

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE FLUJOS MAGNETOGASDINÁMICOS REALES EN DOS DIMENSIONES

Livio S. Maglione^a, Sergio A. Elaskar^b, Héctor H. Brito^{a,c} and Raul A. Dean^a

^a Grupo de Mecánica Computacional, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nac. 36 Km 601, Río Cuarto, Córdoba (X5804B YA), Argentina, smaglione@ing.unrc.edu.ar, rdean@ing.unrc.edu.ar, <http://www.unrc.edu.ar>

^b Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, CONICET, Av. Velez Sarfield 1611, Córdoba (5000), Argentina, selaskar@efn.uncor.edu

^c Centro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico, Ruta 20 Km 5.5, Córdoba (5022), Argentina, hrito@iua.edu.ar

Keywords: MGD, Riemann Solver, TVD, AMPD.

Resumen. El estudio de los flujos en los cuales un gas eléctricamente conductor se mueve en un campo magnético es denominado Magnetogasdínámica. Aquí se presenta una metodología para simular numéricamente flujos magnetogasdínámicos difusivos, viscosos, bidimensionales e inestacionarios. Este trabajo corresponde a una fase intermedia de una investigación que permitirá lograr una descripción del flujo dentro de la cámara de reacción de propulsores de plasma. Las ecuaciones de la magnetogasdínámica real conforman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales hiperbólico-parabólico. Al ser planteado el sistema de ecuaciones en forma conservativa las contribuciones parabólicas son escritas en forma de flujos, lo que permite actualizar las variables de estado considerando flujos hiperbólicos y parabólicos. En este trabajo la técnica de ocho ondas presentada por Powell ha sido implementada junto con la normalización de los vectores propios descripta por Zarachay. La aproximación numérica se basa en la utilización de volúmenes finitos sobre mallas estructuradas. Para el cálculo de los flujos numéricos se ha implementado un esquema TVD conjuntamente con un seguidor de Riemann aproximado. El adecuado comportamiento del código computacional es verificado por medio del caso de prueba denominado "Problema de Riemann Magnetogasdínámico Real". Para este caso de prueba los resultados numéricos obtenidos son comparados con datos publicados por otros miembros de la comunidad científica.

1 INTRODUCTION

Más allá de los avances logrados en la actualidad en sistemas de combustión, la máxima velocidad de escape alcanzada por un sistema de propulsión química es del orden de 3600 a 4500 [m/s] (motor principal del Space Shuttle), inadecuada todavía para misiones de espacio profundo.

Para misiones más allá de la luna el incremento de velocidad requerido indica que la propulsión química no es una solución práctica y otra alternativa debe ser usada.

La propulsión eléctrica en vehículos espaciales es en nuestros días una alternativa competitiva frente a la propulsión convencional o química.

La propulsión eléctrica puede ser definida como “La aceleración de gases para propulsión lograda por calentamiento eléctrico (efecto Joule) y/o fuerzas electromagnéticas” ver Currant (1999). A partir de esta definición es posible decir que su primera parte involucra a propulsores electrotérmicos, “arcjets” y “resistojets”, mientras que la segunda parte comprende a los propulsores magnetoplasmadínamicos (MPD) y a los propulsores de plasma pulsante (PPT).

Un módulo propulsivo de plasma pulsante ablativo de Teflón (PPPA) se está desarrollando por investigadores del Instituto Universitario Aeronáutico, de la Universidad Nacional de Córdoba y de la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC), ver Brito et al. (2001), Elaskar et al. (2000) y Elaskar et al. (2005). En la UNRC existe un programa de investigación que tiene como objetivo general definir soluciones tecnológicas para la propulsión electromagnética del tipo MPD (estacionario) con propelente sólido, para micro-nanosatélites. Estas investigaciones tienen como uno de sus objetivos específicos describir en forma física y numérica el desarrollo del flujo de plasma, para así avanzar hacia una mayor comprensión del flujo de plasma dentro de la cámara de reacción de un propulsor de plasma de los tipos APPT y AMPD.

La magnetogasdínámica es la parte de la mecánica del continuo que estudia el movimiento de un medio gaseoso eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético. Es necesario recordar que cuando un fluido conductor o un gas ionizado (plasma) se mueve dentro de un campo magnético se induce un campo eléctrico y una corriente eléctrica aparece, a su vez la interacción de la corriente con el campo magnético cambia el movimiento del fluido y por lo tanto cambia el campo magnético. El sistema de ecuaciones que gobiernan la MGD real es hiperbólico-parabólico no convexo apareciendo un sistema de ondas más complejo que en aerodinámica. La MGD requiere conocimientos de gas dinámica, electromagnetismo y fisicoquímica para poder describir el flujo de gases ionizados en presencia de campos electromagnéticos. Una revisión de algunos de los modelos físicos y matemáticos usados actualmente en aplicaciones aeroespaciales para describir el flujo de fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos electromagnéticos, se encuentra en D'Ambrosio and Giordano (2004).

Recientes investigaciones en el campo de la MGD teórica y computacional, y en particular en magnetoaerodinámica apuntan al control de flujos hipersónicos a través de la utilización del campo magnético, ver Shang (2001).

El objetivo de este trabajo es presentar los resultados logrados con un código numérico desarrollado para resolver las ecuaciones adimensionales de la magnetogasdínámica real bidimensional e inestacionaria utilizando un solver de Riemann aproximado junto con un esquema TVD.

2 ECUACIONES DE LA MAGNETOGASDINAMICA REAL

Las ecuaciones adimensionales de la magnetogasdinámica real e inestacionaria para un fluido simple escritas en su forma conservativa tensorial son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \underline{u} \\ \underline{B} \\ e \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \underline{u} \\ \rho \underline{u} \underline{u} - \underline{B} \underline{B} + \underline{I} \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \\ \underline{u} \underline{B} - \underline{B} \underline{u} \\ \left(e + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \underline{u} - (\underline{B} \cdot \underline{u}) \underline{B} \end{bmatrix} = \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\underline{\tau}}{R_e A_l} \\ \frac{\underline{E}_r}{L_u A_l} \\ \frac{\underline{u} \cdot \underline{\tau}}{R_e A_l} - \frac{\left[\underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \times \underline{B}}{L_u A_l} + \frac{\underline{k} \cdot \nabla T}{P_e A_l} \end{bmatrix}$$

con

$$\nabla \cdot \underline{E}_r = -\nabla \times \left[\frac{1}{\mu_o} \underline{\eta} \cdot (\nabla \times \underline{B}) \right] \quad (2)$$

en las cuales ρ indica la densidad, p la presión, \underline{u} el vector velocidad, \underline{B} el vector campo magnético, e la energía total, μ_o la permeabilidad magnética del vacío, \underline{k} el tensor de conductividad térmica y $\underline{\eta}$ el tensor de resistividad eléctrica del plasma (todas en forma adimensional).

El tensor de tensiones viscoso esta dado por

$$\underline{\tau} = \mu \left[\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T - \frac{2}{3} \underline{I} (\nabla \cdot \underline{u}) \right] \quad (3)$$

siendo μ la viscosidad adimensional del plasma e \underline{I} el tensor unitario.

Los números adimensionales característicos utilizados en (1) son:

$$\text{Reynolds} \quad R_e = \rho_{ref} \frac{a U}{\mu_{ref}} \quad (4)$$

$$\text{Alfvén} \quad A_l = \frac{c_a}{U} \quad (5)$$

$$\text{Lundquist} \quad L_u = \frac{\mu_o a U}{\eta_{ref}} \quad (6)$$

$$\text{Peclet} \quad P_e = \frac{aU}{\alpha_{ref}} \quad (7)$$

en los cuales el sufijo “*ref*” indica valores de referencia, U es una velocidad de referencia del flujo, a una longitud de referencia, α el coeficiente de difusividad térmica y c_a la velocidad de Alfvén. El número de Lundquist (6) describe como el campo magnético es influenciado por el flujo y recíprocamente como el flujo se ve modificado por el campo magnético, a menudo en publicaciones científicas es denominado también Reynolds Magnético, para $L_u \ll 1$ el campo magnético no tiene una notable influencia en el movimiento del flujo. Se destaca que algunos autores consideran el número de Lundquist cuando se reemplaza en la Ec. (6) la velocidad por la velocidad de Alfvén (Goldston and Rutherford, 1995).

Introduciendo un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales la Ec. (1) puede ser escrita en términos de flujos para el caso bidimensional como:

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}_h}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_h}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (8)$$

donde \underline{U} es el vector de variables de estado, \underline{F}_h \underline{G}_h los vectores que especifican los flujos hiperbólicos y \underline{F}_p \underline{G}_p los vectores que especifican los flujos parabólicos.

Escribiendo el lado izquierdo del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (8) en su forma cuasi-lineal se obtiene

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + [A_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial x} + [B_c] \frac{\partial \underline{U}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (9)$$

en la cual $[A_c]$ $[B_c]$ son las matrices Jacobianas de los flujos y la letra “c” indica que la derivación se ha llevado a cabo con respecto a las variables de estado conservativas. Sin embargo, su expresión es más simple si se escriben en función de las variables primitivas:

$$\underline{W} = (\rho, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z, p)^T \quad (10)$$

En términos de las variables primitivas la Ec. (8) queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} + [A_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial x} + [B_p] \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} = \frac{\partial \underline{F}_p}{\partial x} + \frac{\partial \underline{G}_p}{\partial y} \quad (11)$$

Debido a que las matrices $[A_p]$ $[B_p]$ poseen un valor propio nulo, no es posible utilizar seguidores de Riemann basados en un sistema de ocho ondas. Es importante destacar que ambas formulaciones, tanto en variables primitivas como en variables conservativas son equivalentes, por consiguiente el valor propio nulo aparece en ambas. Para poder subsanar este inconveniente se ha implementado la técnica de ocho ondas presentada en 1995 por Powell. Claramente para flujos unidimensionales quedan bien definidos los siete valores propios y no es necesario utilizar esta técnica que introduce una nueva matriz Jacobiana de los flujos.

Los valores propios de la nueva matriz $[A]$ son:

$$\begin{aligned}
 \lambda_e &= u_x \\
 \lambda_a &= u_x \pm c_a \\
 \lambda_f &= u_x \pm c_f \\
 \lambda_s &= u_x \pm c_s \\
 \lambda_d &= u_x
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

La velocidad de Alfvén y las magnetosónicas lentas y rápidas se expresan respectivamente como:

$$c_a = \frac{|B_n|}{\sqrt{\rho}} \tag{13}$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma p + B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_n^2}{\rho^2}} \right] \tag{14}$$

en las cuales el signo positivo corresponde a las ondas magnetosónicas rápidas.

Finalmente, los vectores propios asociados se han normalizado para evitar problemas de degeneración del sistema, ver Zarachay et al. (1994).

3 APROXIMACION NUMERICA

Discretizando el dominio en celdas e introduciendo una formulación integral se obtiene la formulación en volúmenes finitos. La derivada respecto al tiempo de las variables conservativas se aproxima usando diferencias finitas de primer orden; obteniéndose así un método de avance en el tiempo explícito. Para la determinación de los flujos numéricos las variables conservativas son consideradas constantes dentro de las celdas.

Los flujos numéricos hiperbólicos son evaluados por medio de la técnica TVD de Yee et al. (1985) obteniéndose con este método de alta resolución al menos exactitud de segundo orden en regiones donde la solución es suave, determinación de las discontinuidades sin excesivas dificultades y ausencia de oscilaciones falsas.

Los flujos numéricos parabólicos son evaluados manteniendo el orden de aproximación (2do orden) en las derivadas de las variables intervinientes utilizando diferencias finitas centrales.

Considerando lo anterior la fórmula para la actualización temporal es:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{ij}^{n+1} = \tilde{U}_{ij}^n &- \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_h \\
 &+ \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} - \overline{F_{i-\frac{1}{2};j}^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\overline{G_{i;j+\frac{1}{2}}^n} - \overline{G_{i;j-\frac{1}{2}}^n} \right) \right]_p
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

La función que determina el flujo numérico hiperbólico para el instante n es:

$$\overline{F_{i+\frac{1}{2};j}^n} = \frac{1}{2} \left\{ \overline{F_{i+1}} + \overline{F_i} + \sum_m r_{i+\frac{1}{2}}^m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \right\}_{;j}^{(n)} \tag{16}$$

siendo \underline{z}^m el m-esimo vector propio derecho de la matriz $[A_c]$ modificada, Φ la función limitadora y cuyos elementos para el esquema TVD de segundo orden se expresan como:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = (g_{i+1}^m + g_i^m) - \sigma(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (17)$$

con

$$g_i^m = \text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m) \max \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \min \left[\begin{array}{l} \sigma_{i+\frac{1}{2}}^m |\alpha_{i-\frac{1}{2}}^m| \\ \sigma_{i-\frac{1}{2}}^m \frac{\text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m)}{2} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$\sigma(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} (z^2 + \varepsilon^2) & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (19)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} (g_{i+1}^m - g_i^m) & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\alpha^m = \underline{z}_p^m \cdot (W_{i+1} - W_i) \quad (21)$$

siendo \underline{z}_p^m el m-esimo vector propio izquierdo de la matriz $[A_p]$ modificada asociado a la onda m.

4 RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados alcanzados al resolver un “clásico” problema de Riemann, este consiste en una discontinuidad plana que separa dos estados constantes, uno izquierdo y otro derecho donde dichos estados quedan determinados por respectivas condiciones iniciales.

Con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento del código computacional bidimensional la malla es rotada un ángulo de $18,4^\circ$ con respecto al eje longitudinal del flujo, ubicándose la discontinuidad inicial perpendicular al mismo. Debido a que la malla utilizada es regular la dirección del flujo no coincide con ninguna de las direcciones normales de las celdas, obligando al código a resolver un problema de características bidimensionales. La geometría anteriormente descrita se encuentra esquematizada en la Fig. 1.

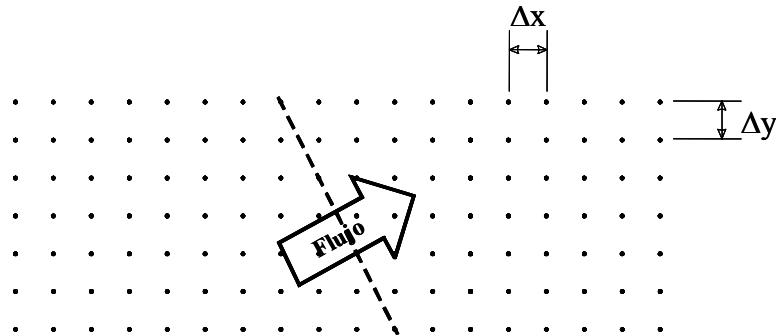


Figura 1: Problema de Riemann bidimensional

En la discretización espacial se utilizaron 1000 nodos en la dirección horizontal y 350 nodos en la dirección vertical con

$$\Delta x = \Delta y = 0.001 \quad (22)$$

Al simular este problema de Riemann bidimensional los resultados se encuentran expresados en una base ortonormal dextrógira donde uno de los versores coincide con la dirección normal a la discontinuidad, otro es perpendicular al plano formado por la malla, denotado en las figuras como transversal 2, y el tercero es ortonormal a los dos anteriores, denotado como transversal 1.

A continuación se presentan los resultados de simulación obtenidos al resolver el problema de Riemann magnetogasdínámico propuesto por Brio y Wu (1988). Éste es un importante caso testigo, ampliamente usado por la comunidad científica, con el objetivo de evaluar el comportamiento de técnicas numéricas y códigos computacionales dentro de la magnetogasdínámica. Brio y Wu estudiaron la extensión a la MGD del problema de Riemann clásico considerado en dinámica de los gases (tubo de choque). En magnetogasdínámica este benchmark se denomina problema de Riemann coplanar debido a que las únicamente existen dos componentes de los vectores velocidad y campo magnético.

En este caso las condiciones iniciales utilizadas en la simulación son:

$$\underline{W}_i = (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, 1.0, 0.0, 0.1)^T \quad (23)$$

$$\underline{W}_d = (0.125, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.75, -1.0, 0.0, 0.1)^T$$

Cabe aclarar que las condiciones iniciales dadas al simular el caso bidimensional deben ser expresadas en la base anteriormente mencionada.

Sólo con la finalidad de analizar el comportamiento del código los parámetros de simulación utilizados fueron:

$$\eta = k = \mu = L = 1 \quad (24)$$

Los resultados obtenidos se observan en las Fig. 2-4, estos se encuentran comparados con los obtenidos mediante simulaciones del problema bidimensional ideal a través de un software de eficiencia y robustez ya comprobadas, ver Maglione et al. (2003).

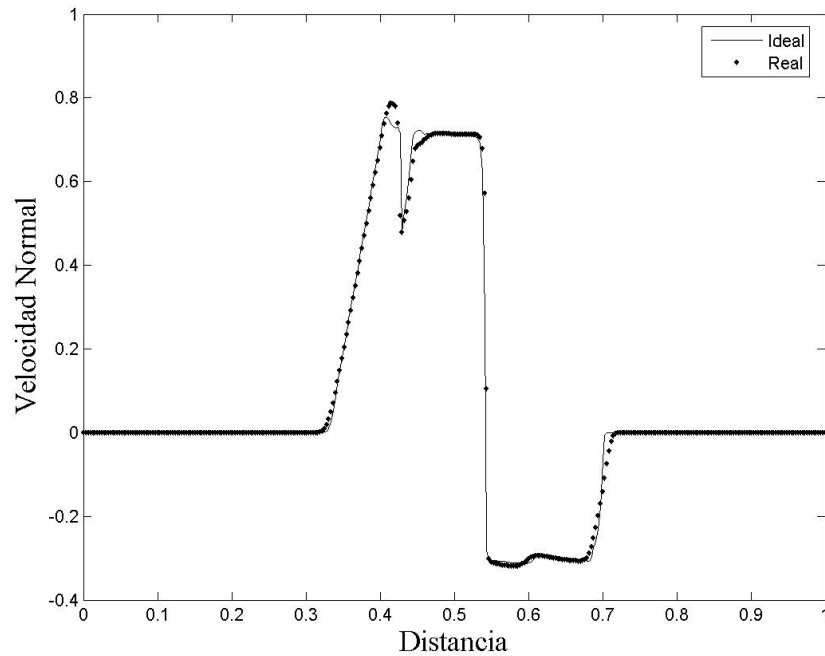


Figura 2: Variación de la componente de la velocidad en la dirección del flujo

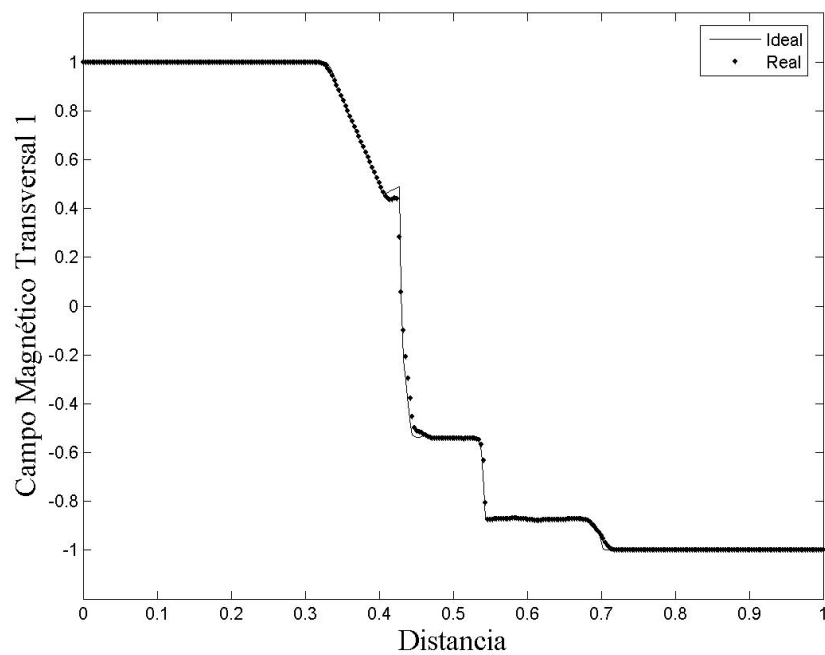


Figura 3: Variación de la componente del campo magnético transversal a la dirección del flujo

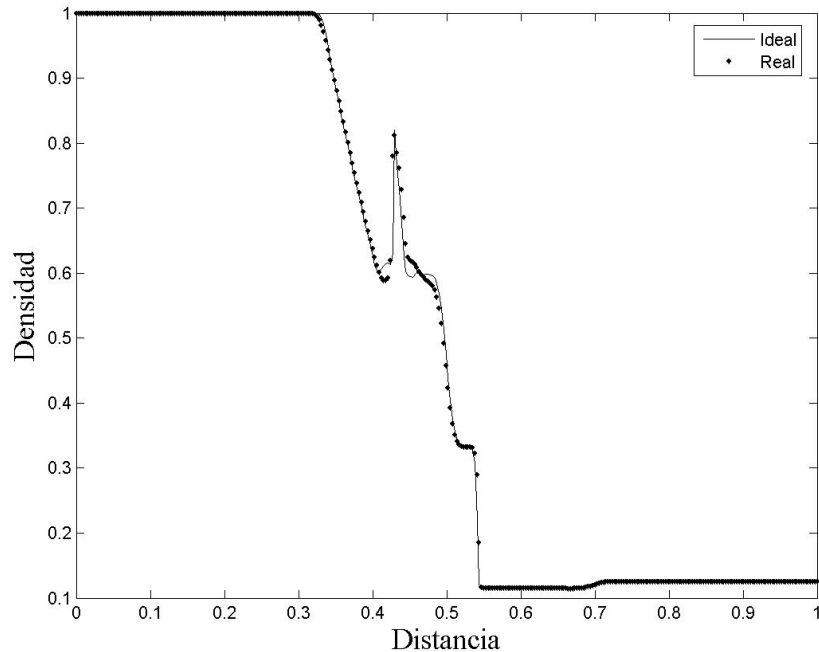


Figura 4: Variación de la densidad en la dirección del flujo

En la Fig. 4 se distinguen de izquierda a derecha, primero la onda de expansión que viaja hacia la izquierda, una onda compuesta, una discontinuidad de contacto, una onda de choque lenta y una onda de expansión que viaja hacia la derecha. En lo referente a los incrementos temporales fueron necesarios utilizar 1000 pasos de tiempo con un número Courant de valor igual a 0.4, lográndose así tener una visión adecuada del efecto producido en las variables primitivas por las ondas intervinientes.

El método utilizado logra captar satisfactoriamente todas las discontinuidades y es importante también destacar que los resultados numéricos presentes están de acuerdo satisfactoriamente con aquellos publicados por Elaskar y Brito (2001), y Udrea (1999).

5 CONCLUSIONES

El problema del tubo de choque magnetogasdinámico constituye un interesante caso de estudio para evaluar el comportamiento de esquemas numéricos en flujos inestacionarios, compresibles y difusivos.

Los resultados obtenidos en el tubo de choque magnetogasdinámico han sido satisfactorios y concordantes a los alcanzados por otros miembros de la comunidad científica. Se destaca que la incorporación de los términos difusivos no modifica la naturaleza de la solución, la cual está dada por la parte hiperbólica, sino que producen pequeñas y localizadas modificaciones suavizando las discontinuidades.

El nuevo código 2D desarrollado ha sido validado con un “benchmark” exigente, demostrando ser robusto y preciso.

En un futuro cercano, se pretende que el código numérico posea la capacidad de simular flujos de interés en propulsión por plasma, aplicándolo en geometrías más complejas como

son la de los propulsores y modelando adecuadamente las condiciones de borde mecánicas y electromagnéticas.

6 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por: El programa “Análisis Conceptual de Propulsores de Plasma Estacionarios para Micro-Nanosatélites” y en particular el proyecto “Simulación Numérica de Flujos de Plasma Aplicados a Módulos Propulsivos” de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Río Cuarto; y el proyecto "Simulación por medio de volúmenes finitos de flujos magnetogasdinámicos y gas dinámicos con elevada entalpía" PIP No 5692 del CONICET.

A los miembros del Grupo de Mecánica computacional de la UNRC por los comentarios realizados.

REFERENCIAS

- F. Carrant, “Electric propulsion activities in U.S. industry”, *IEPC Paper: IEPC-99-01* (1999).
- H. Brito; E. Calcani; S. Elaskar; C. Brito; R. Duelli; S. Maglione; and L. Cravero, “A review of design and development works on the P4S-1 plasma thruster”. IAF-01-S.4.03 (2001).
- S. Elaskar, H. Brito, and J. Tamagno, “Numerical Simulation of High Enthalpy Pulse Facilities as an Exploratory Tool for PPT Modeling”, *51st International Astronautical Congress Paper No. 00-S.4.07* (2000).
- S. A. Elaskar, H. H. Brito, L. S. Maglione, N. Paoletti, C. Brito, “Estudios Teóricos en el Desarrollo del Propulsor de Plasma Pulsante P4S-1” *Congreso Argentino de Tecnología Espacial* (2005).
- J. S. Shang. “Recent research in magneto-aerodynamics”, *Progress in Aerospace Sciences, Vol 37* (2001).
- D. D’Ambrosio and D. Giordano, “Electromagnetic Fluid Dynamics for Aerospace Applications. Part I: Classification and Critical Review of Physical Models”, *35th AIAA Plasmadynamics and Laser Conference Paper 2004-2165*, (2004).
- R. Goldston and P. Rutherford “Introduction to Plasma Physics” *Institute of Physics Publishing*, London, 1995
- H. Yee; R. Warming and Harten, A, “Implicit total variations diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations”, *Journal Computational Physics, Vol. 57* (1985).
- K. Powell, “An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)”, *NASA Contract No NAS1-19480, ICASE* (1995).
- A. Zarachay; A. Malagoli and P. Collela, “A higher order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics”, *SIAM Journal on Scientific Computation, Vol. 15, pp. 263-284* (1994).
- B. Udreá, “An advanced implicit solver for MHD”, *PhD Thesis*, University of Washington (1999).
- S. Elaskar and H. Brito, “Solution of the magnetogasdynamics equations using a TVD scheme as a tool for electric propulsion”, *IEPC paper: IEPC-01-141*, (2001).
- M. Brio and C. Wu, “An upwind differencing scheme for the equations of magnetohydrodynamics”, *Journal Computational Physics, Vol. 45, pp. 400-422* (1988).
- L. S. Maglione, Sergio A. Elaskar, Héctor H. Brito “Numerical simulation of two-dimensional, non-steady, ideal magnetogasdynamics equations”. 28th International Electric Propulsion Conference. *IEPC. Paper N° 70*. (2003).