

DESARROLLO DE UN MODELO ESTRUCTURAL ANULAR APLICADO AL ESTUDIO DE PROPAGACIÓN RÁPIDA DE FISURAS EN TUBERÍAS PLÁSTICAS

DEVELOP OF AN ANULAR STRUCTURAL MODEL TO STUDY RAPID CRACK PROPAGATION IN PLASTIC PIPES

Luis Martínez^a, Javier L. Raffo^a

^a*Grupo de Mecánica Computacional y Experimental, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

Palabras Clave: RCP, Viga curva, métodos variacionales.

Resumen. El desarrollo de nuevas resinas para la fabricación de tuberías plásticas presurizadas con fluidos se ha convertido en el material por excelencia en la industria de la distribución de gas. Por lo tanto se ha reavivado el interés por la comprensión y modelado del fenómeno de fractura conocido como Propagación Rápida de Fisuras (RCP). En este trabajo se desarrolla un modelo mecánico de viga curva con restricciones particulares para ser utilizado en el estudio de RCP obteniéndose las ecuaciones diferenciales y sus correspondientes condiciones de contorno en forma natural mediante la aplicación de las técnicas del Cálculo de Variaciones. Luego, para la obtención de los resultados numéricos, se utiliza el método variacional de Ritz. Se presentan resultados comparados con otros autores y nuevos resultados de la viga curva de desplazamiento y de la forma que adopta.

Keywords: RCP, Curved Beams, variational methods.

Abstract. The development of new resins in the manufacture of pressurized plastic pipes with fluids has become the relevant material in the gas distribution industry. Therefore, interest in understanding and modeling the fracture phenomenon known as Rapid Crack Propagation (RCP) has been increased. In this work, a curved beam model with particular restrictions is developed to be used in the RCP study. The differential equations and their corresponding boundary conditions in a natural way by applying the Calculus of Variations techniques were obtained from the mechanical model. The Ritz variational method to obtain numerical results was used. Compared results with other authors and new results of the curved beam displacement and the shape that adopts are presented.

1 INTRODUCCIÓN

El modelo mecánico de una viga curva sometida a carga distribuida aportará información relevante para el estudio de la Propagación Rápida de Fisuras (RCP por sus siglas en inglés), este suceso se caracteriza por el crecimiento de una grieta frágil en estado cuasi-estacionario, capaz de propagarse a velocidades sónicas por todo el material, y producir consecuencias catastróficas.

Una gran cantidad de trabajos sobre vibraciones de vigas curvas con variadas características geométricas fueron publicados en revistas científicas. Sólo se presentan algunos. [Auciello y De Rosa \(1994\)](#) realizaron una revisión bibliográfica de lo realizado al momento en arcos circulares y mas adelante [Yang y otros \(2017\)](#) presentaron otra revisión de las diferentes teorías utilizadas al momento para el estudio de vibraciones de vigas curvas en el plano. Luego, [Raffo y Saavedra \(2018\)](#) analizaron el problema de vibraciones libres de una viga curva en el plano de dos tramos de longitud arbitraria, diferentes propiedades, con una rotula intermedia afectada por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales, ubicadas arbitrariamente utilizando el cálculo de variaciones para encontrar el problema de contorno y mediante la aplicación del método variacional de Ritz obtuvieron la solución analítica.

Algunos trabajos presentan el estudio de propagación rápida de fisuras en tuberías plásticas y que evidencian la necesidad de un modelo mecánico y matemático formal para su estudio. [O'Donoghue y Zhuang \(1999\)](#) estudiaron efecto de la incorporación de un dispositivo que contrarrestara los efectos generados por la propagación de una fisura tomando como modelo una viga de eje curvo. Luego, [Greenshields y Leever \(1999\)](#) estudiaron la correlación entre escala completa y pequeña escala de pruebas en estado estacionario para la propagación rápida de fisuras en tubería de gas de plástico. Son pocos los modelos mecánicos existentes que ayudan a comprender el fenómeno descripto. [Di Mauro \(2020\)](#) utilizó un modelo mecánico de viga de eje curvo con un resorte traslacional para obtener diferentes parámetros como la apertura de la fisura (COD), y la energía consumida por el avance de la fisura en tuberías plásticas. En el mismo se mostró la necesidad de un modelo mecánico para estudiar el efecto del RCP.

En este trabajo se propone un nuevo modelo mecánico de viga curva con resortes rotacionales y traslacionales distribuidos a lo largo de toda su longitud y con sus extremos elásticamente restringidos contra rotación y traslación para que en trabajos futuros pueda utilizarse en el estudio de RCP desde el inicio de la fisura hasta su apertura total. Se presenta el problema de contorno y ecuaciones diferenciales de la viga descripta que permitirán cuantificar efectos de las condiciones mecánicas circundantes de manera similar o mas precisa que el modelo presentado por [Di Mauro \(2020\)](#). Para la obtención de resultados numéricos se utiliza el método variacional de Ritz utilizando polinomios simples como funciones aproximantes.

2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

Sea una viga circular de dos tramos cuyo desplazamiento tangencial se denota por u y el transversal por w . Los extremos y puntos intermedios de la viga están elásticamente restringidos contra rotación y traslación, tal como se muestra en la [Figura 1](#). Los vínculos rotacionales están caracterizados por los coeficientes de rigidez r_1, r_x y r_2 , los vínculos traslacionales en dirección radial por t_1, t_x y t_2 , los vínculos traslacionales en dirección tangencial se denotan por s_1, s_x y s_2 .

Para analizar el comportamiento del sistema mecánico estudiado se utilizará como variable espacial al recorrido del arco denotado por x , el cual inicia en el extremo inferior y finaliza en el extremo superior en $x = l$, donde l denota la longitud total del arco circular estudiado.

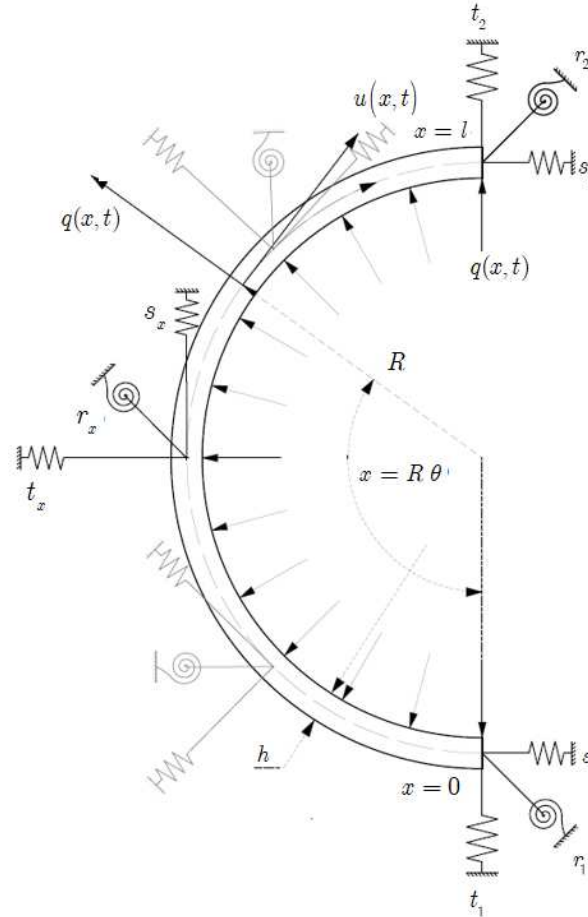


Figura 1: Viga de eje circular analizada restringida elásticamente.

Si el desplazamiento tangencial y radial de la línea media correspondiente a un punto x , en un instante t , es descrito por las funciones $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$, $\forall x \in [0, l]$, respectivamente, la energía cinética de la viga circular antes descrita está dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \right)^2 \right] dx, \quad (1)$$

donde ρA denota la densidad de masa lineal considerada constante a lo largo de toda la viga.

Por otra parte, la energía de deformación de la viga está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 + EA \left(\frac{w}{R}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

donde el producto EI denota la rigidez a la flexión que es constante a lo largo de la viga de eje circular y κ denota el radio de curvatura del eje de la viga. En consecuencia, la energía potencial total debida a la deformación elástica de la viga y de las restricciones elásticas y a la carga transversal está dada por

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{R} w(x,t) \right)^2 \right. \\
& + r_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right)^2 + s_x (u(x,t))^2 + t_x (w(x,t))^2 + 2q(x)w(x,t) \Big] dx \\
& + \sum_{i=1}^2 \left[r_i \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i,t) \right)^2 + s_i (u(c_i,t))^2 + t_i (w(c_i,t))^2 \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

donde $q(x)$ denota a la carga distribuida transversal al eje de la viga y para facilitar los desarrollos analíticos $c_1 = 0^+$ y $c_2 = l^-$. Las notaciones 0^+ y l^- indican que se usan límites laterales y derivadas laterales. Todas las restricciones elásticas están conectadas a un punto fijo. Las restricciones r_x, s_x y t_x se encuentran distribuidas en el intervalo $x = (0, l)$. Esto se esquematiza en la [Figura 1](#).

El principio de Hamilton establece que de todas las configuraciones posibles que el sistema puede tener, al pasar de una configuración inicial dada en un instante t_a a otra dada en un instante t_b , la que realmente adopta el sistema es la que hace estacionario al funcional

$$\begin{aligned}
F(u, w) = & \int_{t_a}^{t_b} L dt, \text{ en el espacio de funciones admisibles, donde el Lagrangeano } L \text{ es igual a} \\
L = & E_c - U.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el funcional energético de acuerdo con (1) y (3) está dado por

$$\begin{aligned}
F(u, w) = & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \int_0^l \left[\rho A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \right)^2 \right] - EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 \right. \right. \\
& - EA \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{R} w(x,t) \right)^2 - r_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right)^2 - s_x (u(x,t))^2 - t_x (w(x,t))^2 \\
& \left. \left. - 2q(x)w(x,t) \right] dx - \sum_{i=1}^2 \left[r_i \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c_i,t) \right)^2 + s_i (u(c_i,t))^2 + t_i (w(c_i,t))^2 \right] \right\} dt.
\end{aligned} \tag{4}$$

Al aplicar las técnicas del Cálculo de Variaciones al Funcional (4) ([Grossi, 2010](#)) se obtienen las ecuaciones diferenciales, condiciones de contorno y transición del sistema mecánico estudiado, las cuales están dadas por

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) + EI \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, t) \right] + \frac{EA}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{\kappa} w(x, t) \right] - r_x \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - s_x u(x, t) - t_x w(x, t) = qw(x, t), \quad (5)$$

$$EI \left[\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) \right] + r_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{EI}{\kappa} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t) + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) \right] - EA \left[\frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) + \frac{1}{R} w(0^+, t) \right] + s_1 u(0^+, t) = 0, \quad (7)$$

$$EI \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0^+, t) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0^+, t) \right] + t_1 w(0^+, t) = 0, \quad (8)$$

$$EI \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) \right] + r_2 \frac{\partial w}{\partial x}(l^-, t) = 0, \quad (9)$$

$$EA \left[\frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) + \frac{1}{R} w(l^-, t) \right] - \frac{EI}{R} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l^-, t) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(l^-, t) \right] + s_2 u(l^-, t) = 0, \quad (10)$$

$$-EI \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(l^-, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(l^-, t) \right] + t_2 w(l^-, t) = 0. \quad (11)$$

La presencia de los distintos coeficientes de rigidez permite generar distintas situaciones de apoyo. Por ejemplo, si se considera $t_1 = t_2 = \infty$ y $r_1 = r_2 = s_1 = s_2 = 0$, se obtiene el caso de una viga curva simplemente apoyada en sus extremos.

3 ANÁLISIS DEL CASO ESTÁTICO APLICADO AL ESTUDIO DE RCP UTILIZANDO EL MÉTODO DE RITZ

Para realizar un análisis del fenómeno de RCP, se propone utilizar un modelo de anillos contiguos para representar el volumen de control que va desde el inicio de la fisura con presión máxima hasta la apertura total donde se considera presión nula (Leevers 2012). Cada anillo se considera en estado estacionario y para representar el efecto que causan los anillos vecinos durante el crecimiento de la fisura, que es en otro plano, es que se utilizan los resortes rotacionales y traslacionales distribuidos a lo largo de la viga curva. Este efecto, fue considerado por un único resorte axial por Di Mauro (2020). Por lo tanto se utilizará el modelo de viga descrita en el apartado 2.

Dada la complejidad en la determinación de una solución exacta que resuelva las ecuaciones diferenciales (5), se recurre a utilizar el método variacional de Ritz (Reddy, 1986; Rektorys, 1980). El desarrollo del mismo llega al siguiente sistema luego de adimensionalizar el desarrollo mediante el cambio de variables $x = x/l$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x) - \frac{l}{R} \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}(x) - \frac{l}{R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x) \right) \right. \\
 & + \frac{Al^2}{I} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{l}{R} w(x) \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(x) + \frac{l}{R} \bar{w}(x) \right) \\
 & \left. + R_x \frac{\partial w}{\partial x}(x) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(x) + S_x u(x) \bar{u}(x) + T_x w(x) \bar{w}(x) \right] dx \\
 & + \sum_{i=1}^2 \left[R_i \frac{\partial w}{\partial x}(c_i) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}(c_i) + S_i u(c_i) \bar{u}(c_i) + T_i w(c_i) \bar{w}(c_i) \right] \\
 & = \int_0^l Qw(x),
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde \bar{u} y \bar{w} son las funciones auxiliares que deben cumplir las mismas condiciones que u y w , $R_x = \frac{r l^2}{EI}$, $S_x = \frac{s l^4}{EI}$, $T_x = \frac{t l^4}{EI}$, $R_i = \frac{r_i l}{EI}$, $S_i = \frac{s_i l^3}{EI}$, $T_i = \frac{t_i l^3}{EI}$, $i = 1, 2$ y $Q = \frac{ql^3}{EI}$. Se propone que los desplazamientos radial y tangencial estén representados por

$$\begin{aligned}
 u(x) = \bar{u}(x) &= \sum_{i=1}^M a_i \varphi_i, \forall x \in (0, l), \\
 w(x) = \bar{w}(x) &= \sum_{i=1}^M b_i \varphi_i, \forall x \in (0, l),
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$, $i = 1, 2$ es una base de polinomios simples dada por $\varphi_i = x^i$.

La aplicación del método de Ritz conduce al sistema:

$$[K]\{C\} = \{L\}. \tag{14}$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS Y DISCUSIONES

En esta sección se adopta un ángulo de la viga curva de 180° $q = 10^3$, $E = 207 \cdot 10^3$, sección rectangular de dimensiones $b = 3$ y h , salvo se indiquen otros valores.

M	Trabajo actual	Fórmula de Williams y otros (2011)
5	1.8483	
6	1.8860	1.8871
7	1.8952	
8	1.9289	
9	1.9292	
10	1.9295	
11	1.9295	
12	1.9295	

Tabla 1: Estudio de convergencia y comparación de resultados con la fórmula propuesta por Williams y otros (2011).

En la [Tabla 1](#) se presenta un estudio de convergencia para el caso de una viga curva empotrada en ambos extremos y sin resortes intermedios, con $R = 25$ y $h = 1$. Los valores de desplazamiento transversal máximo se comparan con los obtenidos mediante la fórmula

presentada por Williams y otros (2011). Se adopta en adelante $M = 10$ dado que es suficiente precisión para 4 dígitos.

En la Tabla 2 y Tabla 3 se comparan resultados del valor máximo de w para diferentes valores de R y de la relación R/h con los propuestos por Williams y otros (2011) para el caso de extremos empotrados y simplemente apoyados respectivamente, sin resortes intermedios.

$\frac{R}{h}$	R=25		R=50	
	Williams y otros (2011)	Trabajo actual	Williams y otros (2011)	Trabajo actual
25	-1.8871	-1.9295	-3.7742	-3.8591
10	-0.7548	-0.7695	-1.5097	-1.5390
5	-0.3774	-0.3807	-0.7548	-0.7614
2.5	-0.1887	-0.1828	-0.3774	-0.3655

$\frac{R}{h}$	R=100		R=200	
	Williams y otros (2011)	Trabajo actual	Williams y otros (2011)	Trabajo actual
25	-7.5483	-7.7181	-15.0966	-15.4363
10	-3.0193	-3.0780	-6.0386	-6.1561
5	-1.5097	-1.5229	-3.0193	-3.0457
2.5	-0.7548	-0.7311	-1.5097	-1.4622

Tabla 2: Comparación de los valores de deflexión para una viga de eje curvo empotrada en ambos extremos con los obtenidos mediante la fórmula presentada por Williams y otros (2011).

$\frac{R}{h}$	R=25		R=50	
	Williams y otros (2011)	Trabajo actual	Williams y otros (2011)	Trabajo actual
25	-1.5726	-1.6470	-3.1451	-3.2940
10	-0.6290	-0.6584	-1.2581	-1.3169
5	-0.3145	-0.3286	-0.6290	-0.6572
2.5	-0.1573	-0.1630	-0.3145	-0.3261

$\frac{R}{h}$	R=100		R=200	
	Williams y otros (2011)	Trabajo actual	Williams y otros (2011)	Trabajo actual
25	-6.2903	-6.5880	-12.5805	-13.1759
10	-2.5161	-2.6338	-5.0322	-5.2675
5	-1.2581	-1.3143	-2.5161	-2.6286
2.5	-0.6290	-0.6521	-1.2581	-1.3042

Tabla 3: Comparación de los valores de deflexión para una viga de eje curvo con apoyos simples en ambos extremos con los presentados en Williams y otros (2011).

En la Tabla 4 se presentan las formas que adoptan las funciones w, u y la viga curva

simplemente apoyada en sus extremos para $Q = 1000, 1000x, 1000(1 - x)$, con $R = 10$ y $h = 8$, sin resortes intermedios.

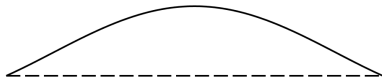
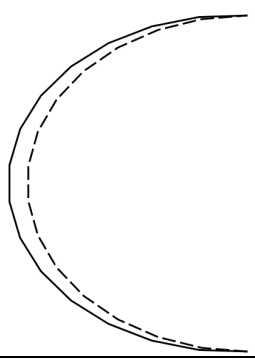
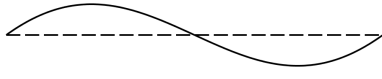
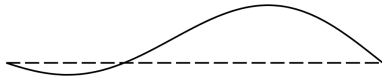
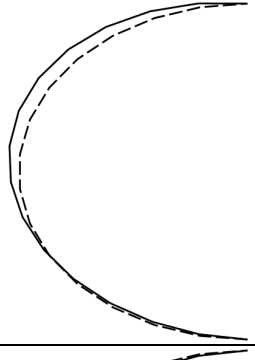
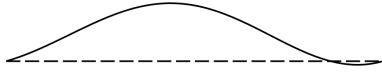
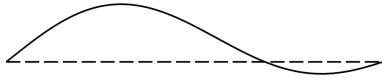
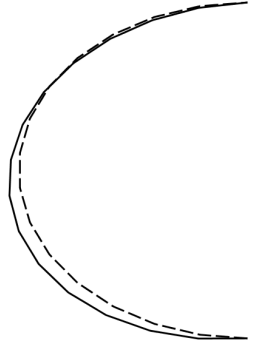
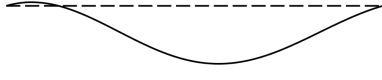
$Q(x)$		Formas de los desplazamientos transversal y axial	Forma que adopta la viga
1000	w		
	u		
1000x	w		
	u		
1000(1 - x)	w		
	u		

Tabla 4: Formas que adoptan w , u y la viga curva de 180° simplemente apoyada en sus extremos para diferentes valores de $Q(x)$.

En la [Tabla 5](#) se presentan las formas que adoptan las funciones w, u y la viga curva empotrada en un extremo y libre en el otro con $R = 10$ y $h = 8$, para $S_x = T_x = 0$, y diferentes valores de R_x .

5 CONCLUSIONES

Se obtuvieron las ecuaciones del problema de contorno y las correspondientes ecuaciones diferenciales de una viga circular homogénea con restricciones elásticas en los extremos y a lo largo de la viga, mediante las técnicas del cálculo de variaciones. El análisis se realizó teniendo en cuenta los desplazamientos tangenciales y radiales.

Se desarrolló un algoritmo utilizando el método variacional de Ritz para resolver el los

desplazamientos transversales y radiales de la viga curva cuando existe una carga distribuida radial.

Se compararon valores del desplazamiento con los obtenidos de la literatura actual y se presentaron nuevos valores del desplazamiento y la forma que adopta la viga en diferentes situaciones.

El modelo presenta las condiciones mecánicas necesarias para ser utilizado en el estudio del fenómeno de propagación rápida de fisura en tuberías plásticas. Tal como se ha estudiado en [Di Mauro \(2020\)](#), este nuevo modelo mecánico permitirá representar el entorno mecánico desde el inicio de la fisura hasta su apertura total. Esto se logra mediante el uso de las restricciones elásticas distribuidas a lo largo de la viga, para cuantificar efectos de las condiciones mecánicas durante el crecimiento de la fisura en el proceso de RCP en tuberías plásticas.

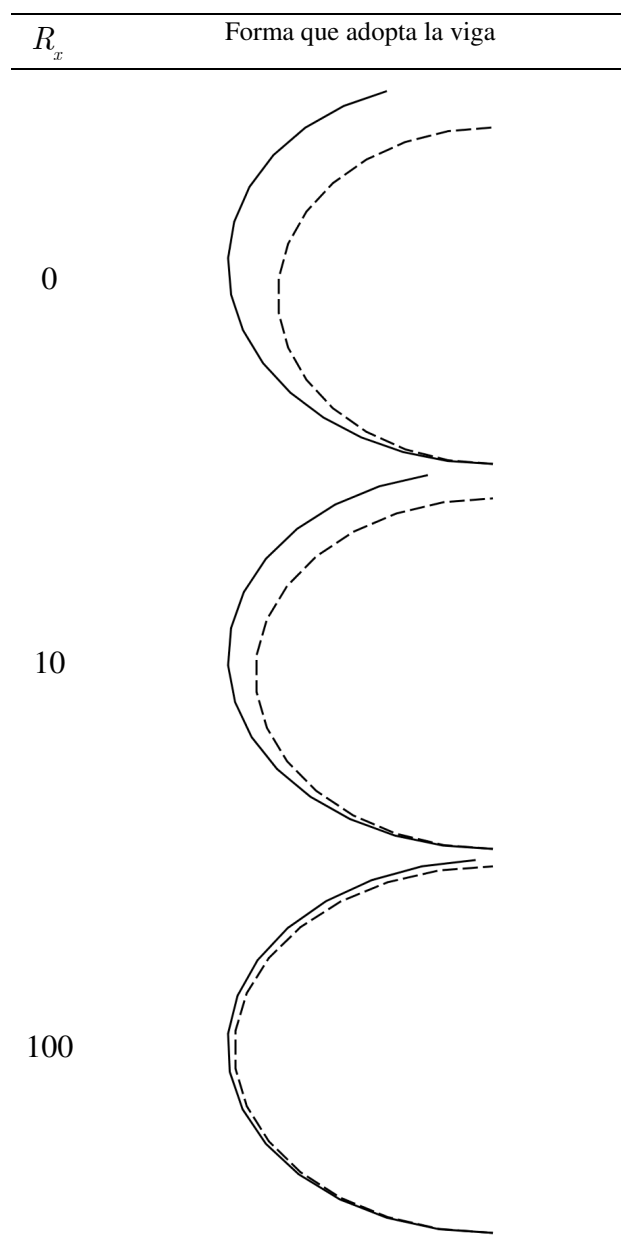


Tabla 5: Forma que adopta la viga curva empotrada-libre en sus extremos, para diferentes valores de R_x .

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional con auspicio del CONICET y los proyectos UTN5144 y 5531.

REFERENCIAS

- Auciello N. M. and De Rosa M. A., Free vibrations of circular arches: A review, *Journal of Sound and Vibration*, 176(4):433–458, 1994.
- Di Mauro, M. E., *Estudio y modelado del fenómeno de propagación rápida de fisura en tuberías plásticas*. Proyecto final de grado, Universidad Nacional de Mar del Plata, Facultad de Ingeniería, 2020.
- Greenshields C. J. and Leever P. S., Correlation between full scale and small scale steady state (S4) tests for rapid crack propagation in plastic gas pipe, *Plast. Rubber Compos. Process. Appl.*, vol. 28, no. 1, pp. 20–25, doi: 10.1179/146580199322913287, 1999.
- Greenshields C. J., Venizelos G. P. and Ivankovic A., A fluid-structure model for fast brittle fracture in plastic pipes, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, *Journal of Fluids and Structures* 14, 221-234, 2000.
- Grossi, R. O., *Cálculo de variaciones*. CIMNE, 2010.
- Kopp J. B., Fond C., and Hochstetter G., Rapid crack propagation in PA11: An application to pipe structure, *Eng. Fract. Mech.*, vol. 202, pp. 445–457, doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.08.025, 2018.
- Leevers P., An engineering model for rapid crack propagation along fluid pressurized plastic pipe, *Eng. Fract. Mech.*, vol. 96, pp. 539–557, doi: 2012.09.001, 2012.
- O'Donoghue P. E. y Zhuang Z., Finite element model for crack arrestor design in gas pipelines, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 22, no. 1, pp. 59–66, doi: 10.1046/j.1460-2695.1999.00139.x, 1999.
- Raffo J. L. y Saavedra A. F. Calambás, Vibraciones de una viga de eje curvo con una rótula elástica intermedia y condiciones de extremo elásticas”, *Mecánica Computacional*, 36, págs. 295-304, 2018.
- Reddy J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*. McGraw Hill, New York, 1986.
- Rektorys, K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Co., 1980.
- Williams, H.E., *Stress and displacement estimates for arches*. J. Struct. Eng. 137, 49–58. 2011.
- Yang F, Sedaghati R. and Esmailzadeh E., Free in-plane vibration of curved beam structures: A tutorial and the state of the art, *Journal of Vibration and Control*, 1–18, 2017.