

## ANÁLISIS MODAL DE UNA PLATAFORMA FLEXIBLE TIP-TILT-PISTON UTILIZANDO TEORÍA DE HELICOIDES

### MODAL ANALYSIS OF A TIP-TILT-PISTON FLEXIBLE PLATFORM USING SCREW THEORY

Martín A. Pucheta<sup>a,b</sup> y Alejandro G. Gallardo<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, {agallardo,mpucheta}@frc.utn.edu.ar, <http://ciiii.frc.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras clave:** Mecanismos de precisión, Mecanismos flexibles, Teoría de Helicoides, Análisis Modal.

**Resumen.** Los mecanismos flexibles pueden interpretarse como cuerpos rígidos vinculados por elementos flexibles. Cuando estos mecanismos carecen de pares cinemáticos son de gran precisión debido a que el movimiento es consecuencia de la deformación de sus elementos flexibles. Para ciertas aplicaciones, los mecanismos deben cumplir especificaciones dinámicas, por ejemplo, que las frecuencias de resonancia estén acotadas en cierto rango de valores. Es por ello, que en la etapa de diseño del mecanismo debe realizarse un análisis modal de los mismos. En este trabajo se analiza un mecanismo de 3 grados de libertad del tipo tip-tilt-piston restringido con elementos flexores del tipo viga. La descripción del movimiento del mecanismo, tanto de los cuerpos rígidos como de los elementos flexibles, es abordada por medio de la Teoría de Helicoides (Screw Theory). Los resultados analíticos obtenidos mediante Teoría de Helicoides son comparados con resultados de análisis por elementos finitos.

**Keywords:** Precision mechanisms, Flexible mechanisms, Screw Theory, Modal Analysis.

**Abstract.** Flexible mechanisms can be interpreted as rigid bodies linked by flexible elements. When these mechanisms lack of kinematic pairs, they are of high precision because of the movement is a consequence of the deformation of their flexible elements. For certain applications, the mechanisms must meet dynamic specifications, for example, the resonance frequencies must belong to certain range of values. Therefore, a modal analysis of the mechanism must be done at the early design stage. In this work, a 3-degree-of-freedom mechanism of the tip-tilt-piston type constrained by flexures of the beam type is analyzed. The description of the movement of the mechanism, both of the rigid bodies and of the flexible elements, is approached by means of the Screw Theory. The analytical results obtained by Screw Theory are compared with the results of finite element analysis.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de mecanismos flexibles de precisión con pequeños desplazamiento se utilizan los mismos métodos y herramientas numéricas disponibles para el diseño estructural. En general, se diseña a una plataforma rígida restringida por elementos flexibles. A diferencia del diseño es estructural (Géradin y Rixen, 2015), el desafío en los mecanismos es que la meta es obtener alta precisión tanto en los movimientos deseados relacionados a las flexibilidades de la estructura como a los movimientos que se restringen y sus rigideces asociadas.

El formalismo de la Teoría de Helicoides (Ball, 1900) permite integrar en forma intuitiva las etapas de diseño conceptual, la síntesis y el análisis, permitiendo trabajar con mecanismos tridimensionales y realizando manipulaciones de álgebra lineal de sólida base matemática. Esta teoría permite partir de los movimientos deseados, establecer un espacio de movimiento y utilizando álgebra lineal, determinar el espacio de restricción (Hopkins, 2010; Gallardo y Pucheta, 2018; Pucheta y Gallardo, 2021). Este espacio de restricción, que tiene una expresión matemática bien definida (Su y Tari, 2011), debe materializarse físicamente mediante el uso de las Reglas de Blanding (1999) y elementos de viga. Los elementos de viga, también pueden combinarse para formar elementos restrictores de lámina. Además, se pueden diseñar plataformas rígidas intermedias generando mecanismos híbridos serie y paralelo para desacoplar actuaciones o para reducir errores parasitarios (Hao y Kong, 2013; Hopkins et al., 2017).

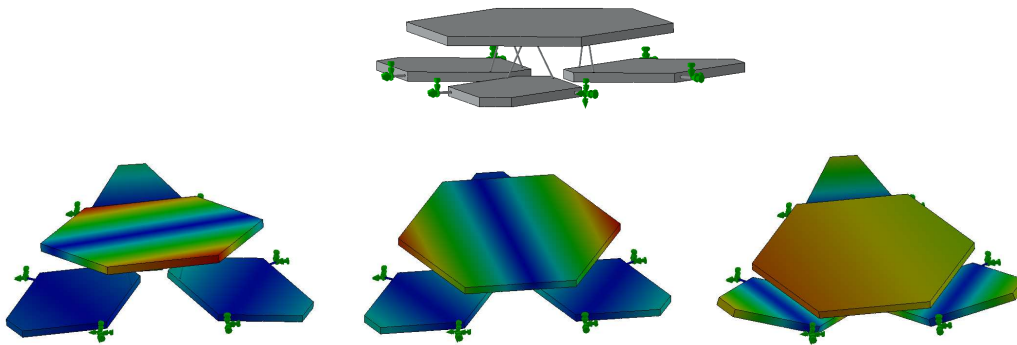


Figura 1: Mecanismo para microespejo hexagonal (arriba) y movimientos de tip, tilt y piston (abajo), adaptado de Hopkins et al. (2017)

En este trabajo se muestra cómo realizar el análisis modal de mecanismos flexibles utilizando helicoides, en particular, para un mecanismo con 3 grados de libertad del tipo tip-tilt piston consistiendo de 2 rotaciones ortogonales y una traslación perpendicular al plano que forman ambas rotaciones, también denotado como plataforma RRT (Hao y He, 2017; Hopkins et al., 2017; Song et al., 2018). Este tipo de mecanismo se utiliza en micro opto mecánica para mover microespejos con aplicación a la desviación de luz láser. En la Figura 1 se reproduce y se simulan los 3 grados de libertad del mecanismo de un microespejo diseñado por Hopkins et al. (2017), en donde la plataforma hexagonal que soporta al espejo es restringida por 6 elementos flexores que son actuados por 3 peines electrostáticos de forma romboidal. Existen numerosas aplicaciones de estos mecanismos RRT por lo que es de vigente interés explorar el espacio de soluciones nuevas y evaluar los méritos de cada diseño (Gallardo y Pucheta, 2021). Uno de los requerimientos más importantes de estos diseños son las frecuencias naturales. Para ello, se exploran metodologías numéricas para el análisis modal expresadas en el formalismo de la teoría de helicoides.

La descripción de vigas y su análisis modal en términos de helicoides es relativamente reciente. Selig y Ding la han realizado para la viga de Euler-Bernoulli (Selig y Ding, 2001) y posteriormente para la viga de Timoshenko (Selig y Ding, 2009, 2010; Ding y Dai, 2010). El estudio de plataformas paralelas bajo este formalismo es reciente y de gran relevancia principalmente para integrarlo en la etapa de diseño preliminar (Pucheta y Gallardo, 2022).

## 2. MÉTODOS

Previo a describir la formulación de vigas se resumirán las bases de la teoría de helicoides.

### 2.1. Teoría de Helicoides

Una línea en el espacio se puede representar por su vector dirección  $s$  y el vector momento  $s_0 = r \times s$  que es el producto vectorial entre el vector posición desde el origen a un punto cualquiera de la línea y su dirección; la línea se puede representar por un par de vectores como  $(s; s_0)$ ; ver Figura 2. En el helicoide (Ball, 1900), al vector momento de la línea se le suma una traslación  $hs$  en la dirección  $s$  del helicoide, donde el escalar  $h$  es el paso y su momento es  $s^0 = s_0 + hs$ .

$$\$ = \begin{bmatrix} s \\ s^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 + hs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix}$$

entonces, el helicoide  $\$$ , es un vector de dimensión seis y está formado por dos vectores de dimensión tres  $\$ = (s; s^0)$ ; básicamente consiste de una línea dotada de un paso. Una línea cumple que  $s \cdot s^0 = 0$  mientras que en un helicoide  $s \cdot s^0 \neq 0$ . El paso se puede calcular como  $h = (s \cdot s^0)/(s \cdot s)$  cuando  $s \neq 0$ . Cuando  $s = 0$  el paso es infinito y el helicoide permite representar una traslación pura o bien un momento puro, dependiendo de su empleo.

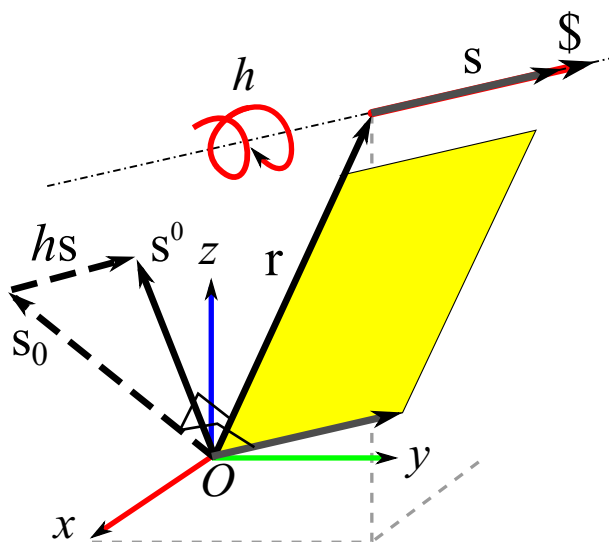


Figura 2: Una línea se representa por  $l = (s; s_0)$  y un helicoide  $\$ = (s; s^0)$ .

La nomenclatura para un helicoide de desplazamiento o *twist* es

$$T = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ c \times \Delta\theta + p\Delta\theta \end{bmatrix}$$

donde, el vector  $\Delta\theta$  es el desplazamiento rotacional,  $\delta$  es el desplazamiento traslacional o lienal,  $c$  es el vector de localización y  $p$  es el paso del twist.

El cambio de coordenadas de un helicoides de movimiento se realiza mediante la premultiplicación por la matriz de transformación  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}$$

que es un elemento de la representación adjunta del grupo Especial Euclideo SE(3) y está definida por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{D}\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{O}_3 \\ -\mathbf{R}^T\mathbf{D} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{R}$  es la matriz de rotación,  $\mathbf{D}$  es la matriz antisimétrica de desplazamiento,  $\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{d} \times \mathbf{v}$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . La transformación inversa  $\mathbf{H}^{-1}$  se define también en términos de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{D}$ .

La nomenclatura para un helicoides de fuerza o *wrench* es

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{f} + q\mathbf{f} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerza,  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector momento,  $\mathbf{r}$  el vector de localización y el paso del wrench es  $q = (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}) / (\mathbf{f} \cdot \mathbf{f})$ .

## 2.2. Helicoides de deflexión

En la viga de Euler-Bernoulli se asumen que las secciones transversales se mantienen ortogonales a la línea neutra y se mantienen planas (indeformables). Las secciones pueden rotar con respecto a su centroide. La viga se considera originalmente recta y se analizará su deflexión en términos de helicoides (Selig y Ding, 2009, 2010; Ding y Dai, 2010) siguiendo la descripción cinemática que se muestra en la Figura 3.

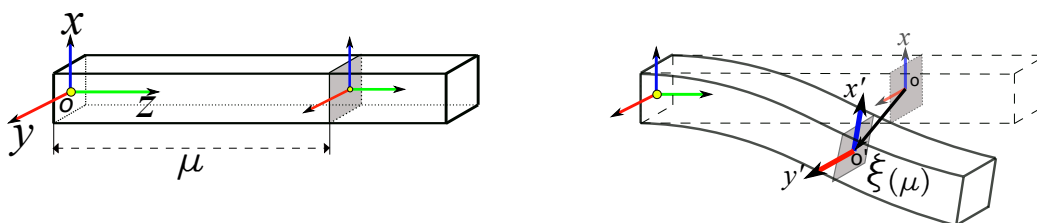


Figura 3: Descripción cinemática de una viga de Euler-Bernoulli en términos de helicoides.

Se coloca una terna en el centroide de la sección transversal localizado en la línea neutra

$$\mathbf{P}_o = [0, 0, \mu]^T = \mu \hat{\mathbf{k}}$$

con eje  $z$  tangente a dicha línea y ejes  $x$  e  $y$  coincidentes con los ejes principales de la sección transversal. La sección en el extremo de la viga con coordenada  $\mu = 0$  está empotrada y la que tiene coordenada  $\mu = L$  está libre o bien, está actuada por un wrench.

El helicoides de desplazamiento del centroide se puede obtener mediante la aplicación del Teorema de Chasles, es decir, mediante la composición de una rotación pura  $\boldsymbol{\xi}_\theta(\mu)$  y de una traslación pura  $\boldsymbol{\xi}_\delta(\mu)$ , que en helicoides infinitesimales son aditivos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}_\theta(\mu) + \boldsymbol{\xi}_\delta(\mu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \\ &= [\theta_x, \theta_y, \theta_z | \delta_x, \delta_y, \delta_z]^T \end{aligned}$$

Para determinar la variación del helicoide de deflexión  $\xi$  a lo largo de la viga, primero debe expresarse en un marco global

$$\bar{\xi}_\mu = \mathbf{H}^{-1}\xi(\mu) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_{(\mu)} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix}$$

Una vez derivado  $\bar{\xi}$  con respecto al parámetro  $\mu$  se lo expresa en coordenadas locales nuevamente

$$\xi'(\mu) = \mathbf{H} \cdot \frac{d\bar{\xi}_\mu}{d\mu}$$

Las ecuaciones de equilibrio local para un elemento  $d\mu$  ubicado en la coordenada  $\mu$  de la viga de Euler Bernoulli, con efectos desacoplados de extensión, flexión y torsión, se pueden plantear como

$$\frac{d}{d\mu}\delta_z(\mu) = \frac{F_z}{EA}; \quad \frac{d}{d\mu}\theta_x(\mu) = \frac{M_x}{EI_x}; \quad \frac{d}{d\mu}\theta_y(\mu) = \frac{M_y}{EI_y}; \quad \frac{d}{d\mu}\theta_z(\mu) = \frac{M_z}{GJ_z}$$

donde  $E$  y  $G$  son, respectivamente, el módulo de Young y de elasticidad transversal del material,  $A$ ,  $I_x$  e  $I_y$ , y  $J_z$  son respectivamente, el área, los momentos de inercia de área y el momento de inercia polar de la sección transversal. Estas ecuaciones de equilibrio se pueden poner en la forma

$$d\delta_z(\mu) = \frac{d\mu}{EA}F_z; \quad d\theta_x(\mu) = \frac{d\mu}{EI_x}M_x; \quad d\theta_y(\mu) = \frac{d\mu}{EI_y}M_y; \quad d\theta_z(\mu) = \frac{d\mu}{GJ_z}M_z$$

e identificarlas con la ecuación de equilibrio que relaciona la wrench y el diferencial de helicoide de deflexión

$$d\xi(\mu) = \mathbf{c}(d\mu) \cdot \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde la wrench es  $\mathbf{W} = [\mathbf{f}^T | \mathbf{m}^T]^T = [F_x, F_y, F_z | M_x, M_y, M_z]^T$  es conmutada en el orden de sus vectores de fuerza y momento mediante el operador de intercambio

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Además, se define a la matriz densidad de flexibilidad como

$$\mathbf{c} = \text{diag} \left( \frac{d\mu}{EI_x}, \frac{d\mu}{EI_y}, \frac{d\mu}{GJ_z}, 0, 0, \frac{d\mu}{EA} \right) = \mathbf{c}^* d\mu = \text{diag} \left( \frac{1}{EI_x}, \frac{1}{EI_y}, \frac{1}{GJ_z}, 0, 0, \frac{1}{EA} \right) d\mu \quad (2)$$

Para el caso de una viga de Timoshenko, que tiene en cuenta los efectos de tensiones y deformaciones cortantes, los elementos nulos en la diagonal de la ecuación (2) se reemplazan por  $c_{44} = a_x GA$  y  $c_{55} = a_y GA$ , donde las constantes  $a_x$  y  $a_y$  dependen de la forma de la sección, por ejemplo, para una sección circular valen  $a_x = a_y = 2/3$ .

Cambiando de coordenadas al diferencial de deflexión y a la wrench en la ecuación (1) se obtiene

$$\mathbf{H}^{-1}d\xi(\mu) = \mathbf{c}(d\mu) \cdot \mathbf{QH}^{-1}\mathbf{W}$$

se la puede integrar miembro a miembro a lo largo de la viga o elemento como

$$\int_0^L d\xi(\mu) = \left[ \int_0^L \mathbf{H} \cdot \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}^{-1} d\mu \right] \mathbf{W} \quad (3)$$

para obtener la expresión lineal del helicoides de deflexión para diferentes condiciones de borde del elemento de viga en coordenadas locales de una terna ubicada en un extremo de la viga

$$\xi = \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}$$

### 2.3. Matriz de Rigidez de un elemento flexor tipo viga

El elemento de viga posee 6 grados de libertad en cada extremo.

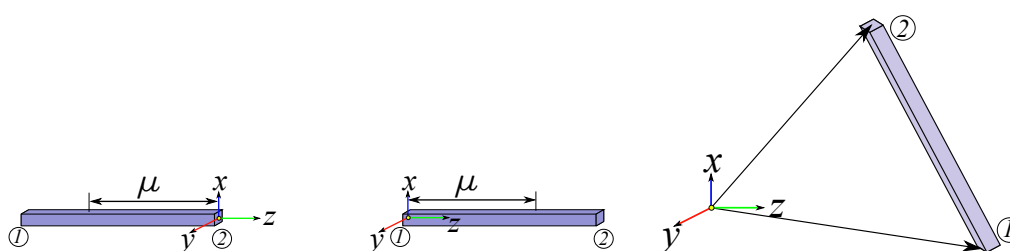


Figura 4: Ternas locales para la integración de las flexibilidades  $C_{22}$  (izq.) y  $C_{11}$  (medio), y referenciación a una terna global para una orientación arbitraria del elemento (der.)

Utilizando la ecuación (3) y el esquema mostrado en la Figura 4, aplicando el principio de superposición y el principio de reciprocidad de Maxwell, se la puede integrar para obtener las flexibilidades directas

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & L^2/2EI & 0 & L^3/3EI & 0 & 0 \\ -L^2/2EI & 0 & 0 & 0 & L^3/3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L/AE \\ L/EI & 0 & 0 & 0 & -L^2/2EI & 0 \\ 0 & L/EI & 0 & L^2/2EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/GJ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -L^2/2EI & 0 & L^3/3EI & 0 & 0 \\ L^2/2EI & 0 & 0 & 0 & L^3/3EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L/AE \\ L/EI & 0 & 0 & 0 & L^2/2EI & 0 \\ 0 & L/EI & 0 & -L^2/2EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L/GJ & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, mediante una transformación adjunta de traslación en SE(3) se obtienen las flexibilidades cruzadas  $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{21}^T$ , de modo que se obtiene la relación deflexión-fuerza para el elemento en términos de helicoides

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Claramente, la relación puede invertirse para obtener la forma de fuerza en función de la deflexión a través de la matriz de rigidez. Denotando con una barra arriba a los helicoides en

coordenadas globales, la ecuación (4) en coordenadas de una terna global ubicada en el punto a mover (que convenientemente puede elegirse centrado en el cuerpo de la plataforma o bien centrado en su superficie superior) resulta en

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_1 \\ \bar{\mathbf{W}}_2 \end{bmatrix}$$

La numeración de entidades deben realizarse mediante un mapeo de la numeración global a local del mismo modo que se procede en el método de la rigidez o en el método de los elementos finitos, para así lograr un correcto ensamble de las ecuaciones y su reducción una vez que se apliquen las condiciones de contorno.

Para el análisis modal se sigue la metodología presentada por Pucheta y Gallardo (2022), en donde se considera una matriz de masa concentrada en cada extremo de la viga, correspondiendo la mitad de la masa de la viga a cada nodo y la mitad de la inercia a la rotación alrededor del eje de la viga, en este caso es el eje  $z$ . La matriz de masa de un nodo del elemento resulta en

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\rho AL \text{diag} \left( 1, 1, 1, \alpha 2L^2, \alpha 2L^2, \frac{J_z}{A} \right) \quad (5)$$

donde,  $\rho$  es la densidad del material de la viga,  $A$  es el área y  $J_z$  el momento de inercia polar de la sección transversal, y  $L$  es la longitud de la viga. Se toma un  $\alpha = 1/24$  que evita que la matriz de masa sea singular. Con esto, la segunda ley de Newton para el elemento se expresa como

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{Q}$  es el operador de intercambio. Cambiando a los helicoides de aceleración y wrench a ejes globales a través de las matrices adjuntas de cambio de coordenadas  $\mathbf{H}$ , se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m\mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\xi}}_1 \\ \ddot{\bar{\xi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_1 \\ \bar{\mathbf{W}}_2 \end{bmatrix}$$

o, en forma más compacta, con matrices de masa globales

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\xi}}_1 \\ \ddot{\bar{\xi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{W}}_1 \\ \bar{\mathbf{W}}_2 \end{bmatrix}$$

Las matrices de masa y de rigidez elementales se ensamblan dependiendo de la topología del mecanismo (en este caso se suman porque las vigas trabajan en paralelo) en las matrices respectivas en coordenadas globales  $\mathbf{K}_G$  y  $\mathbf{M}_G$ . Para una ecuación de equilibrio homogénea

$$\mathbf{M}_G \cdot \ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

y movimientos armónicos pequeños, se debe cumplir que

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_G + \mathbf{K}_G) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$$

y del problema de autovalores generalizado resultante se determinan propiamente, los autovalores (frecuencias naturales) y autovectores (modos).

### 3. RESULTADOS

El mecanismo paralelo del tipo tipo-tilt-piston a analizar consiste de tres grupos de dos vigas que se dimensionan para generar el espacio de restricción de una plataforma con 3 grados de libertad (Gallardo y Pucheta, 2021). Siguiendo la ubicación de la terna mostrada en la Figura 5, los movimientos deseados son  $R_x$  (tip),  $R_y$  (tilt) y  $T_z$  (piston).

La geometrías de los cuerpos rígidos a vincular tienen por dimensiones características a  $r_1 = 17,5$  mm,  $r_2 = 67,5$  mm y  $h = 10$  mm; ver Figura 5(a). Las vigas que satisfacen el espacio de restricción tienen sección circular de un diámetro de 1 mm y se separan angularmente  $120^\circ$ ; ver Figura 5(b). Cada grupo de dos vigas paralelas se separa una distancia  $d = 10$  mm. El material del mecanismo es aluminio, cuyo módulo de Young es  $E = 69GPa$  y el módulo de elasticidad transversal es  $G = 25GPa$ .

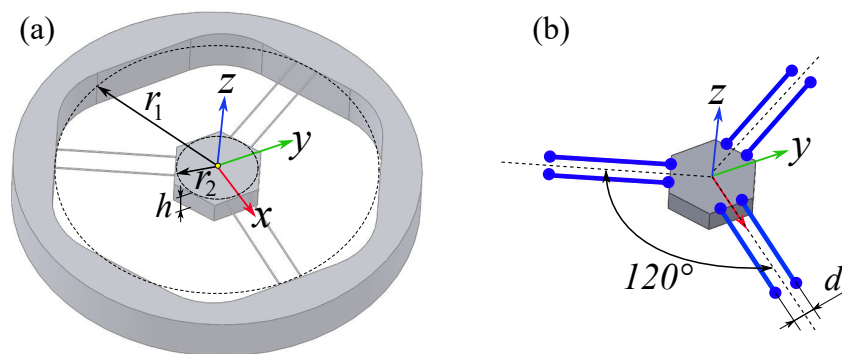


Figura 5: (a) Descripción geométrica de la plataforma y del cuerpo fijo. (b) esquema de vigas que restringen a la plataforma

La Tabla 1 muestra los resultados de los autovalores o frecuencias naturales ignorando las masas de las vigas y corresponden a los modos que se muestran en la Figura 6.

Movimiento	Análítico / Helicoides $\left[\frac{rad}{s}\right]$	MEF $\left[\frac{rad}{s}\right]$	error %
$T_z$ (piston)	93,438	94,947	-1,5893
$R_x$ (tip)	319,28	292,08	9,3125
$R_y$ (tilt)	319,8	292,43	9,3595
$R_z$ (restringido)	3460	3400	1,7647

Tabla 1: Resultados de las frecuencias naturales analíticos utilizando Teoría de Helicoides vs MEF y su error porcentual.

Se puede observar que para los modos de traslación y rotación alrededor del eje  $z$  el error entre el resultado analítico y el obtenido con la simulación por elementos finitos es menor al 2% mientras que es de un 9,4% para los modos de vibrar de las rotaciones de tip y tilt. En futuros trabajos se evaluará de qué modo se pueden reducir estos errores.

Nótese además que el cuarto modo de vibrar, que es la rotación alrededor de  $z$  tiene una frecuencia de un orden superior a los movimientos de rotación en  $x$  e  $y$ , de modo que se cumple el objetivo de que el mecanismo debe ser flexible en los movimientos deseados y rígido en los movimientos restringidos.



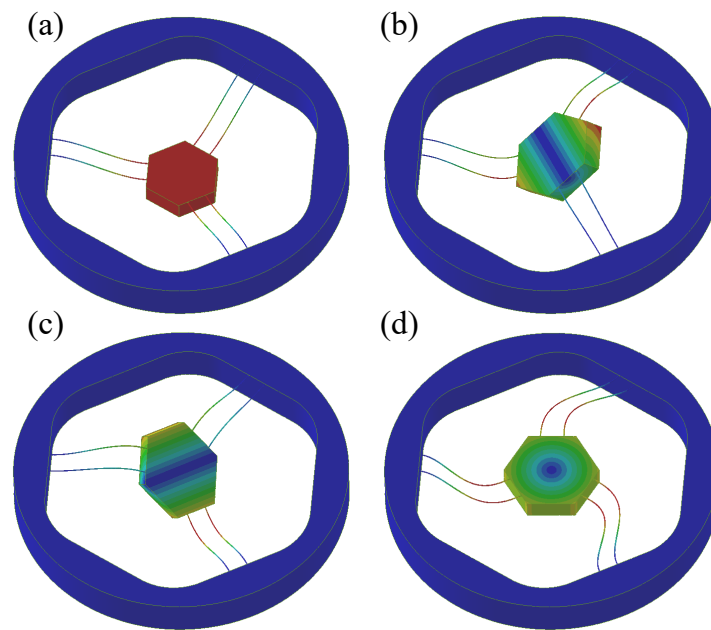


Figura 6: Modos de vibración de los movimientos deseados (a, b, c) y uno de los movimientos restringidos (d)

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el análisis modal de mecanismos flexibles tridimensionales de precisión con aplicación a un mecanismo de 3 grados de libertad de tipo tip-tilt piston. Se realizó un análisis modal válido para pequeños desplazamientos y deformaciones formulado en términos de helicoides permitiendo la integración del análisis modal con el proceso de diseño conceptual y la síntesis.

Mediante experimentos numéricos se determinó cuándo la masa puede ser despreciada con respecto a la masa de la plataforma de los mecanismos. Los resultados obtenidos con el método propuesto fueron validados con el método de los elementos finitos y su exactitud fue aceptable y de ejecución más rápida que el MEF.

A futuro se integrará esta metodología en la determinación de parámetros óptimos de los flexores.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento de la Universidad Tecnológica Nacional por el proyecto UTN-PID 7918 y al CONICET por la beca doctoral de A.G. Gallardo.

#### REFERENCIAS

- Ball R.S. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edición, 1900. (originally published in 1876 and revised by the author in 1900, now reprinted with an introduction by H. Lipkin and J. Duffy).
- Blanding D.L. *Exact constraint: Machine design using kinematic principles*. ASME Press, New York, 1999.
- Ding X. y Dai J. Compliance analysis of mechanisms with spatial continuous compliance in the context of Screw Theory and Lie groups. *Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science*, 224(11):2493–2504, 2010. doi:10.1243/09544062JMES2095.
- Gallardo A.G. y Pucheta M. Synthesis of a tip-tilt-piston flexure system with decoupled actua-

- tors. En M. Pucheta, A. Cardona, S. Preidikman, y R. Hecker, editores, *Multibody Mechatronic Systems: MUSME 2021*, volumen 110 de *Mechanisms and Machine Science*, páginas 3–12. Springer, Cham, 2021.
- Gallardo A.G. y Pucheta M.A. Synthesis of precision flexible mechanisms using screw theory and beam constraints. *Int. J. of Mechanisms and Robotic Systems*, 4(4):277–204, 2018.
- Gérardin M. y Rixen J.D. *Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, UK, 3 edición, 2015. ISBN 978-1-118-90020-8.
- Hao G. y He X. Designing a monolithic tip-tilt-piston flexure manipulator. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 17(4):871–879, 2017. ISSN 1644-9665. doi:<https://doi.org/10.1016/j.acme.2017.04.003>.
- Hao G. y Kong X. A normalization-based approach to the mobility analysis of spatial compliant multi-beam modules. *Mechanism and Machine Theory*, 59:1 – 19, 2013. doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.08.013>.
- Hopkins J. *Design of Flexure-based Motion Stages for Mechatronic Systems via Freedom, Actuation and Constraints Topologies (FACT)*. Tesis de Doctorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2010.
- Hopkins J.B., Panas R.M., Song Y., y White C.D. A high-speed large-range tip-tilt-piston micromirror array. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 26(1):196–205, 2017. doi:10.1109/JMEMS.2016.2628723.
- Pucheta M. y Gallardo A. Análisis modal de una plataforma flexible 2R utilizando Teoría de Helicoides, 2022. Aceptado para ser presentado en el XV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica - CIBIM 2022, 22-24 de noviembre de 2022, Madrid, España.
- Pucheta M. y Gallardo A.G. Synthesis of hybrid flexible mechanisms using beams and spatial design constraints. En M. Pucheta, A. Cardona, S. Preidikman, y R. Hecker, editores, *Multibody Mechatronic Systems: Proceedings of the MUSME Conference in 2020*, volumen 94 de *Mechanisms and Machine Science*, páginas 47–56. Springer, Cham, 2021.
- Selig J.M. y Ding X. A screw theory of static beams. En *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, página 2544–2550. Maui, HI, 2001.
- Selig J.M. y Ding X. A screw theory of Timoshenko beams. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 76(3):031003, 2009. doi:10.1115/1.3063630.
- Selig J.M. y Ding X. Screw theoretic view on dynamics of spatially compliant beam. *Appl. Math. Mech.-Engl.*, 31:1173–1188, 2010. doi:10.1007/s10483-010-1351-9.
- Song Y., Panas R.M., y Hopkins J.B. A review of micromirror arrays. *Precis. Eng.*, 51:729–761, 2018. doi:10.1016/j.precisioneng.2017.08.012.
- Su H. y Tari H. On line screw systems and their application to flexure synthesis. *ASME J. Mech. Rob.*, 3(1):011009 (7 pages), 2011.