

UN MODELO REOLOGICO TRIDIMENSIONAL

Fernando S. Buezas^{a,b}

^a*Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

^b*Instituto de Física del Sur, Bahía Blanca, Argentina*

Resumen. Se deduce un modelo viscoelástico de tipo Zener en tres dimensiones compatible con la termodinámica. En dicha deducción, se utiliza ingeniosamente el procedimiento de Coleman Noll a la inversa. Se comienza con la descomposición del tensor del gradiente de deformación en una parte elástica y una parte viscosa a la manera de Kröner-Lee, muy utilizada en teorías elastoplásticas. Para la parte elástica se propone un modelo no lineal consistente con las formulaciones constitutivas de los elastómeros a grandes deformaciones. La parte viscosa está acoplada al campo mecánico mediante ecuaciones de evolución para el tensor derecho de Cauchy Green. El planteamiento se realiza íntegramente en la representación material del continuo (lagrangeana) y las soluciones se aproximan por elementos finitos. Finalmente, el modelo numérico se compara y contrasta con un experimento físico realizado con un reómetro real.

Keywords: Modelado Constitutivo, Viscoelasticidad, Formulación Material.

Abstract. Deduction of a viscoelastic model of the Zener type consistent with thermodynamics. In order to do this, the Coleman Noll procedure is ingeniously used in reverse. The procedure starts by a multiplicative decomposition of the deformation gradient tensor into an elastic part and a viscous part in the Kröner-Lee manner, generally used in elastoplastic theories. For the elastic part, a nonlinear model consistent with the constitutive formulations of elastomers at large deformations is proposed. The viscous part is coupled to the mechanic field by an evolution equations for the right Cauchy Green tensor. The approach is made entirely in the material representation of the continuum and the solutions are approximated by finite elements. Finally, the numerical model is matched and contrasted with a physical experiment with a real rheometer.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a sus propiedades disipativas, los materiales viscoelásticos tienen muchas aplicaciones tecnológicas tales como el amortiguamiento en el impacto, absorción de vibraciones y ruido, estabilizadores, cascos de seguridad, almohadas y colchones, etc. Disponer de teorías y modelos que predigan el comportamiento de estos materiales es fundamental para el diseño.

La principal dificultad en el desarrollo de dichos modelos es dada por la naturaleza no lineal del material. Esto es debido a las grandes deformaciones que suelen estar sometidos. Además existe el problema de la dependencia cinemática, es decir que el problema es dependiente del tiempo.

Respecto a la dependencia temporal se han propuesto muchas formulaciones lineales y no lineales sin tener en cuenta la dimensión o geometría. Es decir: formulaciones cero dimensionales respecto del campo material interpretables en términos de resortes y amortiguadores como son los modelos tipo Maxwell, Kelvin-Voigt y el modelo de sólido viscoelástico lineal estándar que combina estos dos [Freydental y Geyringer \(1962\)](#).

Para las formulaciones que tienen en cuenta la geometría o campo se han propuesto teorías basadas en integrales de convolución que descomponen la dependencia temporal del gradiente de deformaciones desde $-\infty$ a τ y desde τ hasta el tiempo actual t ([Petiteau et al. \(2013\)](#); [Green y Rivlin \(1957\)](#)); y en modelos que tienen en cuenta ecuaciones de evolución para la parte viscosa ([Green y Tobolsky \(1946\)](#)). En los casos lineales se suelen proponer técnicas recursivas o incrementales ver [Freydental y Geyringer \(1962\)](#) y en los casos no lineales se acoplan a las ecuaciones de evolución la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green (de naturaleza espacial) [Pascon y Coda \(2017\)](#); [Hasanpour et al. \(2009\)](#). Estos modelos son planteados en una mezcla euleriana y lagrangeana.

En este trabajo se presenta una deducción de sus ecuaciones constitutivas de un material viscoelástico en deformaciones y rotaciones finitas y se resuelve por elementos finitos a fines de comparar la respuesta con un experimento. La propuesta consiste en construir un modelo en coordenadas lagrangeanas [Gurtin et al. \(2010\)](#), descomponer el tensor derecho de Cauchy-Green en una parte elástica y otra viscosa y mediante el empleo del segundo principio de la termodinámica pero a la manera inversa del procedimiento [Coleman y Mizel \(1964\)](#); [Coleman y Noll \(1974\)](#) se deduce que parte pertenece a la tensión elástica y cual a la viscosa.

2. COEFICIENTES MEDIDOS

2.1. Experimento

El experimento se realizó en un equipo rheometer machine, model RDA-II (Rheometrics) del Fluid mechanics and polymer rheology lab en PLAPIQUI Institute.

El equipo mide las dos componentes que las interpreta como una parte real y la otra imaginaria. El espécimen de forma cilíndrica se somete a una oscilación torsional en su base y se mide la respuesta (fuerza) en la otra tapa. La parte que está en fase corresponde a la respuesta elástica y la que no corresponde a la parte viscosa. Esta interpretación de la señal del reómetro se basa en suponer que:

1. La velocidad de la onda elástica es mucho mayor a la frecuencia de la forzante. Es decir que la frecuencia de la forzante está lejos de la primera frecuencia natural de la onda estacionaria. Hipótesis más que justificada ya que el reómetro mide hasta $\omega = 100 \text{ rad/s}$ y la muestra tiene 2mm de espesor.
2. La respuesta es interpretada como un problema elástico Hookeano discreto (ver Figura 2) con relación tensión - deformación para el corte puro de la forma $\tau_0 = G\gamma_0$ donde el módulo de corte terminara siendo $G = G' + iG''$ y

$$G' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta \quad (1)$$

$$G'' = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta \quad (2)$$

El disco de goma se sujetó desde sus dos caras por contacto con los dos platos para dar los valores correspondientes en archivos *ascii* que fueron graficados usando Matlab. Dichos resultados se ven indicados en a y b de la Figura 1.

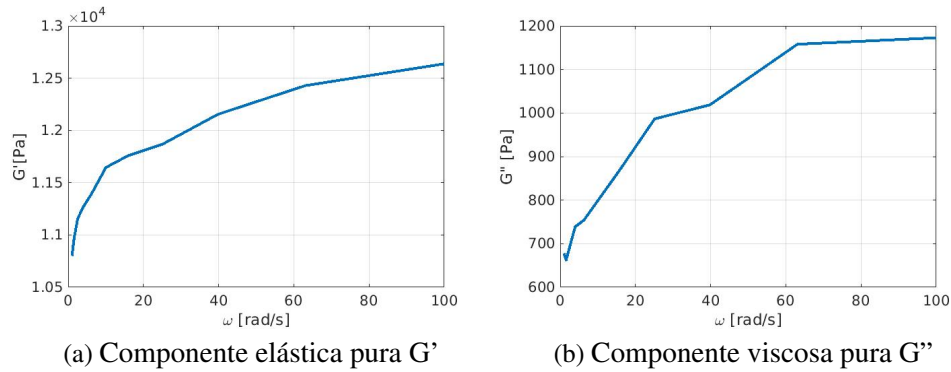


Figura 1: Resultados experimentales del Reometro de Plapiqui

Dado que el reómetro interpreta los resultados de la manera descrita por las ecs. 1 y 2 es fácil advertir que en el caso más simple (donde la G' y G'' sean independientes de ω) representaría un modelo lineal viscoelástico tipo Kelvin–Voigt ver Figura 2 cuya ecuación constitutiva queda expresada en forma de ecuación diferencial de la forma:

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \tag{3}$$

Entonces, al suponer una deformación de la forma

$$\gamma(t) = \gamma_0 e^{i\omega t} \tag{4}$$

y una tensión

$$\tau(t) = \tau_0 e^{i\omega t} \tag{5}$$

daría, al sustituir la ec. 4 y ec. 5 en ec. 3 que τ_0 es un número complejo definido por las relaciones dadas en las ecs. 1 y 2 donde $\delta = \arctan(\frac{G''}{G'})$ es el desfase entre las dos señales tensión - deformación. Por último se advierte que

$$\tau_0 = (G(\omega) + i\eta(\omega)\omega) \gamma_0 \tag{6}$$

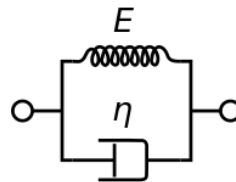


Figura 2: Esquema reológico de Kelvin–Voigt

En el caso del experimento realizado en Planpiqui el coeficiente de viscosidad $\eta(\omega)$ será simplemente G''/ω , con unidades [Pa s] (ver Figura 3)

Es fácil advertir que ninguna de las componentes G' , G'' son lineales ni con la deformación ni con la velocidad de deformación. De igual manera η tampoco es un número constante sino una función de ω , de serlo el material ensayado sería del tipo Kelvin–Voigt (como no lo es ningún material solido)

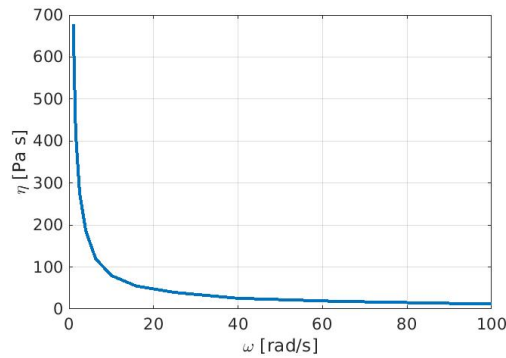


Figura 3

3. MODELO MECÁNICO COMO SOLIDO 3D SEGÚN LA TEORÍA DEL CONTINUO.

La propuesta directa en torsión pura queda rápidamente descartada por la inclusión del término viscoso en la constitutiva. El modelo más simple es el lineal para la disipación viscosa ¹ dado por una ley constitutiva para el segundo tensor de Piola de la forma (ver Buezas et al.):

$$\mathbf{T}_{RR}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}}) = \mathbf{T}_{RR}^e(\mathbf{C}) + \frac{\eta}{2} dev(\dot{\mathbf{C}}) \quad (7)$$

donde \mathbf{T}_{RR}^e es la parte puramente elástica, y el segundo término, «lineal» respecto de la parte desviadora de la derivada temporal de el tensor de Cauchy - Green representa la parte disipativa con η como coeficiente de viscosidad (en Pa s). A favor de ésta propuesta es que representa un modelo que verifica tanto la desigualdad de Causius-Duhem (segundo principio) como el principio de invarianza material. El término desviador en la viscosidad garantiza que las deformaciones disipativas sean por efecto de corte y no por cambios en el estado hidrostático del cuerpo.

La idea más simple es la de suponer pequeñas deformaciones con lo que la ec. 7 representaría (al linealizar los efectos no lineales de la deformación) la forma generalizada (en 3 dimensiones) para un material reológico del tipo Kelvin-Voigt (Figura 2) pero eso no implica de ninguna manera pequeñas velocidades de deformación, como se desprende rápidamente de la discusión que sugieren las Figuras 1 y 3. Por lo tanto la suposición de un modelo lineal rápidamente es descartada al menos en el término disipativo.

3.1. Modelo Reológico consistente con la termodinámica

Con el objeto de salvar esta dificultad y plantear un modelo realista para materiales tipo elastómeros se propone descomponer el tensor de deformaciones en una parte elástica y otra viscosa a la manera de Kröner-Lee en materiales elastoplásticos. Y también teniendo en cuenta la dependencia del tensor de tensiones \mathbf{T}_{RR} con \mathbf{C} y $dev(\dot{\mathbf{C}})$ para garantizar no violar ni el segundo principio ni el de invarianza material.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v \quad (8)$$

Esta descomposición en factores es conceptual y no se desprende de ninguna observación experimental. La idea es suponer que toda deformación es causada por una deformación viscosa más otra elástica. Como si el material pasara de la configuración de referencia a una intermedia mediante la deformación viscosa y luego, mediante una deformación puramente elástica a la espacial. La configuración intermedia es llamada en plasticidad *espacio estructural* en alusión a la estructura cristalina desde donde el sólido comienza su deformación elástica. Ahora, en viscosidad elasticidad, el espacio intermedio sería la configuración que adquiere el material cuando no está *relajado*, es decir que dicha configuración esta libre

¹linealidad entre el segundo tensor de Piola y el de Cauchy - Green

de tensiones de origen elástico y coincidirá con la configuración de referencia sólo cuando se alcance el equilibrio interno estático.

Dado que el tensor de deformación derecho de Cauchy-Green es definido por $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ es claro ver que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_v)^T (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_v) \quad (9)$$

y dado que $(\mathbf{F}_e \mathbf{F}_v)^T = \mathbf{F}_v^T \mathbf{F}_e^T$ resulta que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_v^T \mathbf{C}_e \mathbf{F}_v \quad (10)$$

y su traza:

$$I_1 = tr(\mathbf{C}) = \mathbf{C}_e : \mathbf{B}_v \quad (11)$$

² es el primer invariante.

El segundo invariante pareciera no tener mucho que aportar:

$$I_2 = \frac{1}{2} [tr^2(\mathbf{C}) - tr(\mathbf{C}^2)]$$

Y por último, el tercer invariante:

$$I_3 = det(\mathbf{C}) = J^2 = J_e^2 J_v^2 \quad (12)$$

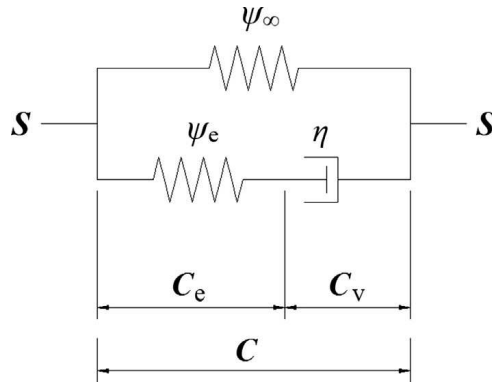


Figura 4: Modelo reológico de Zener

La Figura 4 muestra el modelo reológico tipo Zener donde ψ_e y ψ_∞ serían las energías de deformación por unidad de masa de los elementos elásticos dispuestos en los dos lazos del esquema. Es claro que estas energías tienen carácter de *potencial* y están concatenadas de forma tal que $\psi_e = \psi_e(\mathbf{C}_e)$ y $\psi_\infty = \psi_\infty(\mathbf{C})$ y toda la parte disipativa se encuentra en el elemento η que representa la deformación viscosa \mathbf{C}_v que no estará asociada a ninguna «energía» ψ como las partes elásticas puras. Luego es válido suponer que:

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}_e) = \psi_\infty(\mathbf{C}) + \psi_e(\mathbf{C}_e). \quad (13)$$

Para el caso del tensor de tensiones \mathbf{T}_{RR} se ve del esquema que tiene que incluir forzosamente la parte disipativa, luego $\mathbf{T}_{RR} = \mathbf{T}_{RR}^\infty + \mathbf{T}_{RR}^M$ donde $\mathbf{T}_{RR}^\infty = \mathbf{T}_{RR}^\infty(\mathbf{C})$ y $\mathbf{T}_{RR}^M = \mathbf{T}_{RR}^M(\mathbf{C}_e, \mathbf{C}_v, \dot{\mathbf{C}}_v)$.

Del segundo principio de la termodinámica se deduce la relación de Clausius-Duhem que para este caso adquiere la forma de función disipación:

$$\delta = \frac{\mathbf{T}_{RR} : \dot{\mathbf{C}}}{2} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (14)$$

²Al parecer lo que propone Pascon: $\mathbf{C}_e : \mathbf{C}_v$ podría estar errado, se encontró la ec. 11, por 5 enfoques diferentes. De ser así todo su desarrollo sería incorrecto.

donde todo lo que no sea de carácter conservativo dará como diferencia entre estas dos cantidades la disipación mecánica. Es fácil calcular también

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \psi(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e} : \dot{\mathbf{C}}_e \quad (15)$$

Desarrollando $\dot{\mathbf{C}}$:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}_v^T \mathbf{C}_e \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_v^T \dot{\mathbf{C}}_e \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_v^T \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{F}}_v \quad (16)$$

combinando ec. 15 y ec. 14:

$$\delta = \left(\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi_\infty(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \psi_e(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e} : \dot{\mathbf{C}}_e \geq 0 \quad (17)$$

y usando el desarrollo ec. 16

$$\left(\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}}_d + \left(\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) : \mathbf{F}_v^T \dot{\mathbf{C}}_e \mathbf{F}_v - \frac{\partial \psi_e(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e} : \dot{\mathbf{C}}_e \geq 0 \quad (18)$$

donde es claro que $\dot{\mathbf{C}}_d = \dot{\mathbf{F}}_v^T \mathbf{C}_e \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_v^T \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{F}}_v$, es decir, la parte de $\dot{\mathbf{C}}$ que no tiene el término $\mathbf{F}_v^T \dot{\mathbf{C}}_e \mathbf{F}_v$. Por último, agrupando los términos que tienen el factor $\dot{\mathbf{C}}_e$

$$\left(\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}}_d + \left(\mathbf{F}_v \frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} \mathbf{F}_v^T - \mathbf{F}_v \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}_v^T - \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \right) : \dot{\mathbf{C}}_e \geq 0 \quad (19)$$

Como nada en el paréntesis del último término depende de $\dot{\mathbf{C}}_e$, usando el criterio de Coleman-Noll, resulta que tiene que ser nulo, encontrándose que el tensor de tensiones es:

$$\mathbf{T}_{RR} = 2 \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} + 2 \mathbf{F}_v^{-1} \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_v^{-T}. \quad (20)$$

donde es claro que

$$\mathbf{T}_{RR}^\infty(\mathbf{C}) = 2 \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} \quad (21)$$

$$\mathbf{T}_{RR}^M(\mathbf{C}_e, \mathbf{C}_v, \dot{\mathbf{C}}_v) = 2 \mathbf{F}_v^{-1} \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_v^{-T}. \quad (22)$$

Con todo esto, la disipación interna queda:

$$\delta = \left(\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}}_d \geq 0 \quad (23)$$

y como

$$\frac{\mathbf{T}_{RR}}{2} - \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{F}_v^{-1} \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_v^{-T} \quad (24)$$

resulta que

$$\delta = \frac{1}{2} \mathbf{T}_{RR}^M : \dot{\mathbf{C}}_d \geq 0 \quad (25)$$

y teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{C}}_d = \dot{\mathbf{F}}_v^T \mathbf{C}_e \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_v^T \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{F}}_v$ es fácil ver que $\dot{\mathbf{C}}_d$ corresponde a la derivada temporal de $\dot{\mathbf{C}}$ cuando $\dot{\mathbf{C}}_e = 0$

$$\dot{\mathbf{C}}_d = \frac{d}{dt} (\mathbf{F}_v^T \mathbf{C}_e \mathbf{F}_v) \quad (26)$$

Luego, como en el caso libre de deformación elástica ocurre que $\mathbf{C}_e = 1$ resulta que

$$\dot{\mathbf{C}}_d = \dot{\mathbf{C}}_v \quad (27)$$

lo que indica que \mathbf{T}_{RR}^M es función de $\dot{\mathbf{C}}_v$ de tal forma que el doble producto escalar tiene que ser positivo (y no puede ser nulo salvo que $\dot{\mathbf{C}}_v$ lo sea).

Por último la propuesta mas elemental para \mathbf{T}_{RR}^M sería que fuera proporcional al propio tensor $\dot{\mathbf{C}}_v$ o mejor aún a la parte desviadora para ser consistente con la hipótesis de no disipación en deformaciones volumétricas:

$$\dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} dev(\mathbf{T}_{RR}^M) \quad (28)$$

aunque otros autores llegan a diferentes propuestas, y esto simplemente es porque la relación 25 no nos dice que constitutiva tiene que ser sino cual no puede ser. Por ejemplo:

Propuesta de Pascon y Coda:

$$\dot{\mathbf{C}}_v = \frac{2}{\eta} dev(\mathbf{C}\mathbf{T}_{RR}^M)\mathbf{C}_v \quad (29)$$

que claramente es más compleja que la 28 (es la que programe en mis modelos). A su vez el Propio Pascon y Coda refiere a un trabajo de Hasanpour et al. que llega por un procedimiento incluso más sucio que el de Pascon a otra propuesta donde ahora si esta mas claro que es a capricho del teórico siempre que no se viole la relación de Claussius Duhem.

Propuesta Hasanpour et al.:

$$\mathbf{D}_v = \frac{1}{\eta} \mathbf{C}_e(\mathbf{T}_{RR} - \mathbf{T}_{RR}^M) \quad (30)$$

o también para hacerlo todo en forma euleriana:

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{L}^T + \mathbf{L} \mathbf{B}_e - \frac{2}{\eta} \mathbf{B}_e (J\mathbf{T} - J_e \mathbf{T}_e) \quad (31)$$

Ahora si, teniendo en cuenta lo anterior, se explicita al material tipo hiperelastico con ecuaciones Neo-Hookeanas:

$$\psi_\infty(I_1, I_3) = \frac{\lambda_\infty}{2} [\ln(J)]^2 + \frac{\mu_\infty}{2} [I_1 - 3 - 2 \ln(J)] \quad (32)$$

$$\psi_e(I_{e1}, I_{e3}) = \frac{\lambda_e}{2} [\ln(J_e)]^2 + \frac{\mu_e}{2} [I_{e1} - 3 - 2 \ln(J_e)] \quad (33)$$

donde λ y μ son los módulos constantes que coinciden con los de Lamé para el caso de pequeñas deformaciones. El λ corresponde al módulo elástico volumétrico y el μ al de corte.

3.2. Relaciones tensión - Deformación

Dado que el cambio volumétrico en un material viscoelástico solo puede deberse a la deformación elástica pura ya que las deformaciones disipativas solo tienen conexión con el efecto de corte y no por cambios en el estado hidrostático del cuerpo, es claro que $J_e = 1$ en todo el movimiento y entonces $J = J_\infty$, luego el primer y último término de la ec. 33 se anularan.

Aplicando las derivadas de los potenciales (21 y 22) se encuentra que:

$$\frac{\partial \psi_\infty}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \psi_\infty}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \psi_\infty}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} = \frac{\partial \psi_e}{\partial I_{e1}} \frac{\partial I_{e1}}{\partial \mathbf{C}_e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_{e3}} \frac{\partial I_{e3}}{\partial \mathbf{C}_e} \quad (35)$$

y como

$$\frac{\partial \psi_\infty}{\partial I_1} = \frac{\mu_\infty}{2}; \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}; \quad \frac{\partial \psi_\infty}{\partial I_3} = \frac{\lambda_\infty \ln \sqrt{I_3} - \mu_\infty}{2I_3}; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1}$$

resulta que

$$\mathbf{T}_{RR}^\infty(\mathbf{C}) = \mu_\infty (\mathbf{1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda_\infty \ln J \mathbf{C}^{-1} \quad (36)$$

Y por idéntico argumento para la ec. 35 se encuentra que:

$$2 \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{C}_e} = \mu_e (\mathbf{1} - \mathbf{C}_e^{-1}) + \lambda_e \ln J_e \mathbf{C}_e^{-1} \quad (37)$$

y por 22

$$\mathbf{T}_{\mathbf{RR}}^{\mathbf{M}} = \mu_e (\mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{F}_v^{-T} - \mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{F}_v^{-T}) + \lambda_e \ln J_e \mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{F}_v^{-T} \quad (38)$$

y como $\mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{F}_v^{-T} = \mathbf{C}_v^{-1}$ y $\mathbf{F}_v^{-1} \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{F}_v^{-T} = \mathbf{C}^{-1}$ se deduce que

$$\mathbf{T}_{\mathbf{RR}}^{\mathbf{M}} = \mu_e (\mathbf{C}_v^{-1} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda_e \ln J_e \mathbf{C}^{-1} \quad (39)$$

Demostrándose que el tensor de tensiones es la suma de ec. 36 y 39

$$\mathbf{T}_{\mathbf{RR}} = \mathbf{T}_{\mathbf{RR}}^{\infty} + \mathbf{T}_{\mathbf{RR}}^{\mathbf{M}} \quad (40)$$

3.3. Ecuaciones de evolución

Es claro que el las ecuaciones de movimiento solas

$$Div(\mathbf{T}_{\mathbf{RR}}) + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \quad (41)$$

no serán suficientes para resolver el problema ya que los tensores de deformación \mathbf{C} , \mathbf{C}_v y \mathbf{C}_e y sus derivadas temporales, presentes en las constitutivas (ec. 38 y 39), no están determinadas para la parte elástica y viscosa simultáneamente sino para el conjunto. Téngase presente que $\mathbf{F} = Grad(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v$ determina el tensor gradiente de deformaciones completo pero no las partes elástica y viscosa por separado. Claro que conocido uno de los dos gradientes de deformaciones (por ejemplo \mathbf{F}_v) la otra parte (\mathbf{F}_e) se podrá determinar por $\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_v^{-1}$. Por lo que conociendo \mathbf{C} (o lo que es lo mismo \mathbf{F}) y su análogo elástico \mathbf{C}_e tendrá que usarse alguna de las relaciones que se desprenden del procedimiento de [Coleman y Noll](#) (específicamente de la parte disipativa ec. 25), ej. ecs.28, 29, etc para resolver la indeterminación conjuntamente con la ecuación de movimiento ec. 41.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS Y SIMULACIONES

Antes de resolver todo lo descrito en las subsecciones 3.1 y 3.2 se realizaron pruebas usando el esquema de [Pascon y Coda](#), específicamente la ecuación de evolución ec. 29.

Se propone un espécimen de geometría idéntica al ensayado en Plapiqui: un disco de radio diámetro $d = 25,67mm$ y altura $h = 4mm$ discretizado en 72 elementos 3d tal como se ve en la Figura 5.

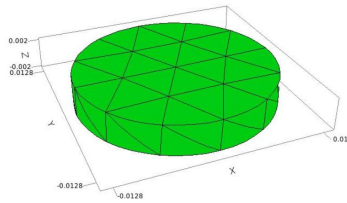


Figura 5: Geometría de la muestra

El experimento numérico consta de imponer una rotación rígida según la ley:

$$\theta(t) = a \cdot \sin(\omega t)$$

en la base superior del cilindro con una amplitud $a = 0,02rad$ con $1rad/s < \omega < 100rad/s$ y medir el torque en la base según

$$\tau = \int_{tapa} \mathbf{x} \times \mathbf{T}_{RR} \mathbf{n}_R da_R \quad (42)$$

donde \mathbf{n}_R es el vector normal exterior en la configuración indeformada. Es claro que al variar el ángulo en la parte superior el torque τ cambia con el tiempo y justamente de esa señal se proyecta que parte esta en fase con la forzante y que parte está en contrafase proyectando la función $\tau(t)$ de la siguiente manera:

$$G'(\omega) = \frac{\tau_1}{a} cd \quad (43)$$

$$G''(\omega) = \frac{\tau_1}{a} sd \quad (44)$$

donde la proyección es:

$$cd = \frac{\int \tau(t) * \sin(\omega t) dt}{\sqrt{\int \sin^2(\omega t) dt}} G''(\omega); \quad sd = \frac{\int \tau(t) * \cos(\omega t) dt}{\sqrt{\int \cos^2(\omega t) dt}}$$

Téngase en cuenta que los intervalos de integración son los que corresponden a un solo ciclo completo del reómetro.

Esta operación se realiza en forma numérica corriendo desde Matlab un script en [PDE Solutions Inc.](#) que integra las ecuaciones de evolución de [Pascon y Coda](#) ec. 29. Las propiedades mecánicas cargadas en los modelos de EF correspondientes a los experimentos estáticos $\lambda_\infty, \mu_\infty \eta$ que se midieron en [Buezas et al.](#). El resto fueron ajustados para conseguir un comportamiento cualitativo similar al experimento reométrico realizado en Plapiqui.

$$\lambda_\infty = 2,6 \cdot 10^6 Pa; \quad \lambda_e = 1,5 \cdot 10^5 Pa$$

$$\mu_\infty = 1,07 \cdot 10^4 Pa; \quad \mu_e = 1,93 \cdot 10^3 Pa; \quad \eta = 100 Pa \cdot s$$

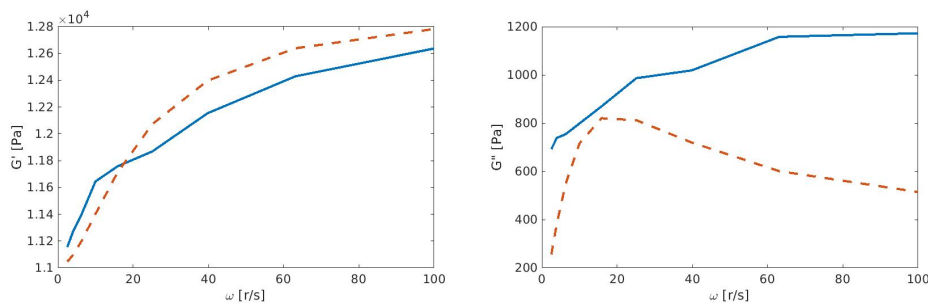


Figura 6: Comparación del experimento reométrico realizado en Plapiqui (en curvas azules) con las simulaciones del modelo del continuo (curvas rojas discontinuas) usando las ecuaciones de evolución del trabajo de Pascon. A la izquierda la componente real y a la derecha la imaginaria.

Tal como se alcanza a ver en la Figura 6 donde se compara el experimento realizado en Plapiqui con la simulación del modelo ec. 41 junto con las ecuaciones de evolución de [Pascon y Coda](#) (en este caso) ec. 29, el comportamiento cualitativo entre la realidad y la simulación es similar mostrando una fuerte no linealidad (en la velocidad de deformación) bien capturada por el modelo teórico aquí propuesto.

Por otro lado la Figura 7 muestra la comparación del experimento con el modelo propuesto en este trabajo ec. 28 donde se nota una leve mejora en el ajuste (no existe ninguna razón para que este modelo sea mejor que el de [Pascon y Coda](#), simplemente ajusta mejor el ensayo). Lo que sí ocurre es que al ser más simple la ecuación de evolución para el tensor \mathbf{C}_v el modelo corre significativamente más rápido (del orden de 2 veces mas económico)

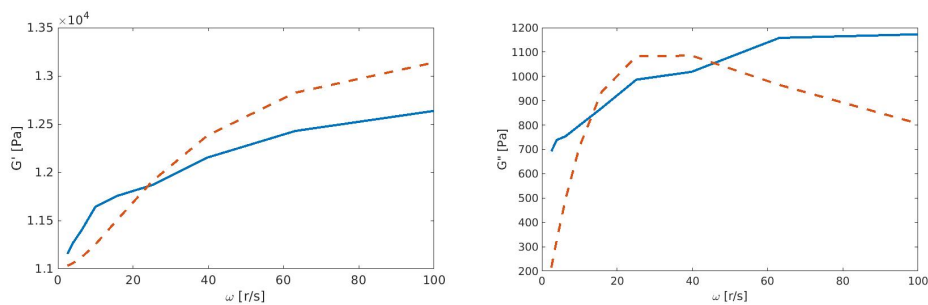


Figura 7: Comparación del experimento reométrico realizado en Plapiqui (en curvas azules) con las simulaciones del modelo del continuo (curvas rojas discontinuas) usando las ecuaciones de evolución del trabajo de Pascon. A la izquierda la componente real y a la derecha la imaginaria.

5. COMENTARIO FINAL

Se pudo desarrollar desde primeros principios un modelo geológico del continuo 3d desde primeros principios usando el procedimiento de Coleman y Noll. Además se pudo construir un modelo numérico con éxito donde se puede capturar la respuesta de un material viscoelástico no lineal. La propuesta constitutiva es relativamente simple y la simulación no demanda tiempos demasiado largos que podrían hacer posible estudios aún más complejos. Claro que se usaron pocos elementos pero téngase en cuenta que se hicieron varias corridas (unas 30 para cada caso) para poder construir la curva al variar el ω en la forzante.

REFERENCIAS

- Buezas F.S., Fochesatto N., Rosales M.B., y Tuckart W. Bayesian inference of constitutive parameters from video data of the impact dynamics of a ball. *Archive of Applied Mechanics*, 90(8):1795–1810, 2020.
- Coleman B.D. y Mizel V.J. Existence of caloric equations of state in thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 40(4):1116–1125, 1964.
- Coleman B.D. y Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. En *The foundations of mechanics and thermodynamics*, páginas 145–156. Springer, 1974.
- Freydental A. y Geyringer H. The mathematical theories of inelastic continuous medium. 1962.
- Green A.E. y Rivlin R.S. The mechanics of non-linear materials with memory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 1(1):1–21, 1957.
- Green M.S. y Tobolsky A.V. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. *The Journal of chemical physics*, 14(2):80–92, 1946.
- Gurtin M.E., Fried E., y Anand L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, New York, 2010. ISBN 978-0-511-76980-1.
- Hasanpour K., Ziaei-Rad S., y Mahzoon M. A large deformation framework for compressible viscoelastic materials: Constitutive equations and finite element implementation. *International Journal of Plasticity*, 25(6):1154–1176, 2009.
- Pascon J.P. y Coda H.B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 133:25–41, 2017.
- PDE Solutions Inc. FlexPDE. 2021.
- Petiteau J.C., Verron E., Othman R., Le Sourne H., Sigrist J.F., y Barras G. Large strain rate-dependent response of elastomers at different strain rates: convolution integral vs. internal variable formulations. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 17(3):349–367, 2013.