

## INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN ECUACIONES INTEGRALES DE SUPERFICIE CON NÚCLEOS DÉBILMENTE SINGULARES Y PONDERADAS POR GALERKIN

**Jorge D'Elía y Laura Battaglia**

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), Universidad Nacional del Litoral - CONICET, Güemes 3450, 3000-Santa Fe, Argentina, e-mail: [jdelia@intec.unl.edu.ar](mailto:jdelia@intec.unl.edu.ar), [lbattaglia@ceride.gov.ar](mailto:lbattaglia@ceride.gov.ar), web page: <http://www.cimec.org.ar>*

**Palabras clave:** VBEM, Galerkin-BEM, doble integral de superficie, núcleo con singularidad débil, integración numérica de Gauss-Legendre, transformación generalizada de Duffy

**Resumen.** La discretización por Galerkin de ecuaciones integrales con un núcleo débilmente singular sobre triángulos planos inmersos en  $R^3$  da lugar a una integral de superficie doble, sobre cada par de triángulos de la malla, que, en definitiva, es una integral cuádruple. Cuando los triángulos no son contiguos el núcleo del integrando es regular y es suficiente una integración estándar de Gauss-Legendre (GL). En cambio, cuando son vecinos por una arista o por un vértice surge una singularidad débil por arista y por vértice, respectivamente. Por último, cuando los paneles coinciden, entonces todo el recinto de integración es una singularidad débil. Taylor (D. J. Taylor, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 51(7):1630–1637 (2003)) propone un método sistemático para evaluarlas, basado en una reordenación conveniente en el orden de integración que traslada la singularidad al origen y un uso generalizado de las transformaciones de Duffy que regularizan el integrando para así, finalmente, usar GL en tres de las coordenadas y una analítica en la cuarta. En este trabajo se describe una implementación modificada del esquema Taylor, en donde se opta simplemente por una integración numérica de GL en las cuatro coordenadas, como una primera opción cuando se usan diferentes funciones de Green con una singularidad débil. Se incluye un caso test de validación basado en los resultados de Wang-Atalla (W. Wang, N. Atalla, Comm. in Num Meth Eng, 13(0):1-7 (1997)).

## 1. INTRODUCCIÓN

En Galerkin-BEM interesa el caso del cálculo de integrales dobles de superficie sobre elementos de borde que están inmersos en el espacio tridimensional, cuyo integrando es ponderado por una función de Green, e.g. tales como en interacción fluido-estructura (Paquay (2002)), flujo de Stokes (Wang (2002)) o acústica (Schuhmacher (2000)). Por lo menos en los casos de una singularidad débil en la función de Green, se conocen expresiones analíticas que suelen ser muy elaboradas pero que a su vez son muy útiles a los efectos de validación. Por ejemplo, Eibert and Hansen (1995); Sievers et al. (2005) et al. las denominan como “integrales potenciales”, para las cuales proponen una estrategia que incluye la auto-integral (i.e. cuando la doble integral de superficie se hace sobre el mismo panel) en el caso de distribuciones lineales en la densidad superficial de carga sobre triángulos planos. Empero, para otros casos de funciones de Green con singularidad débil, lo típico es recurrir al menos a una integración semi-analítica o bien exclusivamente numérica. Por otra parte, en Burghignoli et al. (2004) se han propuesto métodos especiales de integración numérica en el caso de una singularidad de arista cuando se emplea una técnica de colocación por puntos.

En este trabajo se implementa una variación del esquema sistemático de Taylor (2003a,b), en el sentido de que se prefiere realizar una integración regularizada exclusivamente numérica en las cuatro integrales, para así prever otros integrandos que incluyan ya sea funciones multiplicativas regulares de mayor orden o bien otras funciones de Green con una singularidad débil. Además se clarifican detalles técnicos menores, por ejemplo, los extremos definitivos de todas las integrales sucesivas en cada uno de los casos, luego de introducir los diversos cambios de variables y re-ordenar el orden de integración.

## 2. TRANSFORMACIÓN A COORDENADAS SIMPLICES

En *Variational Boundary Element Method* (VBEM), o Galerkin-BEM, hay que evaluar integrales dobles sobre superficies que están inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . Típicamente, la superficie del continuo es discretizada con una malla de elementos de borde (o paneles). En tal caso, la integral de interacción

$$Z = \int_{A^p} dA_{\mathbf{x}}^p \int_{A^q} dA_{\mathbf{y}}^q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ; \quad (1)$$

se extiende sobre toda la superficie del panel fuente  $p$  y sobre toda la superficie del panel de observación  $q$ , simultáneamente, por lo que es una integral cuádruple. Su integrando contiene el núcleo  $f = hg$ , donde  $h = h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es una función multiplicativa regular y  $g = g(R)$  es una función de Green, con  $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  como la distancia euclídea entre los puntos de integración  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , ubicados sobre los paneles fuente  $p$  y de observación  $q$ , respectivamente. En el presente trabajo se asume que los paneles  $p, q$  son triángulos planos inmersos en  $\mathbb{R}^3$  y que la función de Green exhibe sólo una singularidad débil (i.e.  $O(1/R)$ ). Cuando los paneles  $p, q$  no son contiguos, el núcleo del integrando es regular y es suficiente una integración estándar de Gauss-Legendre (GL), pero cuando son vecinos por una arista o por un vértice, surge una singularidad débil por arista y por vértice, respectivamente y cuando los paneles coinciden todo el recinto de integración es una singularidad débil.

Para evaluar esta integral cuádruple en cada uno de estos casos, se transforman las coordenadas cartesianas 3D en otro de referencia simplicial 2D. En las coordenadas simpliciales se mapea cada triángulo al triángulo de referencia unitario definido por

$$(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1 \leq 1 ; 0 \leq \xi_2 \leq 1 . \quad (2)$$

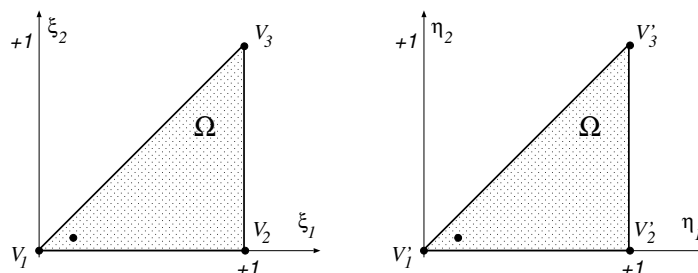


Figura 1: Triángulo de referencia unitario para los paneles  $p - q$ .

ver Fig. 1. Cada punto sobre este triángulo de referencia es mapeado a un triángulo inmerso en el espacio cartesiano 3D con vértices  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  usando

$$\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)\mathbf{V}_1 + (\xi_1 - \xi_2)\mathbf{V}_2 + \xi_2\mathbf{V}_3 . \tag{3}$$

Entonces, la integral cuádruple se transforma usando dos conjuntos de coordenadas simples, i.e. la  $(\xi_1, \xi_2)$  sobre el panel  $p$  y la  $(\eta_1, \eta_2)$  sobre el panel  $q$ , resultando

$$Z = \int_{A^p} dA_x^p \int_{A^q} dA_y^q f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = J^p J^q I ; \tag{4}$$

donde  $J^{p,q} = 2A^{p,q}$  son las jacobianas de los paneles  $p$  y  $q$ , respectivamente, e

$$I = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) . \tag{5}$$

### 3. DESCOMPOSICIÓN DEL DOMINIO

Cuando los paneles no coinciden o no son vecinos puede emplearse directamente la Ec. (5). En caso contrario, se la puede descomponer en seis integrales independientes mediante el uso de coordenadas relativas y cambiando el orden de integración. Entonces, introduciendo las coordenadas relativas

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \eta_1 - \xi_1 ; \\ \mu_2 &= \eta_2 - \xi_2 ; \end{aligned} \tag{6}$$

y reemplazando en (5) queda

$$I = \int_0^1 d\xi_1 \int_{-\xi_1}^{1-\xi_1} d\mu_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\xi_2}^{\mu_1+\xi_1-\xi_2} d\eta_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) ; \tag{7}$$

Taylor cambia en forma conveniente el orden de integración de  $(\mu_2, \xi_2, \mu_1, \xi_1)$  a  $(\xi_2, \xi_1, \mu_2, \mu_1)$ , y combina aquellas que tienen dominios solapados, obteniendo (para mayores detalles, ver Taylor (2003a,b))

$$I = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 ; \tag{8}$$

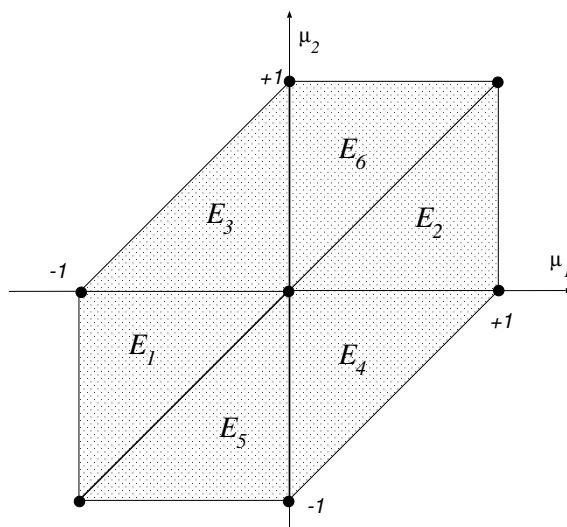


Figura 2: Región de integración en el plano de las diferencias de coordenadas  $\mu_1, \mu_2$ .

donde las seis integrales  $E_n$  son

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_{\mu_1}^0 d\mu_2 \int_{-\mu_1}^1 d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1 + \mu_1 - \mu_2} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ; \\
 E_2 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{\mu_1} d\mu_2 \int_0^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ; \\
 E_3 &= \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_0^{1+\mu_1} d\mu_2 \int_{\mu_2 - \mu_1}^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1 + \mu_1 - \mu_2} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ; \\
 E_4 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1 - 1}^0 d\mu_2 \int_{-\mu_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ; \\
 E_5 &= \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_{-1}^{\mu_1} d\mu_2 \int_{-\mu_2}^1 d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ; \\
 E_6 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1}^1 d\mu_2 \int_{\mu_2 - \mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1 - \mu_2 + \mu_1} d\xi_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) ;
 \end{aligned} \tag{9}$$

La región de integración vista en el plano  $\mu_1, \mu_2$  consiste en seis triángulos con un vértice común en el origen, ver Fig. 2.

#### 4. PANELES COINCIDENTES

Taylor encuentra que cuando los paneles coinciden, la simetría permite reducir las seis integrales a las siguientes tres

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{\mu_1} d\mu_2 \int_0^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})] ; \\
 I_2 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1 - 1}^0 d\mu_2 \int_{-\mu_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1} d\xi_2 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})] ; \\
 I_3 &= \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1}^1 d\mu_2 \int_{\mu_2 - \mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1 + \mu_1 - \mu_2} d\xi_2 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})] ;
 \end{aligned} \tag{10}$$

	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$\mu_1$	$\omega$	$\omega x$	$\omega x$
$\mu_2$	$\omega x$	$\omega(x - 1)$	$\omega$

Tabla 1: Las transformaciones de coordenadas de Duffy propuestas por Taylor en el caso de paneles coincidentes.

	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$\xi_1$	$(1 - \mu_1)\tilde{\xi}_1$	$(1 - \mu_1 + \mu_2)\tilde{\xi}_1 - \mu_2$	$(1 - \mu_2)\tilde{\xi}_1 + \mu_2 - \mu_1$
$\xi_2$	$\mu_1\tilde{\xi}_2$	$(\xi_1 + \mu_2)\tilde{\xi}_2 - \mu_2$	$(\xi_1 - \mu_2 + \mu_1)\tilde{\xi}_2$
$J_n$	$(1 - \mu_1)\xi_1$	$(1 - \mu_1 + \mu_2)(\xi_1 + \mu_2)$	$(1 - \mu_2)(\xi_1 + \mu_2 + \mu_1)$

Tabla 2: Las coordenadas del punto de integración  $\xi_1, \xi_2$  sobre el panel  $p$ , en función de las variables de integración  $\mu_1, \mu_2, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$  para las autointegrales  $I_1, I_2$  y  $I_3$ .

Introduciendo en la Ec. (10), las transformaciones generalizadas de Duffy  $\omega, x$  propuestas por Taylor e indicadas en la Tabla 1, y las variables normalizadas  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$ , dadas en la Tabla 2, cada  $I_n$  queda regularizada y lista para programar usando la expresión

$$I_n = J_a J_n \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx \int_0^1 d\tilde{\xi}_1 \int_0^1 d\tilde{\xi}_2 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})]; \tag{11}$$

para  $0 \leq n \leq 3$ , donde la jacobiana común  $J_a = \omega$  es debida a las transformaciones generalizadas de Duffy resumidas en la Tabla 1, ver también la Fig. 3. Cada jacobiana  $J_n$ , proviene del mapeo de los intervalos  $\xi_{1,\min} \leq \xi_1 \leq \xi_{1,\max}$  y del  $\xi_{2,\min} \leq \xi_2 \leq \xi_{2,\max}$ , a los normalizados  $0 \leq \tilde{\xi}_1 \leq 1$  y  $0 \leq \tilde{\xi}_2 \leq 1$ , ver Tabla 2. Las dependencias de las variables  $\xi_1, \xi_2$  con respecto a las variables de integración  $\mu_1, \mu_2, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$  están resumidas en la misma Tabla 2. Notar que las variables  $\xi_1, \xi_2$  definen la posición del primer punto de integración sobre el panel considerado, mientras que las coordenadas relativas  $\mu_1, \mu_2$  son definidas por las transformaciones de Duffy. Usando ambas y la Ec. (6) se conoce la posición del segundo punto de integración  $\eta_1, \eta_2$  sobre el mismo panel.

### 5. ARISTA COMÚN

Si dos paneles comparten una arista, entonces la geometría es formulada de modo que los vértices comunes, en numeración local, son el 1 y el 2. A continuación, para regularizar cada una de las integrales  $E_n$ , Taylor generaliza las transformaciones de Duffy mediante las expresiones

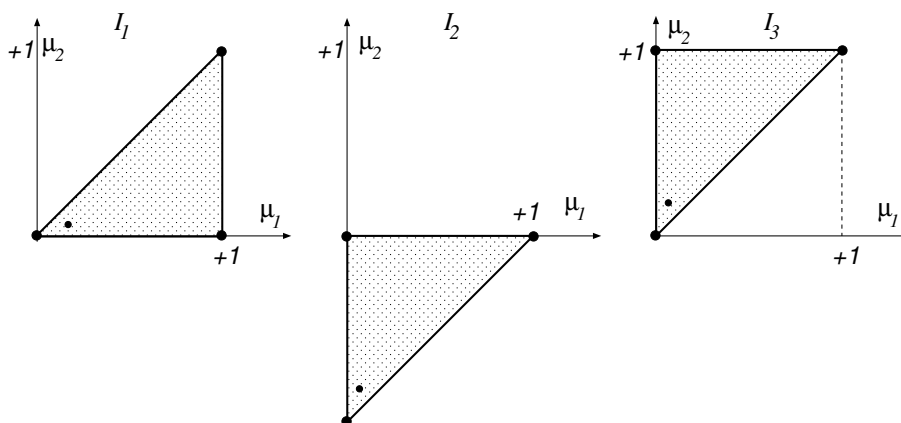


Figura 3: Regiones de integración para las auto-integrales  $I_1, I_2$  e  $I_3$ .

resumidas en la Tabla (3), donde todas tienen el mismo jacobiano  $J_b = x_1\omega^2$ . Tomando cada

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$\mu_1$	$-\omega x_1$	$\omega x_1 x_2$	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$
$\mu_2$	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$	$\omega x_1(1 - x_2)$	$\omega x_1(1 - x_2)$	$-\omega x_1$	$\omega x_1$

Tabla 3: Las transformaciones de Duffy generalizadas por Taylor para cada una de las seis integrales en el caso de compartir los vértices  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ .

integral  $E_n$  por separado, empezando con su definición y efectuando la serie de pasos resumidos en el Apéndice quedan regularizadas y listas para programar usando la expresión común

$$E_n = J_b \tilde{J} \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 d\tilde{\xi}_1 (...); \tag{12}$$

para  $0 \leq n \leq 6$ , en donde la jacobiana  $J_b = x_1\omega^2$  es debida a la transformación generalizada de Duffy, mientras que la  $\tilde{J} = 1 - \omega$ , proviene del mapeo del intervalo  $\xi_{1,\min} \leq \xi_1 \leq \xi_{1,\max}$  al  $0 \leq \tilde{\xi}_1 \leq 1$ . Las dependencias de las variables  $\xi_1, \xi_2$  con respecto a las de integración  $(\omega, x_1, x_2, \tilde{\xi}_1)$  en cada  $E_n$  están resumidas en las Tablas 4-5. Notar que las variables  $\xi_1, \xi_2$  definen la posición del punto de integración sobre el panel  $p$ , mientras que las coordenadas relativas  $\mu_1, \mu_2$  son definidas por las coordenadas generalizadas de Duffy  $(\omega, x_1, x_2)$ , las cuales son tres de las variables de integración numérica. Usando ambas y la Ec. (6) se conoce la posición del punto de integración  $\eta_1, \eta_2$  sobre el panel  $q$ .

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$\xi_1$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega(1 - x_1)$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega$
$\xi_2$	$\omega(1 - x_1 + x_1 x_2)$	$\omega(1 - x_1)$	$\omega(1 - x_1)$

Tabla 4: Las coordenadas del punto de integración  $\xi_1, \xi_2$  sobre el panel  $p$ , en función de las variables de integración  $\omega, x_1, x_2, \tilde{\xi}_1$  para las integrales  $E_1, E_2$  y  $E_3$ , en el caso de compartir los vértices  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ .

	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$\xi_1$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega(1 - x_1 x_2)$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega$	$(1 - \omega)\tilde{\xi}_1 + \omega(1 - x_1 x_2)$
$\xi_2$	$\omega(1 - x_1 x_2)$	$\omega$	$\omega(1 - x_1)$

Tabla 5: Idem Tabla 4 para las integrales  $E_4, E_5$  y  $E_6$ .

### 6. VÉRTICE COMÚN

Si dos paneles comparten un vértice, entonces la geometría es formulada de modo que el vértice común, en numeración local, es el 1, en cuyo caso la distancia

$$R = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (\eta_1 - \xi_1)\mathbf{V}_1 + (\xi_1 - \xi_2)\mathbf{V}_2 + \xi_2\mathbf{V}_3 - (\eta_1 - \xi_1)\mathbf{V}'_2 - \eta_2\mathbf{V}'_3; \tag{13}$$

es nula cuando  $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ , lo cual es el origen del sistema coordenado 4D simplicial. En tal caso, Taylor empieza con la integral

$$I = \int_0^1 d\tilde{\xi}_1 \int_0^{\tilde{\xi}_1} d\tilde{\xi}_2 \int_0^1 d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}); \tag{14}$$

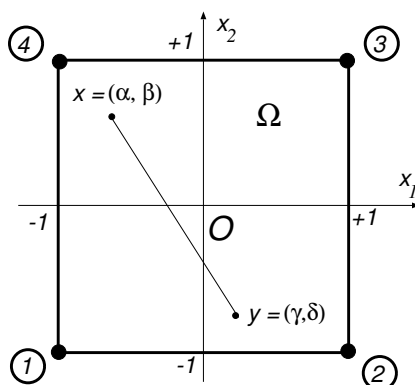


Figura 4: Caso test de Wang-Atalla: el dominio de integración  $\Omega$  de la doble integral de superficie de  $h_k/r$  es el cuadrado de lado  $L = 2$ , centrado al origen, donde  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ , con  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ , y las funciones multiplicativas regulares  $h_k$  son detalladas en la Tabla.

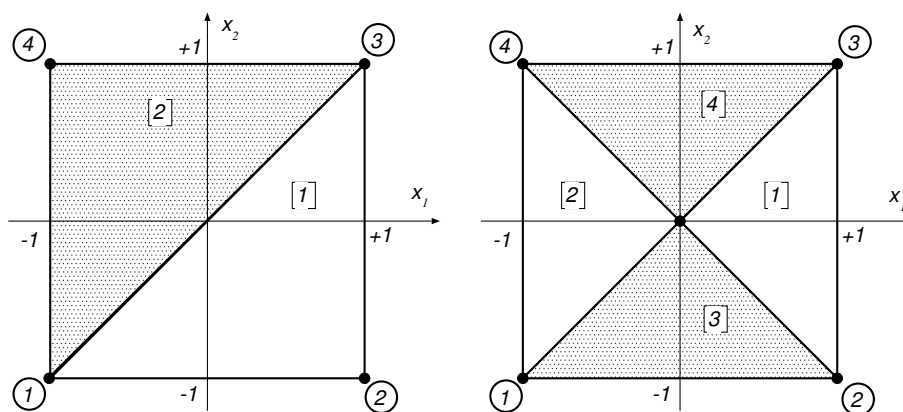


Figura 5: Dos particiones simples del cuadrado de Wang-Atalla. Izq.: con dos triángulos: solo hay una singularidad de arista. Der.: con cuatro triángulos con un vértice común en el origen: hay singularidades de aristas y singularidades de vértice.

cuyo dominio de integración lo re-escribe como

$$I = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\eta_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})]; \quad (15)$$

el cual tiene una singularidad aislada en el origen y lo regulariza directamente con una única transformación 4D de Duffy generalizada, resumida en la Tabla 6, resultando

$$I = J_c \int_0^1 d\omega \int_0^1 dz_1 \int_0^1 dz_2 \int_0^1 dz_3 [f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})]; \quad (16)$$

con la jacobiana  $J_c = z_2\omega^3$ .

$\xi_1$	$\xi_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
$\omega$	$\omega z_1$	$\omega z_2$	$\omega z_2 z_3$

Tabla 6: La transformación de Duffy generalizada por Taylor a 4D en el caso de compartir el vértice  $\mathbf{V}_1$ .

## 7. CASO TEST

Como caso test se opta el considerado en el trabajo de Wang and Atalla (1997), en el cual hay que evaluar la integral

$$Z = \int_{-1}^{+1} d\alpha \int_{-1}^{+1} d\beta \int_{-1}^{+1} d\gamma \int_{-1}^{+1} d\delta \frac{h_k}{r}; \quad (17)$$

cuyo dominio de integración  $\Omega$  es el cuadrado plano de lado  $L = 2$ , centrado al origen, ver Fig. (4),  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$  es la distancia euclídea entre los puntos de integración  $\mathbf{x} = (\alpha, \beta)$  e  $\mathbf{y} = (\gamma, \delta)$ , respectivamente, mientras que  $h_k = h_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  son las funciones multiplicativas regulares tests resumidas en la Tabla 7. A los efectos de reducir este caso a solamente triángulos

$h_k$	valor exacto	Wang-Atalla	$\varepsilon_r$ %	partición 1	$\varepsilon_r$ %	partición 2	$\varepsilon_r$ %
1	23.785677	23.785677	0	23.472208	1.33	23.566023	0.93
$\alpha\beta\gamma\delta$	0.705130	0.705130	0	0.690611	2.10	0.681291	3.50
$(\alpha\beta\gamma\delta)^2$	0.337057	0.337057	0	0.331933	1.50	0.326454	3.25
$(\alpha\beta\gamma\delta)^3$	0.083744	0.083744	0	0.080168	4.60	0.075618	10.75
$(\alpha\beta\gamma\delta)^4$	0.057834	0.052283	10	0.052148	10.90	0.048659	18.85

Tabla 7: (a) las funciones multiplicativas regulares tests  $h_k$ ; (b) los valores obtenidos por Wang-Atalla usando integración numérica cuádruple diseñada especialmente para cuadriláteros con una singularidad débil en el integrando, y (c) los valores obtenidos en el presente trabajo por descomposición en triángulos y sumando. Tanto en (b) como en (c) se usaron  $n_{1d} = 4^4 = 256$  puntos de integración (cuatro en cada coordenada) para cada interacción  $Z_{ij}$ .

se tiene en cuenta que, cuando se divide el dominio  $\Omega$  en  $N$  subdominios  $\Omega_i$ , tales que

$$\begin{aligned} \Omega &= \cup \Omega_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N; \\ \Omega_i \cap \Omega_j &= \emptyset \quad \text{con } i \neq j; \end{aligned} \quad (18)$$

se verifica la propiedad aditiva

$$Z = \sum_{i,j=1}^N Z_{ij}; \quad (19)$$

donde

$$Z_{ij} = \int_{\Omega_i} dA_i \int_{\Omega_j} dA_j \frac{h_k}{r} \quad ; \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (20)$$

Se consideran dos particiones simples del cuadrado que son mostradas en la Fig. (5): la primera consiste en dos triángulos que se tocan en una arista (dando lugar a una singularidad de arista, izq.), y la segunda en otra con cuatro triángulos que comparten un vértice común al origen (dando lugar a singularidades de aristas y de vértice, der.). En la misma Tabla 7 se indican: (a) las funciones multiplicativas regulares  $h_k$  empleadas; (b) los valores obtenidos por Wang-Atalla usando integración numérica cuádruple diseñada especialmente para cuadriláteros con una singularidad débil en el integrando, y (c) los valores obtenidos en el presente trabajo por descomposición en triángulos y sumando todas las interacciones. Tanto en (b) como en (c) se usaron  $n_{1d} = 4^4 = 256$  puntos de integración (cuatro en cada coordenada) para cada interacción  $Z_{ij}$ . Los valores mostrados en dicha tabla permiten afirmar que la concordancia puede considerarse como aceptable. De todos modos, repitiendo el mismo experimento numérico con un integrador que tiene en cuenta la autoinfluencia pero ignora las singularidades de arista y de vértice, no se encontró grandes diferencias en la prestación.



## 8. CONCLUSIONES

Los extremos de integración parcial en la variable  $\xi$ , en cada una de las integrales  $E_n$  dadas por las Ecs. (27,33, 40,47, 54,60), no son presentados ni discutidos en el trabajo de Taylor, pero interesan en el caso de optar por una integración numérica en esa variable, como se ha hecho en el presente trabajo. El caso test mostrado fue diseñado relativamente simple como para evaluar las prestaciones de los integradores en las combinaciones de: (a) autoinfluencia y singularidad de arista, (b) autoinfluencia, singularidad de arista y singularidad de vértice y (c): autoinfluencia e ignorar las singularidades de arista y de vértice.

### Agradecimientos

Los autores agradecen especialmente a Alberto Cardona por motivar este trabajo, el cual fue realizado utilizando recursos del *Free Software Foundation*, *GNU Project* tales como GNU Linux OS y Scilab, y financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina, proyectos PIP-02552/00 y PIP-5271/05), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, Argentina, proyectos PICT 12-14573/2003 y PME 209/2003, y la Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, proyecto CAI+D 2005-10-64).

## 9. APÉNDICE

Se resumen algunas de las transformaciones no consideradas o no documentadas en el trabajo de Taylor para el caso de paneles con una arista común. Notar que en las Ecs. (27-60) siguientes:

- i) El mapeo final del intervalo  $s_2 \leq \xi_1 \leq 1$  al intervalo normalizado  $0 \leq \tilde{\xi}_1 \leq 1$  produce el mismo jacobiano adicional  $\tilde{J} = 1 - \omega$  que se introdujo en la Ec. (12);
- ii) La variable auxiliar  $s_2$  que es introducida en el transcurso de las siguientes deducciones luego se la identifica con la variable de integración  $\omega$ , es decir,  $s_2 \equiv \omega$ .

### 9.1. Integral $E_1$

Empezando con

$$E_1 = \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_{\mu_1}^0 d\mu_2 \int_{-\mu_1}^1 d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1 + \mu_1 - \mu_2} d\xi_2 (\dots); \quad (21)$$

introduciendo las variables auxiliares  $z_1 = -\mu_1$  y  $z_2 = -\mu_2$ ,

$$E_1 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_{z_1}^1 d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1 + z_2 - z_1} d\xi_2 (\dots); \quad (22)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_{z_1}^1 d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1 + z_2 - z_1} d\xi_2 (\dots) = \int_{z_2}^{1+z_2-z_1} d\xi_2 \int_{\xi_2+z_1-z_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (23)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2 + z_1 - z_2$ ,

$$\int_{z_2}^{1+z_2-z_1} d\xi_2 \int_{\xi_2+z_1-z_2}^1 d\xi_1 (\dots) = \int_{z_1}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (24)$$

reemplazando

$$E_1 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_{z_1}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (25)$$

las integrales en  $z_1, z_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_1 = \int_0^1 ds_2 \int_0^{s_2} dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (26)$$

usando la primera transformación generalizada de Duffy queda

$$E_1 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_\omega^1 d\xi_1 (\dots). \quad (27)$$

## 9.2. Integral $E_2$

Empezando con

$$E_2 = \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{\mu_1} d\mu_2 \int_0^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 (\dots); \quad (28)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_0^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} d\xi_2 = \int_0^{1-\mu_1} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (29)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2 + \mu_1$ ,

$$\int_0^{1-\mu_1} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots) = \int_{\mu_1}^1 ds_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (30)$$

reemplazando

$$E_2 = \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{\mu_1} d\mu_2 \int_{\mu_1}^1 ds_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (31)$$

las integrales en  $\mu_1, \mu_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_2 = \int_0^1 ds_2 \int_0^{s_2} d\mu_1 \int_0^{\mu_1} d\mu_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (32)$$

y usando la segunda transformación generalizada de Duffy queda

$$E_2 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^{s_2-\mu_1} d\xi_1 (\dots). \quad (33)$$

### 9.3. Integral $E_3$

Empezando con

$$E_3 = \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_0^{1+\mu_1} d\mu_2 \int_{\mu_2-\mu_2}^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1+\mu_1-\mu_2} d\xi_2 (\dots); \quad (34)$$

introduciendo la variable auxiliar  $z_1 = -\mu_1$ ,

$$E_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} d\mu_2 \int_{\mu_2+z_1}^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1-z_1-\mu_2} d\xi_2 (\dots); \quad (35)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_{\mu_2+z_1}^1 d\xi_1 \int_0^{\xi_1-z_1-\mu_2} d\xi_2 (\dots) = \int_0^{1-z_1-\mu_2} d\xi_2 \int_{\xi_2+z_1+\mu_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (36)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2 + z_1 + \mu_2$ ,

$$\int_0^{1-z_1-\mu_2} d\xi_2 \int_{\xi_2+z_1+\mu_2}^1 d\xi_1 (\dots) = \int_{z_1+\mu_2}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (37)$$

reemplazando

$$E_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} d\mu_2 \int_{z_1+\mu_2}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (38)$$

las integrales en  $z_1, \mu_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_3 = \int_0^1 ds_2 \int_0^{s_2} dz_1 \int_0^{s_2-z_1} d\mu_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (39)$$

y usando la tercera transformación generalizada de Duffy queda

$$E_3 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_\omega^1 d\xi_1 (\dots). \quad (40)$$

### 9.4. Integral $E_4$

Empezando con

$$E_4 = \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1-1}^0 d\mu_2 \int_{-\mu_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1} d\xi_2 (\dots); \quad (41)$$

introduciendo la variable auxiliar  $z_2 = -\mu_2$ ,

$$E_4 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-\mu_1} dz_2 \int_{z_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1} d\xi_2 (\dots); \quad (42)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_{z_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1} d\xi_2 = \int_{z_2}^{1-\mu_1} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \quad (43)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2 + \mu_1$ ,

$$\int_{z_2}^{1-\mu_1} d\xi_2 \int_{\xi_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 = \int_{\mu_1+z_2}^1 d\xi_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 \quad (44)$$

reemplazando

$$E_4 = \int_0^1 d\mu_1 \int_0^{1-\mu_1} dz_2 \int_{\mu_1+z_2}^1 ds_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (45)$$

las integrales en  $\mu_1, z_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_4 = \int_0^1 ds_2 \int_0^{s_2} d\mu_1 \int_0^{s_2-\mu_1} dz_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (46)$$

y usando la cuarta transformación generalizada de Duffy queda

$$E_4 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots). \quad (47)$$

### 9.5. Integral $E_5$

Empezando con

$$E_5 = \int_{-1}^0 d\mu_1 \int_{-1}^{\mu_1} d\mu_2 \int_{-\mu_2}^1 d\xi_1 \int_{-\mu_2}^{\xi_1} d\xi_2 (\dots); \quad (48)$$

introduciendo las variables auxiliares  $z_1 = -\mu_1$  y  $z_2 = -\mu_2$ ,

$$E_5 = \int_0^1 dz_1 \int_{z_1}^1 dz_2 \int_{z_2}^1 d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1} d\xi_2 (\dots); \quad (49)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_{z_2}^1 d\xi_1 \int_{z_2}^{\xi_1} d\xi_2 = \int_{z_2}^1 d\xi_2 \int_{\xi_2}^1 d\xi_1 \quad (50)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2$ ,

$$\int_{z_2}^1 d\xi_2 \int_{\xi_2}^1 d\xi_1 = \int_{z_2}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 \quad (51)$$

reemplazando

$$E_5 = \int_0^1 dz_1 \int_{z_1}^1 dz_2 \int_{z_2}^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (52)$$

las integrales en  $z_1, z_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_5 = \int_0^1 ds_2 \int_{s_2}^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots); \quad (53)$$

y usando la quinta transformación generalizada de Duffy

$$E_5 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{s_2}^1 d\xi_1 (\dots). \quad (54)$$

## 9.6. Integral $E_6$

Empezando con

$$E_6 = \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1}^1 d\mu_2 \int_{\mu_2-\mu_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1-\mu_2+\mu_1} d\xi_2 (\dots); \quad (55)$$

intercambiando el orden de integración en

$$\int_{\mu_2-\mu_2}^{1-\mu_1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1-\mu_2+\mu_1} d\xi_2 = \int_0^{1-\mu_2} d\xi_2 \int_{\xi_2+\mu_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 \quad (56)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $s_2 = \xi_2 + \mu_2$ ,

$$\int_0^{1-\mu_2} d\xi_2 \int_{\xi_2+\mu_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 = \int_{\mu_2}^1 ds_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 \quad (57)$$

reemplazando

$$E_6 = \int_0^1 d\mu_1 \int_{\mu_1}^1 d\mu_2 \int_{\mu_2}^1 ds_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (58)$$

las integrales en  $\mu_1, \mu_2, s_2$  representan el volumen de un tetraedro y, permutando en forma cíclica,

$$E_6 = \int_0^1 ds_2 \int_{s_2}^1 d\mu_1 \int_0^{s_2} d\mu_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots); \quad (59)$$

y usando la sexta transformación generalizada de Duffy

$$E_6 = J_b \int_0^1 d\omega \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{s_2-\mu_1}^{1-\mu_1} d\xi_1 (\dots). \quad (60)$$

## REFERENCIAS

- Burghignoli P., Pajewski L., Frezza F., and Galli A. Improved quadrature formulas for boundary integral equations with conducting or dielectric edge singularities. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 52(2):373–379, 2004.
- Eibert T.F. and Hansen V. On the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 43(12):1499–1502, 1995.
- Paquay S. *Développement d'une méthodologie de simulation numérique pour les problèmes vibro-acoustiques couplés intérieurs/extérieurs de grandes taille*. Ph.D. thesis, Faculté des Sciences Appliquées, Liege, 2002.
- Schuhmacher A. *Sound source reconstruction using inverse sound field calculations*. Ph.D. thesis, Departamente of Acoustic Technology, Technical University of Denmark, 2000.
- Sievers D., Eibert T.F., and Hansen V. Correction to “on the calculation of potential integrals for linear source distributions on triangular domains”. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 53(9):3113–3113, 2005.
- Taylor D.J. Accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin IFIE solutions. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 51(7):1630–1637, 2003a.

- Taylor D.J. Errata to “accurate and efficient numerical integration of weakly singular integrals in Galerkin IFIE solutions”. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 51(9):2543–2543, 2003b.
- Wang W. and Atalla N. A numerical algorithm for double surface integrals over quadrilaterals with a  $1/r$  singularity. *CNME*, 13:0–0, 1997.
- Wang X. *Fast Stokes: A Fast 3-D Fluid Simulation Program for Micro-Electro-Mechanical Systems*. Ph.D. thesis, MIT, 2002.