

## SIMULADOR BIFÁSICO BIDIMENSIONAL DEL DESPLAZAMIENTO DE PETRÓLEO POR AGUA

María de los Á. Morelli<sup>a</sup>, Marina L. Fusari<sup>b</sup> y Gabriela B. Savioli<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Laboratorio de Ingeniería de Reservoirios, Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires-CONICET, Pabellón de Industrias, Ciudad Universitaria, 1428 Ciudad de Buenos Aires, Argentina [morelli@di.fcen.uba.ar](mailto:morelli@di.fcen.uba.ar)

<sup>b</sup>Laboratorio de Ingeniería de Reservoirios, Departamento de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Pabellón de Industrias, Ciudad Universitaria, 1428 Ciudad de Buenos Aires, Argentina, [marinafusari@di.fcen.uba.ar](mailto:marinafusari@di.fcen.uba.ar), [gsavioli@di.fcen.uba.ar](mailto:gsavioli@di.fcen.uba.ar)

**Palabras Clave:** simulador bifásico, diferencias-finitas, soluciones-simultáneas, agua-petróleo.

**Resumen.** Se describe un simulador bifásico -agua-petróleo- bidimensional, incompresible, que se ha desarrollado para modelar un proceso de recuperación secundaria de petróleo mediante inyección de agua. El simulador representa un esquema de cinco puntos invertido, que consiste en una malla cuadrada con un inyector en el centro y cuatro productores en los vértices. El simulador puede aplicarse a modelar la sección del reservorio afectada a un esquema de inyección de cinco puntos como también a simular los ensayos de desplazamiento de petróleo por agua realizados en una celda experimental de laboratorio. Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que rige el flujo bifásico, se aplica una técnica en diferencias finitas, el método de Soluciones Simultáneas. El funcionamiento del simulador se verifica utilizando tanto datos de un reservorio natural como datos medidos durante un ensayo de laboratorio en una celda experimental. Para los datos del reservorio, tomados de la bibliografía, se compara su comportamiento con el de un simulador trifásico, tridimensional de dominio público, BOAST, que resuelve las ecuaciones de flujo por el método IMPES. Se obtienen resultados muy similares. Para los datos de laboratorio, se logran muy buenas aproximaciones a las mediciones experimentales de los volúmenes de fluidos recuperados.

## 1 INTRODUCCION

Se desarrolló un simulador bifásico -agua-petróleo- bidimensional, incompresible para modelar un proceso de recuperación secundaria de petróleo mediante inyección de agua. El simulador representa un esquema de cinco puntos invertido (Craig, 1971), que consiste en una malla cuadrada con un inyector en el centro y cuatro productores en los vértices.

El sistema de ecuaciones que representa el flujo bifásico agua-petróleo incompresible, a través de un medio poroso bidimensional en coordenadas cartesianas surge de combinar la ecuación de conservación de la masa con la ecuación de movimiento de Darcy para cada fase (Thomas, 1982). Las incógnitas del sistema son las presiones y saturaciones de ambas fases. El sistema resulta no lineal, ya que como coeficientes de las ecuaciones diferenciales aparecen las curvas de permeabilidades relativas agua-petróleo, que son funciones de las saturaciones. Se elige un método en diferencias finitas, basado en una formulación implícita, el método de Soluciones Simultáneas. La necesidad de desarrollar un simulador incompresible surge pues los simuladores convencionales trifásicos presentan problemas al considerar nulas las compresibilidades de los fluidos (Aziz and Settari, 1985). Por ejemplo, las formulaciones semi-implícitas, como IMPES (Implícito en Presión, Explícito en Saturación), presentan problemas de singularidad del sistema de ecuaciones algebraicas resultante de la discretización.

La base del método de Soluciones Simultáneas es lograr que las ecuaciones diferenciales queden expresadas en términos de las presiones de las fases. Para lograrlo, es fundamental introducir el concepto de presión capilar. La presión capilar representa la interacción de las fases fluidas con la roca-reservorio. Se define como la diferencia de presión entre la fase no mojante y la fase mojante y también depende de las saturaciones de las fases (Dawe et al, 1992). Entonces, se aplica un cambio de variables, utilizando la relación conocida entre la saturación de agua y la presión capilar. Esta relación funcional es particular para cada conjunto de datos.

Para realizar la simulación numérica se define una grilla cuadrada con una cantidad impar de nodos. A las ecuaciones expresadas en términos de presión se les aplica un esquema en diferencias finitas atrasado en el tiempo y centrado en el espacio. Se obtiene así un sistema de ecuaciones algebraicas no-lineales. El sistema se resuelve linealizando en distintas etapas pero cuya idea básica es nuevamente aplicar el cambio de variables de saturación a presión capilar.

El simulador puede aplicarse a simular la porción de reservorio afectada al esquema de cinco puntos, ensayos piloto en campo o ensayos de desplazamiento de petróleo por agua realizados en una celda experimental de laboratorio.

## 2 MODELO MATEMATICO

Las ecuaciones diferenciales que rigen el flujo bifásico incompresible agua-petróleo a través de un medio poroso bidimensional (coordenadas cartesianas  $(x, y)$ ) surgen combinando (Thomas, 1982) la ecuación de conservación de la masa con la ecuación de movimiento de Darcy para cada fase,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xw} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yw} \frac{\partial p_w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_w}{B_w} \right) + q_w, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xo} \frac{\partial p_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yo} \frac{\partial p_o}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_o}{B_o} \right) + q_o, \quad (2)$$

$$S_o + S_w = 1, \quad (3)$$

$$p_o - p_w = P_c(S_w), \quad (4)$$

donde

$$\lambda_{xl} = \frac{k_x k_{rl}(S_l)}{\mu_l B_l} \quad \lambda_{yl} = \frac{k_y k_{rl}(S_l)}{\mu_l B_l}, \quad l = w, o$$

son las transmisibilidades de las fases agua (*w*) y petróleo (*o*) en las direcciones *x* e *y*.

Las variables dependientes son las presiones y saturaciones de cada fase:  $p_w(x,y,t)$ ,  $p_o(x,y,t)$ ,  $S_w(x,y,t)$ ,  $S_o(x,y,t)$ .

Los parámetros son la permeabilidad absoluta en las direcciones *x* e *y*,  $k_x, k_y$ , las permeabilidades relativas,  $k_{ro}, k_{rw}$ , la porosidad,  $\phi$ , las viscosidades,  $\mu_o, \mu_w$ , los factores de volumen,  $B_o, B_w$ , y la presión capilar  $P_c$ . Los parámetros que se suponen constantes son  $k_x, k_y, \phi, \mu_o, \mu_w, B_o, B_w$ . En cambio,  $k_{ro}, k_{rw}$  y  $P_c$  son funciones de la saturación, por lo que el sistema resulta no lineal. Los términos fuente y sumidero,  $q_o, q_w$  representan el caudal volumétrico por unidad de volumen de cada fase. Las ecuaciones 1 a 4 describen completamente el proceso.

Las condiciones iniciales y de contorno fueron seleccionadas de modo de reproducir la forma en que se lleva a cabo el ensayo de laboratorio:

Inicialmente se conoce la distribución de presiones y saturaciones

$$p_o(x,y,0), S_o(x,y,0). \quad (5)$$

En los contornos, se impone la condición de flujo nulo

$$q_o = q_w = 0. \quad (6)$$

Los caudales de inyección y producción se modelarán a través de los términos fuente y sumidero  $q_o, q_w$  de las ecuaciones diferenciales.

### 3 RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO MATEMÁTICO

El sistema de ecuaciones (1)–(4) con condiciones iniciales (5) y condiciones de contorno (6) se resuelve por diferencias finitas aplicando el método de Soluciones Simultáneas.

Se elige una grilla cuadrada con una cantidad *N* impar de celdas tanto en la dirección *x* como en la dirección *y*. El pozo inyector está ubicado en el centro ( $NM, NM$ ),  $NM=(N+1)/2$  y los productores en los vértices ( $1,1$ ), ( $1,N$ ), ( $N,1$ ) y ( $N,N$ ), como se muestra en la Figura 1.

(1,1)				(1,N)
		(NM,NM)		
(N,1)				(N,N)

Figura 1: Grilla bidimensional

La base del método SS es formular las ecuaciones diferenciales en términos de las presiones de las fases. Para lograrlo se reescriben las derivadas temporales de la saturación utilizando el hecho de que la presión capilar  $P_c$  es función de la saturación. Así, el término de la derecha de las ecuaciones (1) y (2) se puede escribir

$$\frac{\partial S_l}{\partial t} = \frac{dS_l}{dP_c} \frac{\partial P_c}{\partial t} = \frac{dS_l}{dP_c} \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} - \frac{\partial p_w}{\partial t} \right) \quad l = w, o.$$

Discretizando las ecuaciones (1) y (2) en  $(i,j)$  y  $n+1$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left[ (\lambda_{xl})_{i+\frac{1}{2},j} \left( \frac{pl_{i+1,j} - pl_{i,j}}{\Delta x} \right) - (\lambda_{xl})_{i-\frac{1}{2},j} \left( \frac{pl_{i,j} - pl_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \right]^{n+1} \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left[ (\lambda_{yl})_{i,j+\frac{1}{2}} \left( \frac{pl_{i,j+1} - pl_{i,j}}{\Delta y} \right) - (\lambda_{yl})_{i,j-\frac{1}{2}} \left( \frac{pl_{i,j} - pl_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right]^{n+1} \\ & = \left[ \frac{\phi}{B_l} \frac{dS_l}{dP_c} \left( \frac{\partial p_o}{\partial t} - \frac{\partial p_w}{\partial t} \right) + q_l \right]_{i,j}^{n+1} \quad l = w, o. \end{aligned} \quad (7)$$

Multiplicando la ecuación (7) por  $V=\Delta x \Delta y \Delta z$  y discretizando las derivadas temporales en atraso, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[ (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j} (pl_{i+1,j} - pl_{i,j}) - (T_{xl})_{i-\frac{1}{2},j} (pl_{i,j} - pl_{i-1,j}) \right]^{n+1} \\ & + \left[ (T_{yl})_{i,j+\frac{1}{2}} (pl_{i,j+1} - pl_{i,j}) - (T_{yl})_{i,j-\frac{1}{2}} (pl_{i,j} - pl_{i,j-1}) \right]^{n+1} \\ & = \frac{V\phi}{\Delta t B_l} \left( \frac{dS_l}{dP_c} \right)_{i,j}^{n+1} \left[ (po_{i,j}^{n+1} - po_{i,j}^n) - (pw_{i,j}^{n+1} - pw_{i,j}^n) \right] + Ql_{i,j}^{n+1} \quad l = w, o \end{aligned} \tag{8}$$

donde  $Ql = Vql$ ;  $T_{xl} = \lambda_{xl} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x}$  y  $T_{yl} = \lambda_{yl} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y}$  son las transmisibilidades en diferencias finitas.

Reordenando

$$\begin{aligned} & (T_{xl})_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} pl_{i-1,j}^{n+1} + \left[ - (T_{xl})_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1} - (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (T_{yl})_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} - (T_{yl})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right] pl_{i,j}^{n+1} \\ & + (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} pl_{i+1,j}^{n+1} + (T_{yl})_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} pl_{i,j-1}^{n+1} + (T_{yl})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} pl_{i,j+1}^{n+1} \\ & = \frac{V\phi}{\Delta t B_l} \left( \frac{dS_l}{dP_c} \right)_{i,j}^{n+1} \left[ (po_{i,j}^{n+1} - po_{i,j}^n) - (pw_{i,j}^{n+1} - pw_{i,j}^n) \right] + Ql_{i,j}^{n+1} \quad l = w, o. \end{aligned} \tag{9}$$

Las condiciones de flujo nulo son equivalentes a (Aziz & Settari, 1985)

$$(T_{xl})_{\frac{1}{2},j}^{n+1} = 0 \quad (T_{xl})_{N+\frac{1}{2},j}^{n+1} = 0 \quad (T_{yl})_{i,\frac{1}{2}}^{n+1} = 0 \quad (T_{yl})_{i,N+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0 \quad l = w, o. \tag{10}$$

Con la formulación (9),  $P^{n+1} = (pw_{1,1}^{n+1}, po_{1,1}^{n+1}, pw_{1,2}^{n+1}, po_{1,2}^{n+1}, \dots, pw_{N,N}^{n+1}, po_{N,N}^{n+1})$  son las  $2N^2$  incógnitas.

La ecuación (9) se puede escribir en forma matricial como

$$T^{n+1} P^{n+1} = D^{n+1} (P^{n+1} - P^n) + Q^n. \tag{11}$$

Las matrices  $T$  y  $D$  se describen a continuación.

### 3.1 Matriz T

Es una matriz simétrica de  $N \times N$  bloques, donde cada bloque es de dimensión  $2N \times 2N$ . Los bloques no nulos son los correspondientes a los bloques diagonal y subdiagonales superior e inferior.

$$T = \begin{pmatrix} F^1 & G^1 & 0 & 0 \\ G^1 & F^2 & G^2 & 0 \\ 0 & G^2 & F^3 & G^3 \\ 0 & 0 & G^3 & F^4 \end{pmatrix}$$

donde

$$F^i = \begin{pmatrix} f_{1,1}^i & 0 & f_{1,3}^i & 0 \\ 0 & f_{2,2}^i & 0 & f_{2,4}^i \\ f_{1,3}^i & 0 & f_{3,3}^i & 0 \\ 0 & f_{2,4}^i & 0 & f_{4,4}^i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_{L,L} &= -(T_{xw})_{i-\frac{1}{2},j} - (T_{xw})_{i+\frac{1}{2},j} - (T_{yw})_{i,j-\frac{1}{2}} - (T_{yw})_{i,j+\frac{1}{2}}, \\ f_{L+1,L+1} &= -(T_{xo})_{i-\frac{1}{2},j} - (T_{xo})_{i+\frac{1}{2},j} - (T_{yo})_{i,j-\frac{1}{2}} - (T_{yo})_{i,j+\frac{1}{2}}, \\ f_{L,L+2} &= (T_{yw})_{i,j+\frac{1}{2}} \\ f_{L+1,L+3} &= (T_{yo})_{i,j+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde  $L = 2((i-1)N+j)-1$

y

$$G^i = \begin{pmatrix} g_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{4,4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} g_{L,L} &= (T_{xw})_{i+\frac{1}{2},j} \\ g_{L+1,L+1} &= (T_{xo})_{i+\frac{1}{2},j} \end{aligned}$$

Las transmisibilidades  $T_{xi}$  y  $T_{yj}$  se evalúan 1 punto upstream.

La matriz  $T$  es singular, ya que la suma de los elementos de cada fila es cero.

### 3.2 Matriz D

Es una matriz “diagonal” en bloques de  $2 \times 2$  que resultan:

$$\frac{V\phi}{\Delta t B} \begin{pmatrix} -\left(\frac{dS_w}{dP_c}\right)_{i,j}^{n+1} & \left(\frac{dS_w}{dP_c}\right)_{i,j}^{n+1} \\ \left(\frac{dS_w}{dP_c}\right)_{i,j}^{n+1} & -\left(\frac{dS_w}{dP_c}\right)_{i,j}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Las  $\left(\frac{dS_l}{dP_c}\right)_{i,j}^{n+1}$  se aproximan en el tiempo  $t^n$  por  $\left(\frac{dS_l}{dP_c}\right)_{i,j}^n$ .

Las filas de la matriz  $D$  son linealmente dependientes.

### 3.3 Cálculo de la matriz T

Para obtener la matriz  $T^{n+1}$  se deben evaluar las transmisibilidades en  $(n+1)$ , lo que implica conocer el valor de  $S_l^{n+1}$  que es incógnita. Por lo tanto se reemplaza  $T_{xl}^{n+1}$  y  $T_{yl}^{n+1}$  por una aproximación de primer orden en el tiempo  $n$ :

$$\begin{aligned} (T_{xl})_{i,j}^{n+1} &= (T_{xl})_{i,j}^n + \frac{d(T_{xl})_{i,j}^n}{dP_c} (P_{ci,j}^{n+1} - P_{ci,j}^n) & l = w, o, \\ (T_{yl})_{i,j}^{n+1} &= (T_{yl})_{i,j}^n + \frac{d(T_{yl})_{i,j}^n}{dP_c} (P_{ci,j}^{n+1} - P_{ci,j}^n) & l = w, o \end{aligned} \tag{12}$$

y se reemplaza en la ecuación (8). A modo de ejemplo, se muestra cómo resulta el primer sumando del miembro izquierdo de (8):

$$\left[ (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{d(T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n}{dP_c} (P_{ci+\frac{1}{2},j}^{n+1} - P_{ci+\frac{1}{2},j}^n) \right] (Pl_{i+1,j}^{n+1} - Pl_{i,j}^{n+1}) \tag{13}$$

Este sumando se “linealiza” de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\left[ (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{d(T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n}{dP_c} (P_{ci+\frac{1}{2},j}^{n+1} - P_{ci+\frac{1}{2},j}^n) \right] (Pl_{i+1,j}^{n+1} - Pl_{i,j}^{n+1}) \\ &= (T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n (Pl_{i+1,j}^{n+1} - Pl_{i,j}^{n+1}) + \frac{d(T_{xl})_{i+\frac{1}{2},j}^n}{dP_c} (P_{ci+\frac{1}{2},j}^{n+1} - P_{ci+\frac{1}{2},j}^n) (Pl_{i+1,j}^n - Pl_{i,j}^n). \end{aligned} \tag{14}$$

Notar que cuando se distribuye  $(Pl_{i+1,j}^{n+1} - Pl_{i,j}^{n+1})$  en el segundo sumando se evalúa en  $n$  en lugar de evaluarlo en  $n+1$ . De esta manera se evita que las incógnitas aparezcan en una relación no-lineal.

Reemplazando (13) en (8), operando, reordenando y sacando factor común las componentes del vector incógnita  $(P^{n+1} - P^n)$ , se obtiene la siguiente expresión matricial (Morelli-Fusari-Savioli, 2006, Comunicación Interna)

$$T^n P^{n+1} + (TP)^n (P^{n+1} - P^n) = D^n (P^{n+1} - P^n) + Q^{n+1}.$$

### 3.4 Matriz TP

De la misma forma que  $T$ , la matriz  $TP$  está formada por  $N \times N$  bloques de dimensión  $2N \times 2N$

$$TP = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & H_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & H_4 \end{pmatrix}.$$

Además, los bloques  $H_i$  están formados por  $N$  bloques de  $2 \times 2$ , en la diagonal,

$-\left(\frac{dT_{xw}}{dP_c}\right)_{i+\frac{1}{2},j} (pw_{i+1,j}^n - pw_{i,j}^n)$ $-\left(\frac{dT_{yw}}{dP_c}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} (pw_{i,j+1}^n - pw_{i,j}^n)$	$\left(\frac{dT_{xw}}{dP_c}\right)_{i+\frac{1}{2},j} (pw_{i+1,j}^n - pw_{i,j}^n)$ $+\left(\frac{dT_{yw}}{dP_c}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} (pw_{i,j+1}^n - pw_{i,j}^n)$
$-\left(\frac{dT_{xo}}{dP_c}\right)_{i+\frac{1}{2},j} (po_{i+1,j}^n - po_{i,j}^n)$ $-\left(\frac{dT_{yo}}{dP_c}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} (po_{i,j+1}^n - po_{i,j}^n)$	$\left(\frac{dT_{xo}}{dP_c}\right)_{i+\frac{1}{2},j} (po_{i+1,j}^n - po_{i,j}^n)$ $+\left(\frac{dT_{yo}}{dP_c}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} (po_{i,j+1}^n - po_{i,j}^n)$

y  $N-1$  bloques de  $2 \times 2$  en la subdiagonal inferior.

$\left(\frac{dT_{yw}}{dP_c}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} (pw_{i,j}^n - pw_{i,j-1}^n)$	$-\left(\frac{dT_{yw}}{dP_c}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} (pw_{i,j}^n - pw_{i,j-1}^n)$
$\left(\frac{dT_{yo}}{dP_c}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} (po_{i,j}^n - po_{i,j-1}^n)$	$-\left(\frac{dT_{yo}}{dP_c}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} (po_{i,j}^n - po_{i,j-1}^n)$

Los bloques  $I_i$  son matrices diagonales en bloques  $2 \times 2$

$\left(\frac{dT_{xw}}{dP_c}\right)_{i-\frac{1}{2},j} (pw_{i,j}^n - pw_{i-1,j}^n)$	$-\left(\frac{dT_{xw}}{dP_c}\right)_{i-\frac{1}{2},j} (pw_{i,j}^n - pw_{i-1,j}^n)$
$\left(\frac{dT_{xo}}{dP_c}\right)_{i-\frac{1}{2},j} (po_{i,j}^n - po_{i-1,j}^n)$	$-\left(\frac{dT_{xo}}{dP_c}\right)_{i-\frac{1}{2},j} (po_{i,j}^n - po_{i-1,j}^n)$

La matriz  $TP$  es singular pues la suma de las filas es 0.

#### 4 SISTEMA DE ECUACIONES A RESOLVER

Por todo lo anterior, el sistema a resolver resulta:

$$T^n P^{n+1} + (TP)^n (P^{n+1} - P^n) = D^n (P^{n+1} - P^n) + Q^{n+1}. \quad (15)$$

Restando en ambos miembros  $T^n P^n$ , se obtiene:

$$(T^n + (TP)^n - D^n)(P^{n+1} - P^n) = -T^n P^n + Q^{n+1}. \quad (16)$$

Hasta aquí,  $A = T^n + (TP)^n - D^n$  sería la matriz del sistema,  $(P^{n+1} - P^n)$  la incógnita y  $B = -T^n P^n + Q^{n+1}$  el término independiente. Como  $Q$  está evaluado en  $t^{n+1}$ , su discretización se describe a continuación.



#### 4.1 Discretización de $Q^{n+1}$

El vector  $Q^{n+1} = (Q_{w_{1,1}}^{n+1}, Q_{o_{1,1}}^{n+1}, Q_{w_{1,2}}^{n+1}, \dots, Q_{o_{1,N}}^{n+1}, \dots, Q_{w_{N,1}}^{n+1}, Q_{o_{N,1}}^{n+1}, \dots, Q_{w_{N,N}}^{n+1}, Q_{o_{N,N}}^{n+1})$  es nulo excepto en 10 lugares correspondientes a la celda  $(NM, NM)$  donde está el pozo inyector y a las celdas  $(I, I), (I, N), (N, I), (N, N)$  donde están los pozos productores (Figura 1).

Como en el lugar  $(NM, NM)$  se inyecta agua,  $Q_{o_{NM, NM}} = 0$  y  $Q_{w_{NM, NM}} = QW$ , siendo  $QW$  el caudal de inyección.

En los pozos productores, se considera que se extrae a presión dinámica de fondo  $P_{wf}$  constante. Así, usando la ecuación de Darcy

$$Q_i^{n+1} = PID \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l B_l} (P_i^{n+1} - P_{wf}) \quad (17)$$

donde, (Fanchi, 1997)

$$PID = \frac{2\pi kh}{\ln(r_e/r_w) + S}.$$

Entonces

$$Q_i^{n+1} = \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l B_l} PID (P_i^{n+1} - P_i^n) + \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l B_l} PID (P_i^n - P_{wf}), \quad (18)$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l B_l} PID (P_i^{n+1} - P_i^n). \quad (19)$$

El valor  $Q_i^n$  se puede calcular pues  $P_i^n$  es conocida. En el segundo sumando aparece la incógnita  $(P_i^{n+1} - P_i^n)$  por lo que se incorpora a la matriz  $A$  del sistema (16).

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

El simulador desarrollado se verifica con dos conjuntos de datos.

1.- Datos correspondientes a un reservorio natural tomados de la bibliografía. Se compara su comportamiento con el de un simulador de dominio público, BOAST, (Fanchi et al, 1982)

2.- Datos experimentales de un ensayo de desplazamiento de petróleo por agua realizado en una celda bidimensional de laboratorio (Al-Marhoon et al, 1999)

### 5.1 Comparación con el simulador BOAST

Con el objetivo de verificar el funcionamiento del simulador, se comparó el comportamiento del mismo con el de un simulador de dominio público, trifásico (agua, petróleo y gas) y tridimensional, BOAST, que resuelve las ecuaciones de flujo por el método IMPES (implícito en presión, explícito en saturaciones).

En ambos simuladores se utilizaron los datos de entrada de la Tabla 1, tomados de Letkeman and Ridings, (1970)

Descripción	Símbolo	Valores
Longitud del reservorio en las direcciones $x$ e $y$	$L$	439 m
Espesor del reservorio	$h$	6.1 m
Porosidad	$\phi$	0.28
Permeabilidad absoluta en la dirección $x$	$k_x$	$5 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$
Permeabilidad absoluta en la dirección $y$	$k_y$	$5 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$
Viscosidad del agua	$\mu_w$	0.0005 kg/m.s
Viscosidad del petróleo	$\mu_o$	0.0007 kg/m.s
Saturación de agua connata	$S_{wc}$	0.15
Presión inicial del reservorio	$p_i$	$2.76 \cdot 10^7 \text{ Pa}$
Caudal de inyección de agua	$Q_{wi}$	$0.00184 \text{ m}^3/\text{s}$

Tabla 1: Propiedades de la roca y los fluidos de un reservorio natural

Además en las Figuras 2 y 3 se muestran las funciones de permeabilidades relativas y presión capilar en función de la saturación de agua.

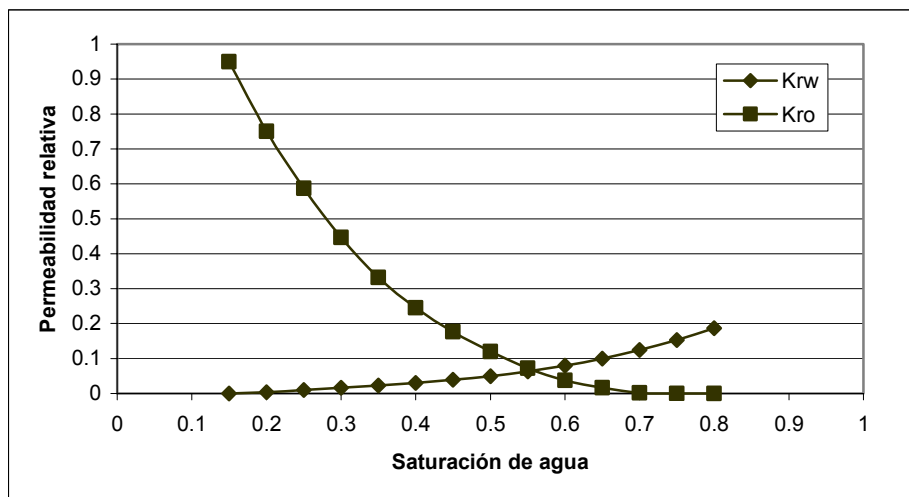


Figura 2: Curvas de permeabilidades relativas

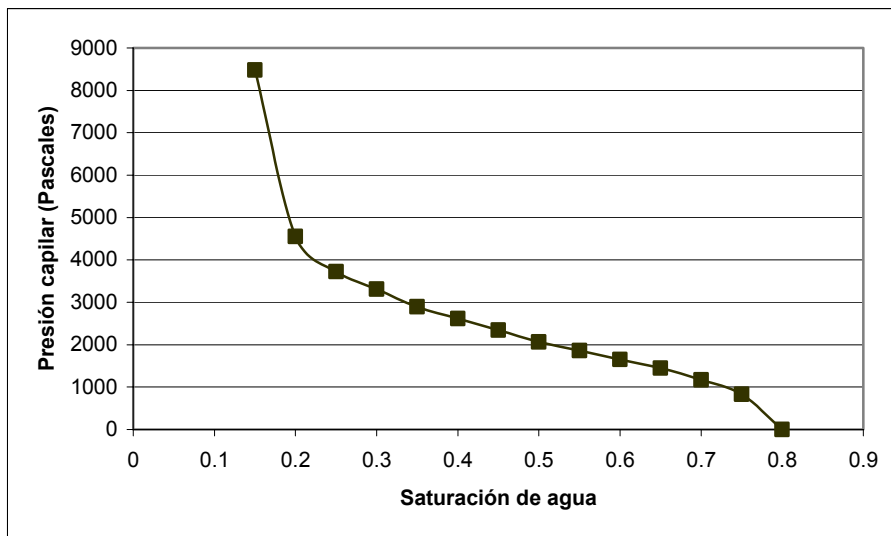


Figura 3: Curva de presión capilar

Los resultados obtenidos con ambos simuladores se muestran en las Figuras 4 a 7.

En las Figuras 4 y 5 se representan, respectivamente, la presión dinámica de fondo y la saturación de petróleo en función del tiempo, correspondientes al pozo inyector que se encuentra ubicado en el centro de la grilla.

La Figura 6 muestra la variación de la saturación de petróleo con el tiempo, en cada uno de los cuatro productores, que se encuentran en los cuatro vértices de la grilla que representa la porción de reservorio que se simula.

En la Figura 7 se observa, para cada uno de los cuatro productores, la variación del caudal de petróleo a lo largo del tiempo.

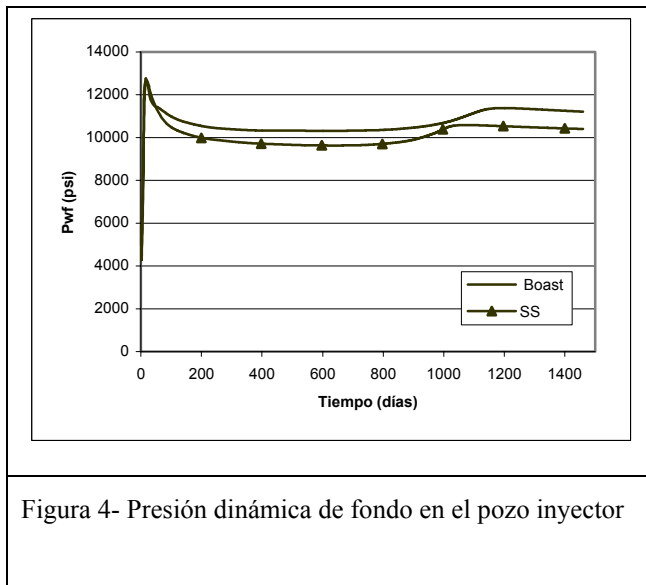


Figura 4- Presión dinámica de fondo en el pozo inyector

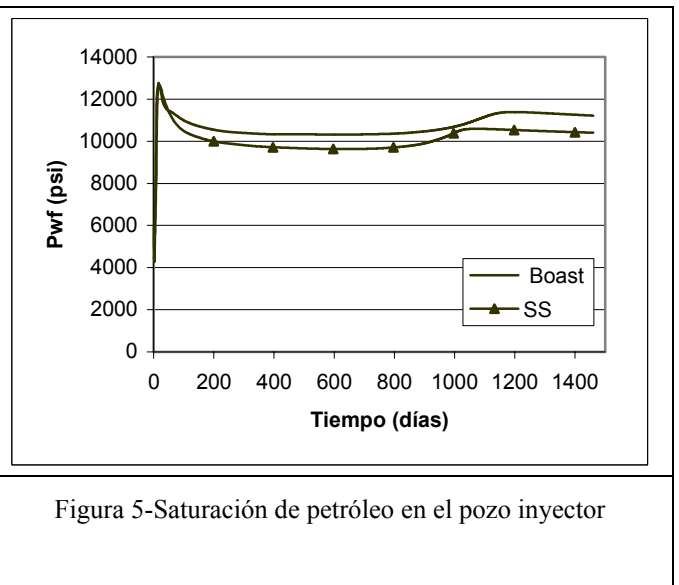


Figura 5- Saturación de petróleo en el pozo inyector

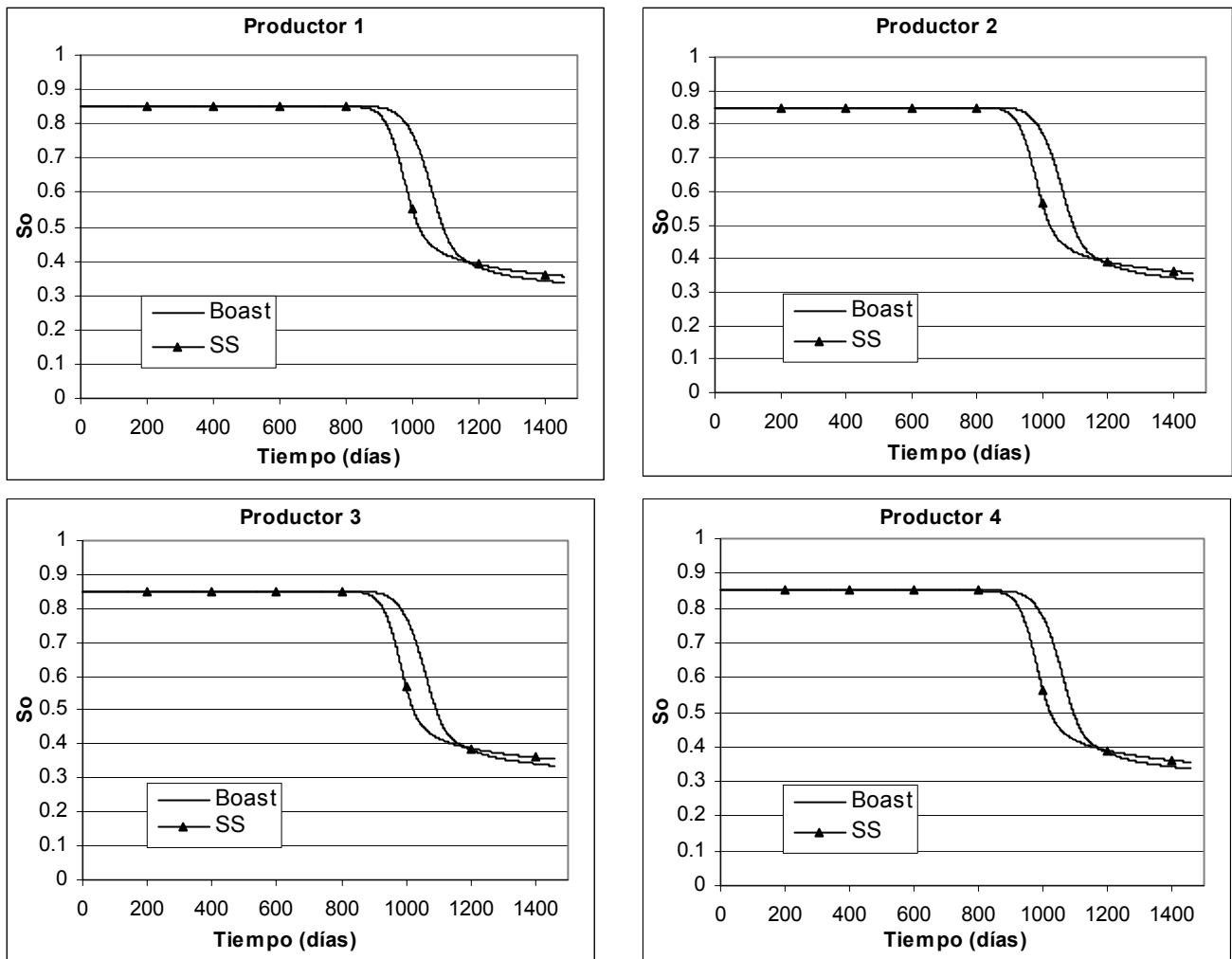


Figura 6- Saturación de petróleo en los pozos productores

Como puede observarse en todas las Figuras, el comportamiento de ambos simuladores es muy similar, quedando validados los resultados obtenidos con el simulador desarrollado, que utiliza el método de Soluciones Simultáneas.

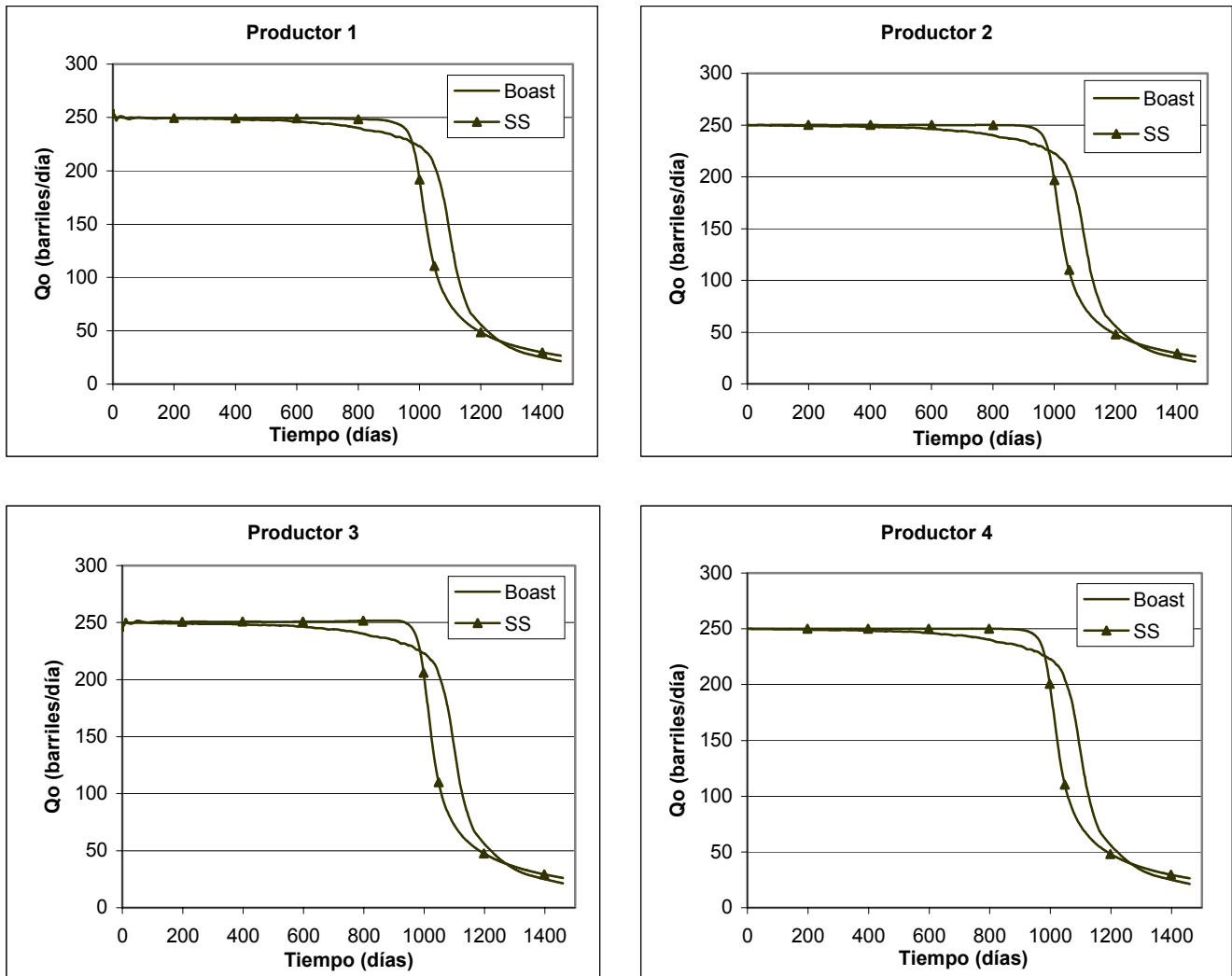


Figura 7-Caudal de petróleo en los pozos productores.

## 5.2 Comparación con los datos experimentales de la celda

Se comparó los resultados obtenidos con el simulador con mediciones de laboratorio realizadas durante el desplazamiento de petróleo con agua en una celda experimental (Al-Marhoon et al, 1999). El simulador se alimentó con los datos de la Tabla 2.

Descripción	Símbolo	Valores
Longitud de la celda en las direcciones $x$ e $y$	$L$	0.2 m
Espesor de la celda	$h$	0.01 m
Porosidad	$\phi$	0.40
Permeabilidad absoluta en la dirección $x$	$k_x$	$0.16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$
Permeabilidad absoluta en la dirección $y$	$k_y$	$0.16 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$
Viscosidad del agua	$\mu_w$	0.0014 kg/m.s
Viscosidad del petróleo	$\mu_o$	0.0014 kg/m.s
Saturación de agua connata	$S_{wc}$	0.15
Presión inicial	$p_i$	101325 Pa
Caudal de inyección de agua	$Q_{wi}$	$0.83 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$

Tabla 2. : Propiedades de la celda de laboratorio (Al-Marhoon et al, 1999)

Las curvas de permeabilidas relativas se aproximaron por los siguientes modelos potenciales, que son ampliamente aceptados (Lake, 1989),

$$k_{rw} = 0.187 \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{2.16}, \quad k_{ro} = 0.95 \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^{2.81}$$

y la curva de presión capilar se aproximó por la siguiente expresión

$$P_c = 0.1127(S_w)^{-1.23}.$$

En la Figura 8 se muestran los datos experimentales, los resultados obtenidos por nuestro simulador numérico y la simulación realizada por Al-Marhoon et al. (1999) con el simulador comercial ECLIPSE. Los datos están expresados en forma adimensional: en ordenadas se muestran los *volúmenes porales producidos* (volumen de petróleo producido por unidad de volumen poral) y en abcisas *volúmenes porales inyectados* (volumen de agua inyectado por unidad de volumen poral). Se puede observar que los resultados de nuestro simulador logran una mejor representación de los datos experimentales.

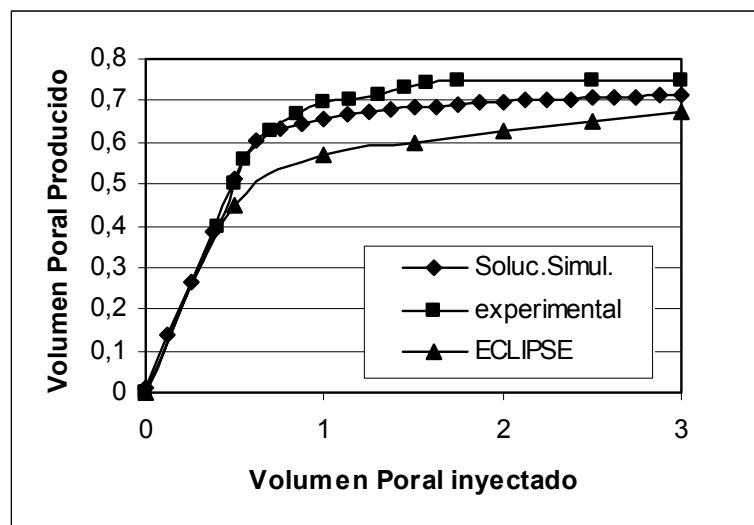


Figura 8: Comparación con los resultados experimentales y numéricos del trabajo de Al-Marhoon et al. (1999)

## 6 CONCLUSIONES

Se desarrolló un simulador bifásico -agua-petróleo- bidimensional, incompresible que modela un proceso de recuperación secundaria de petróleo mediante inyección de agua. El simulador representa un esquema de cinco puntos invertido, que consiste en una malla cuadrada con un inyector en el centro y cuatro productores en los vértices. El simulador puede aplicarse a simular la porción de reservorio afectada al esquema de cinco puntos, ensayos piloto en campo o ensayos de desplazamiento de petróleo por agua realizados en una celda experimental de laboratorio. Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que rige el flujo bifásico, se aplica una técnica en diferencias finitas, el método de Soluciones Simultáneas. El funcionamiento del simulador se verificó utilizando tanto datos de un reservorio natural como datos medidos durante un ensayo de laboratorio en una celda experimental. Para los datos del reservorio, tomados de la bibliografía, se comparó su comportamiento con el de un simulador trifásico, tridimensional de dominio público, BOAST, que resuelve las ecuaciones de flujo por el método IMPES, obteniéndose resultados muy similares. Para los datos de laboratorio, se lograron muy buenas aproximaciones a las mediciones experimentales de los volúmenes de fluidos recuperados, mejorando la aproximación numérica de un simulador convencional.

## REFERENCIAS

- N.O. Al-Marhoon, J.N. Carter, C.A. Grattoni and R.A. Dawe. Effects of Permeability contrast in the near Wellbore Flow Patterns-Comparison Between Experimental and Numerical Studios. *Society of Petroleum Engineers Paper 53375*, 1999.
- J.R. Aziz and A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science Publishers, 1985.
- F.F. Craig. *The Reservoir Engineering Aspects of Waterflooding*. Society of Petroleum Engineers Monograph Volume 3, Henry L. Doherty Series, Dallas, Texas, EEUU, 1971.
- R.A. Dawe, M.R. Wheat and M.S. Bidner. Experimental Investigation of Capillary Pressure Effects on Immiscible Displacement in Lensed and Layered Porous Media. *Transport in Porous Media*, 7: 83-101, 1992.
- J.R. Fanchi. *Principles of Applied Reservoir Simulation*, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 1997.
- J.R. Fanchi, K.J. Harpole y S.W. Bujnowski. *BOAST- A Three-Dimensional, Three-Phase Black Oil Applied Simulation Tool*, U.S. Department of Energy Report DOE/BC/10033-3, two volumes, 1982.
- L.W. Lake. *Fundamentals of Enhanced Oil Recovery*, Prentice-Hall, 1989.
- J.P. Letkeman and R.L. Ridings. A Numerical Coning Model. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 10: 418-424, 1970.
- G.W. Thomas. *Principles of Hydrocarbon Reservoir Simulation*, International Human Resources Development Corporation, Boston, USA, 1982.