{x}} - \oint_{\Gamma} \left[u^*(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} - u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} \right] d\Gamma_{\mathbf{x}}. \quad (8)$$

Partiendo de (8) tenemos una fórmula de representación integral de la EDP sobre una sub-región Ω_i con frontera Γ_i y ξ es el punto de colocación interior se obtiene como antes a partir de la solución fundamental y la segunda identidad de Green

$$u(\xi) = \int_{\Gamma_i} q^*(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} - \int_{\Gamma_i} u^*(\mathbf{x}, \xi) q(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} b u^*(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (9)$$

donde $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ la derivada normal del campo incógnita, u^* la solución fundamental del Laplaciano, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ la derivada normal de la solución fundamental.

Si usamos la conocida función de Green-Dirichlet (FGD), $G(\mathbf{x}, \xi)$, y su derivada normal $Q(\mathbf{x}, \xi)$ (Greenberg, 2015) en (9) obtenemos una nueva formulación integral de la forma

$$u(\xi) = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} b G(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (10)$$

dado que la integral sobre Γ_i que involucra G en (9) se anula dado que su valor es nulo. Si además el término no-homogéneo b de la EDP puede partirse

$$b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) - \lambda u(\mathbf{x}), \quad (11)$$

donde la función fuente f es conocida o dato.

La representación integral (10) en cada subregión de integración Ω_i es

$$u(\xi) = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \xi) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_i} -\lambda u(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

siendo ξ el punto fuente interior. La colocación se realiza solo en puntos interiores del dominio.

2.2. Interpolaciones locales con FBR

Una función $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una FBR si existe $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \quad (13)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana en \mathbb{R}^d y depende de la distancia a un centro $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^d$. Si depende del parámetro de forma $\varepsilon > 0$, suele notarse $\varphi_j^\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi(r, \varepsilon)$.

En el MILFD el campo u es interpolado localmente con FBR $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ con centros del estencil $\Theta_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad (14)$$

siendo la matriz de interpolación \mathbf{A}_i tal que $(\mathbf{A}_i)_{jk} = \varphi_k(\mathbf{x}_j) = \phi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|)$, $j, k = 1, \dots, n$.

El término b de (11) es interpolado con FBR $\{\chi_j\}_{j=1}^m$ con centros del estencil $\Theta_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^m$

$$\tilde{b}(u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \approx \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_j(\mathbf{x}), \quad (15)$$

siendo la matriz de interpolación $\tilde{\mathbf{A}}_i$ tal que $(\tilde{\mathbf{A}}_i)_{jk} = \chi_k(\mathbf{y}_j) = \chi(\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k\|)$, $j, k = 1, \dots, m$.

La formulación integral local de (12) queda de la forma

$$u(\xi) \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \xi) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}} \right\} + \sum_{j=1}^m \beta_j \left\{ \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \xi) \chi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}} \right\} + \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \xi) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}. \quad (16)$$

Si $\Theta = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ discretización del dominio Ω y $\xi = \mathbf{x}_i \in \Theta$ punto de colocación, la forma discretizada del campo desconocido es

$$u_i = u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{h}_{ij} + \sum_{j=1}^m \beta_j \tilde{g}_{ij} + \tilde{f}_i, \quad (17)$$

donde α_j y β_j provienen de las Ecs. (14) y (15). Los coeficientes \tilde{h}_{ij} , \tilde{g}_{ij} y \tilde{f}_i serán de la forma

$$\begin{cases} \tilde{h}_{ij} = \int_{\Gamma_i} Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \varphi_j(\mathbf{x}) d\Gamma_{\mathbf{x}}, & (18a) \\ \tilde{g}_{ij} = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \chi_j(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, & (18b) \\ \tilde{f}_i = \int_{\Omega_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}) d\Omega_{\mathbf{x}}, & (18c) \end{cases}$$

que se calculan por cuadraturas de Gauss-Legendre.

Llamando $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ y $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_m]^T$ coeficientes de interpolación, la forma discretizada (17) de u puede expresarse como

$$u_i = \tilde{\mathbf{h}}_i^T \alpha + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \beta + \tilde{f}_i, \quad (19)$$

siendo $\tilde{\mathbf{h}}_i = [\tilde{h}_{i1}, \dots, \tilde{h}_{in}]^T$, $\tilde{\mathbf{g}}_i = [\tilde{g}_{i1}, \dots, \tilde{g}_{im}]^T$ coeficientes de influencia y $\tilde{f}_i \in \mathbb{R}$ dato.

El vector α surge del sistema local interpolando con FBR $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$

$$\mathbf{A}_i \alpha = \mathbf{d}_i \Leftrightarrow \alpha = \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{d}_i \quad (20)$$

y el vector β surge del sistema local interpolando con FBR $\{\chi_j\}_{j=1}^m$

$$\tilde{\mathbf{A}}_i \beta = \tilde{\mathbf{b}}_i \Leftrightarrow \beta = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} (\mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \alpha) = \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} (\mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{d}_i), \quad (21)$$

siendo $\mathbf{A}_{\tilde{b}_i}$ la matriz de cálculo del vector $\tilde{\mathbf{b}}_i$ con coeficientes conocidos.

Reemplazando (20) y (21) en la forma discretizada (19), obtenemos la forma matricial discretizada para u_i en términos de \mathbf{d}_i

$$u_i = \left(\tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1} \right) \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i. \quad (22)$$

Reescribiendo (22) obtenemos un procedimiento algorítmico para evitar el cálculo de inversas \mathbf{A}_i^{-1} y $\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}$ (consultar (Ponzellini Marinelli, 2021a))

$$u_i = \mathbf{z}^T \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i \quad \text{donde } \mathbf{z}^T = \tilde{\mathbf{h}}_i^T \mathbf{A}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{A}_{\tilde{b}_i} \mathbf{A}_i^{-1}, \quad (23)$$

que se ensamblan en un sistema global tipo sparse y se resuelve numéricamente con GMRES.

2.3. Estabilidad con FBR gaussianas

La convergencia en interpolaciones globales con FBR ε -dependientes puede estudiarse de forma estacionaria ($n = cte.$ y $\varepsilon \rightarrow 0$) o no-estacionaria ($\varepsilon = cte.$ y se incrementa n). En el caso de las FBR gaussianas producen convergencia de orden $O(e^{-\frac{const}{(\varepsilon h)^2}})$ (superespectral).

La matriz de interpolación con FBR es

$$\mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \\ \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\|, \varepsilon) & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_2\|, \varepsilon) & \dots & \phi(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\|, \varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Cuando ε es chico, las FBRs se vuelven casi linealmente dependientes ('planas') formando una mala base de funciones y generando matrices de interpolación $\mathbf{A}(\varepsilon)$ mal condicionadas en un buen espacio de interpolación. Para evitar este problema en (Fornberg et al., 2011; Larsson et al., 2013) se desarrollaron técnicas numéricas que estabilizan las soluciones de los sistemas lineales donde las FBR que forman la matriz del sistema toman parámetros de forma arbitrariamente pequeños. El método FBR-QR desarrollado en para interpolaciones globales de datos dispersos usando FBR gaussianas resulta numéricamente estable para parámetros casi cero. La idea del algoritmo FBR-QR es cambiar la base $\{\phi_j\}$ a nueva base $\{\psi_j\}$ usando combinaciones de potencias polinómicas, polinomios de Chebyshev y funciones trigonométricas.

3. IMPLEMENTACIÓN DEL MILFD-EST

La nueva forma matricial para u de (22) en cada nodo resulta

$$u_i = \left(\mathbf{l}_i^T \mathbf{B}_i^{-1} + \tilde{\mathbf{l}}_i^T \tilde{\mathbf{B}}_i^{-1} \mathbf{B}_{\tilde{b}_i} \mathbf{B}_i^{-1} \right) \mathbf{d}_i + \tilde{f}_i, \quad (24)$$

donde $\mathbf{l}_i = [\dots, l_{ik}, \dots]^T$ y $\tilde{\mathbf{l}}_i = [\dots, \tilde{l}_{ik}, \dots]^T$ son los vectores columnas.

Para estenciles internos, la matriz local matriz de interpolación es

$$\mathbf{B}_{\psi}^i = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \tilde{\mathbf{R}}^T \end{bmatrix}, \quad (25)$$

siendo $(\mathbf{B}_{\psi}^i)_{jk} = \psi_k(\mathbf{x}_j)$ y $V_{jk} = V_k(\mathbf{x}_j)$ para $j, k = 1, \dots, n$.

Para estenciles frontera, la matriz local matriz de interpolación es \mathbf{B}^i tiene dos bloques,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\psi}^i \\ \mathbf{B}_{\mathcal{B}\psi}^i \end{bmatrix}, \quad (26)$$

siendo $(\mathbf{B}_{\psi}^i)_{jk} = \psi_k(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \dots, n_{int}$ (nodos interiores) y $k = 1, \dots, n$ (nodos frontera), $(\mathbf{B}_{\mathcal{B}\psi}^i)_{jk} = \mathcal{B}\psi_k(\mathbf{x}_j)$ para $j = n_{int} + 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, n$.

Para evitar el cálculo de \mathbf{B}_i^{-1} y $\tilde{\mathbf{B}}_i^{-1}$ mal condicionadas cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ seguimos un procedimiento algorítmico. La inclusión de esta técnica en el método integral local permite estabilizar el error numérico de la aproximación de las ecuaciones de tipo Helmholtz. Este Método Integral Local de Frontera y Dominio Estabilizado fue presentado en (Ponzellini Marinelli et al., 2021). Otra técnica de estabilidad puede consultarse en (Ponzellini Marinelli, 2021b).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección reportamos dos experiencias numéricas para mostrar la exactitud y eficiencia del esquema numérico propuesto para resolver ecuaciones de tipo Helmholtz en dos dimensiones. Las implementaciones y los experimentos numéricos fueron realizados usando el software de cálculo numérico MATLAB versión R2017a en una PC con 7.5 GB de RAM y una CPU Intel Core i7-7500U 7th Generación corriendo a 2.70GHz.

Los errores reportados son el error norma L_2 (Error- L_2)

$$\text{Error-}L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact} - u_i^{approx})^2}{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact})^2}} \quad (27)$$

y la raíz del error cuadrático medio (RECM):

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i^{exact} - u_i^{approx})^2}{N}}. \quad (28)$$

4.1. Prueba numérica 1

Esta EDP de tipo Helmholtz está dada sobre el dominio rectangular $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad (29)$$

siendo $f(x, y) = 2 \cos(x^2 + y) - (4x^2 + 1 + k^2) \text{sen}(x^2 + y)$ y el parámetro $k = 9$. Las CB de este PVC son de tipo Dirichlet siendo la solución analítica $u(x, y) = \text{sen}(x^2 + y)$. En nuestro caso, utilizaremos el método local integral presentado en su forma original con núcleos de FBR gaussianas $\phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$ (llamaremos MILFD) y en su forma estabilizada (MILFD-Est).

Existen varias formas de discretizar el dominio Ω con distribuciones de nodos. En nuestro caso usaremos el algoritmo de generación de distribuciones cuasi-uniformes desarrolladas en (Fornberg y Flyer, 2015a) para 2D. Estas distribuciones fueron creadas con un método rápido de tipo avance que genera un conjunto de nodos a partir de una función de densidad que comienza desde la frontera Γ hacia el interior del dominio.

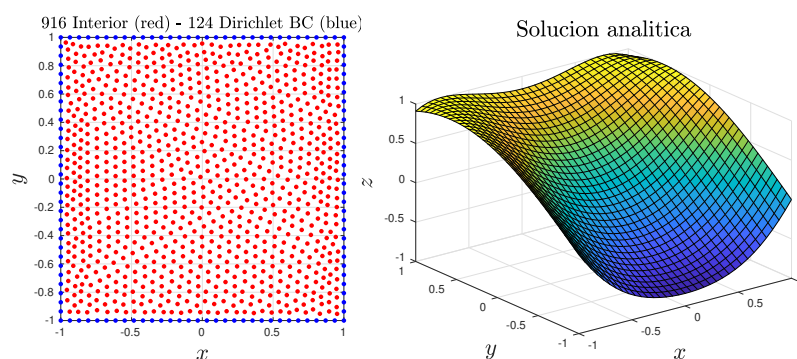


Figura 1: Distribución de los nodos cuasi-uniformes en el dominio 2D para $N_{int} = 916$ puntos interiores de colocación y $N_{fro} = 124$ frontera dato con condiciones de Dirichlet (izq.). Solución analítica del PVC (der.).

Comparamos el Error- L_2 de la formulación del MILFD y del MILFD-Est usando las FBRs gaussianas en las interpolaciones locales variando el parámetro de forma $\varepsilon \in [1, 10]$. En la Figura 2 se observa que en la medida que decrece ε , aumenta la exactitud pero se desestabiliza el MILFD y la convergencia es interrumpida tanto para el caso $N = 400$ y $N = 916$ nodos cuasi-uniformes. A su vez, observamos que en la medida que aumentamos la cantidad de nodos sobre el dominio y la frontera, los errores decrecen. Sin embargo, la mejor performance la obtiene el método local integral estabilizado para abordar esta ecuación de tipo Helmholtz con solución analítica conocida. El tamaño del estencil fue fijado en $n = 50$.

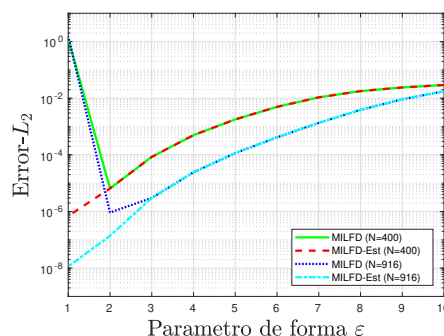


Figura 2: Comparación del Error- L_2 entre MILFD y MILFD-Est versus el parámetro de forma ε .

En la Figura 3 mostramos los contornos o isóneas del error $\log_{10}(\text{Error-}L_2)$ para dicho rango del parámetro de forma $[1, 10]$ y para distintos tamaños de estenciles $n = 10 : 10 : 100$. En la medida de aumenta n , los sistemas lineales aumentan empeorando el condicionamiento de las matrices de interpolación. Para entender la importancia de técnica de estabilidad local, ambas gráficas de esta figura deben observarse simultáneamente. La región amarilla arriba a la izquierda muestra la región de inestabilidad del error debido al mal condicionamiento numérico, mientras que en las isóneas de la gráficas de la derecha, la región azul oscura muestra como se pudo mantener en el orden 1×10^{-8} .

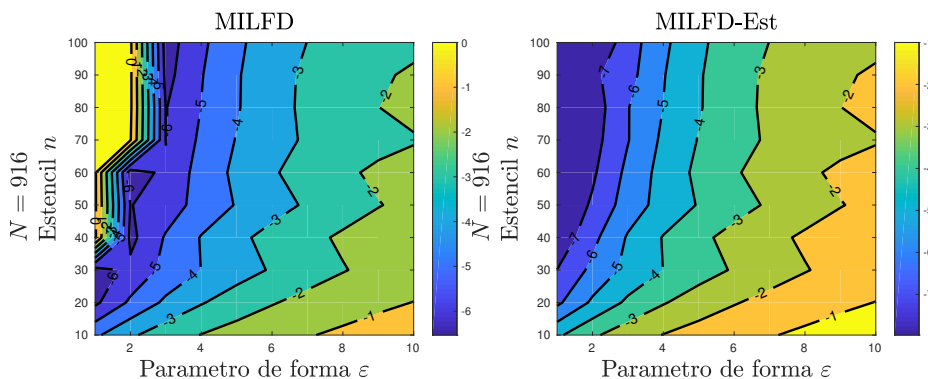


Figura 3: Isóneas de exactitud ($\log_{10}(\text{Error-}L_2)$) con $N_{int} = 916$ puntos interiores.

En (Mishra et al., 2019) se trabaja esta misma EDP de tipo Helmholtz con CB de tipo mixtas. En dicho trabajo se puede observar que para $N = 900$ nodos se alcanza 1×10^{-5} utilizando la técnica de Radial Basis Function - Finite Difference (RBF-FD) usando un núcleo híbrido de la gaussiana de tipo $\phi(r) = \alpha e^{-(\epsilon r)^2} + \beta r^3$.

4.2. Prueba numérica 2

Consideremos la siguiente ecuación de Helmholtz bidimensional

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) + 2u(x, y) = 2x - 4y, & \text{en } \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, y) = g(x, y), & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{30}$$

donde la solución exacta viene dada por $u(x, y) = \text{sen}(\sqrt{3}x)\text{senh}(y) + \text{cos}(\sqrt{2}y) + x - 2y$, y $g(x, y)$ es elegida de manera que coincida con la exacta dando así CB de tipo Dirichlet. Usamos puntos cuasi-uniformes en el interior del dominio y estenciles de tamaño $n = 25$ contando el centro de colocación como se muestra en la Figura 4.

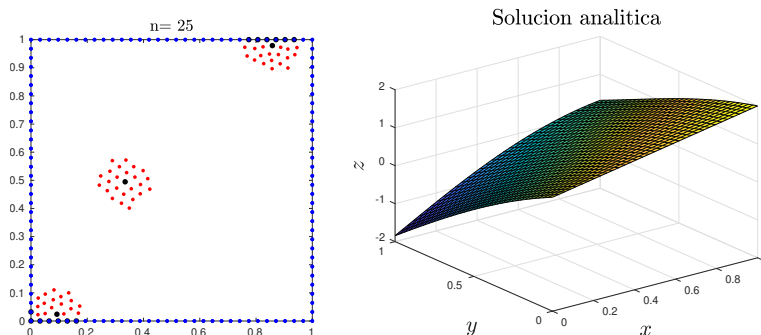


Figura 4: Estenciles de $n = 25$ nodos cuasi-uniformes (izq.). Solución analítica del PVC (der.).

En la Tabla 1 mostramos la exactitud del MILFD-Est para el parámetro de forma $\varepsilon = 1$ y para un rango de valores bajos, $\varepsilon \in \{1 \times 10^0, 1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-2}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-5}\}$. La cantidad de puntos de tipo cuasi-uniformes interiores del dominio, N , varía de 121 a 900. Se puede observar que para $\varepsilon = 1$ fijado, los órdenes de magnitud decrecen de 1×10^{-6} a 1×10^{-8} a partir de 441 nodos. A su vez, se observa la convergencia del método para valores bajos del parámetro de forma alcanzando RECM del orden 1×10^{-8} a partir de 225 nodos. El ε mostrado es donde se alcanza el mejor error en ese rango.

N	MILFD-Est		MILFD-Est	
	ε	RECM	ε bajo	RECM
121	1.0	1.2028E-06	0.1	2.1405E-07
225	1.0	5.8570E-07	0.1	5.0834E-08
361	1.0	3.9338E-07	0.01	3.3821E-08
441	1.0	7.8581e-08	0.1	3.3866E-08
530	1.0	5.2907E-08	0.00001	3.5984E-08
625	1.0	4.3843E-08	0.00001	3.6887E-08
900	1.0	4.5260E-08	0.01	4.3214E-08

Tabla 1: RECM para el MILFD-Estabilizado para parámetros de forma bajos.

En (Lin et al., 2012) se investiga este problema diferencial con CB mixtas sobre el mismo dominio utilizando núcleos de FBR Multicuádradas $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ y una nueva FBR con $N \in [50, 350]$ puntos de colocación. Los resultados obtenidos en dicha referencia alcanzan errores del orden 1×10^{-5} para $\varepsilon \in [0, 4]$.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvieron resultados numéricos para ecuaciones de tipo Helmholtz utilizando un método local integral estabilizado que utiliza interpolaciones con FBR gaussianas. Dicho método no depende de un mallado por tanto se puede adaptar fácilmente a problemas con geometrías complejas provenientes de . Se ha mostrado la buena performance del método con buenos resultados como se muestra en las pruebas numéricas 1 y 2 comparando con otros resultados de la literatura. En la prueba 1 se muestra la ventaja de utilizar el MILFD-Estabilizado para encontrar regiones de convergencia del Error- L_2 del orden 1×10^{-8} cuando el parámetro de forma tiende a cero. En la prueba 2, se estudia un rango del parámetro de forma bajo alcanzando el mismo orden del RECM. Habiendo investigado la eficacia computacional del método, el trabajo futuro consiste en abordar algunas aplicaciones en caos ondulatorio y microresonadores dieléctricos, el cual resulta adecuado para tratar geometrías que provienen de dominios arbitrarios sin soluciones analíticas.

REFERENCIAS

- Brebbia C. y Dominguez D. *Boundary Elements. An Introductory Course. 2nd Ed.* WIT Press, Computational Mechanics Publications, Southampton y Boston, 1998.
- Cao H. y Wiersig J. Dielectric microcavities: Model systems for wave chaos and non-hermitian physics. *Reviews of Modern Physics*, 87:61–111, 2015.
- Fasshauer G. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB.* World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, USA, 2007.

- Fornberg B. y Flyer N. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations. *Computers and Mathematics with Applications*, 69:531–544, 2015a.
- Fornberg B. y Flyer N. *A Primer on Radial Basis Functions with Applications to the Geosciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2015b.
- Fornberg B., Larsson E., y Flyer N. Stable Computations with Gaussian Radial Basis Functions. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 33:869–892, 2011.
- Greenberg M. *Applications of Green's Functions in Science and Engineering*. Dover Publications, Mineola, New York, 2015.
- Larsson E., Lehto E., Heryudono A., y Fornberg B. Stable Computation of Differentiation Matrices and Scattered Node Stencils on Gaussian Radial Basis Functions. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 35:A2096–A2119, 2013.
- Lin J., Chen W., y Sze K. A new radial basis function for helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(12):1923–1930, 2012. ISSN 0955-7997.
- Mishra P.K., Fasshauer G.E., Sen M.K., y Ling L. A stabilized radial basis-finite difference (RBF-FD) method with hybrid kernels. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(9):2354–2368, 2019.
- Partridge P., Brebbia C., y Wrobel L. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications co-published with Elsevier Applied Science, Southampton Boston, 1992.
- Ponzellini Marinelli L. Estabilidad numérica de un método local integral basado en funciones de base radial para problemas de valores de contorno. *Universidad Nacional de Rosario*, 2021:164 páginas, 2021a.
- Ponzellini Marinelli L. Stabilizing radial basis functions techniques for a local boundary integral method. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 64:in press, 2021b.
- Ponzellini Marinelli L., Caruso N., y Portapila M. A stable computation on local boundary-domain integral method for elliptic PDE. *Mathematics and Computers in Simulation*, 180:379–400, 2021.
- Schaback R. Error estimates and condition numbers for Radial Basis Function interpolants. *Advances in Computational Mathematics*, 3:251–264, 1995.
- Trefethen L. *Spectral Methods in Matlab*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2000.
- Wiersig J. Boundary element method for resonances in dielectric microcavities. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 5:53–60, 2003.