

## ESTUDIO DE UN MODELO DE ORDEN FRACCIONARIO DE DOS ESPECIES EN COMPETENCIA

### STUDY OF A FRACTIONAL ORDER MODEL OF TWO SPECIES IN COMPETITION

**Daiana Bravo<sup>a</sup>, Melani Barrios<sup>a,b</sup> y Gabriela Reyero<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina, daibravo@fceia.unr.edu.ar, melani@fceia.unr.edu.ar, greyero@fceia.unr.edu.ar*

<sup>b</sup>*CONICET, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Avda. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Argentina*

**Palabras clave:** Derivada de Caputo, modelos depredador presa fraccionarios, efecto Allee, gestión recursos naturales.

**Resumen.** El objetivo de este trabajo será el de modelizar una gestión en la que se explotan dos especies entre las que hay una relación de interdependencia del tipo depredador-presa. Se supondrá como modelo biológico descriptor de esta relación el utilizado por Lotka-Volterra con la aplicación de un efecto Allee en una de las dinámicas de las especies, en su versión fraccionaria, es decir donde intervienen derivadas de Caputo de orden fraccionario. Se estudiará la estabilidad de los equilibrios resultantes para determinar la senda óptima de explotación. La utilización de técnicas numéricas fraccionarias, para poder resolver el problema, será de fundamental importancia y absolutamente imprescindible para concluir el trabajo analítico, en el punto en que éste se hace intratable por la compleja formulación que en él aparece.

**Keywords:** Caputo derivatives, predator prey fractional models, Allee effect, natural resources management.

**Abstract.** The objective of this work will be to model a population management in which two species are exploited. Between them there is an interdependence predator-prey relationship. It will be assumed as a descriptive biological model of this relationship used by Lotka-Volterra with the application of an Allee effect in one of the dynamics of the species, in its fractional version, that is, where derivatives of Caputo of fractional order intervene. The stability of the resulting equilibrium will be studied to determine the optimal path of exploitation. In order to solve the problem, the use of fractional numerical techniques will be of fundamental importance and absolutely essential to conclude the analytical work at the point where it becomes intractable due to the complex formulation that appears in it.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un modelo matemático clásico de depredador-presa de Lotka-Volterra es un sistema formado por ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que modelizan el crecimiento de dos poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Una especie, los depredadores, se alimentan de la otra especie, la presa, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente, (Clark, 1990).

Por otro lado, motivado por sus aplicaciones en diferentes áreas, el cálculo fraccionario está en desarrollo, lo que ha llevado a un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. Siendo una extensión del cálculo tradicional, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos físicos. Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria es un operador no local (Diethelm, 2010; Podlubny, 1998) que contiene la historia de la función promediada de una cierta forma. Esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en candidatas idóneas para la modelización de fenómenos con memoria, (Barrios y Reyero, 2020; Ferrari y Marcus, 2020; Hilfer et al., 2000; Kilbas et al., 2006; Barrios et al., 2021b).

Por esta razón, en este trabajo se analizará un modelo depredador-presa fraccionario, es decir, donde se consideran en el sistema de ecuaciones, derivadas de orden fraccionario en la evolución del tiempo, (Ahmed et al., 2006, 2007; Diethelm et al., 2002; Javidi y Nyamoradi, 2013; Li et al., 2017). Se supondrá, como modelo biológico descriptor de esta relación, el utilizado por Lotka-Volterra con la aplicación de un efecto Allee en una de las dinámicas de las especies y cosecha en otra de las especies. En la primera parte del trabajo, se estudiará la estabilidad de los equilibrios resultantes para determinar la senda óptima de explotación. A continuación, a partir de la implementación de un método numérico, se verá una comparación entre los resultados obtenidos para diferentes valores de los parámetros. Por último, se obtendrán conclusiones.

### 1.1. Cálculo fraccionario

En esta sección se presentarán algunas definiciones del cálculo fraccionario. Para más detalles referirse a (Diethelm, 2010; Kilbas et al., 2006).

**Definición 1** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , se define el operador integral de Riemann-Liouville  ${}_a I_t^\alpha$  sobre funciones  $L^1[a, b]$  como

$${}_a I_t^\alpha [f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (1)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , y  $\Gamma(\cdot)$  función definida en la bibliografía citada. Para  $\alpha = 0$ , establecemos  ${}_a I_t^0 = I$ , el operador identidad.

**Definición 2** Sean  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  y  $m = \lceil \alpha \rceil$ , parte entera superior de  $\alpha$ . Sea una función  $f$  tal que  $D^n f \in L^1[a, b]$ , se define la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  de  $f$  como

$${}^C D_t^\alpha [f] = {}_a I_t^{m-\alpha} D^m [f] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \quad (2)$$

**Definición 3** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < \alpha \leq 1$ , un problema de valor inicial fraccionario autónomo se define como,

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha [u] = f(u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3)$$

Dado que la resolución de manera exacta de ecuaciones diferenciales fraccionarias puede ser muy difícil, a continuación se verá cómo realizar un análisis de estabilidad de las mismas y se mostrará el método numérico de Adams fraccionario que se utilizará en este trabajo.

## 1.2. Análisis de estabilidad fraccionario

Para hallar los puntos de equilibrio  $u_{eq}$  de la ecuación dada en (3) se establece la condición

$${}_0^C D_t^\alpha [u] = 0 \Leftrightarrow f(u_{eq}) = 0. \quad (4)$$

Para estudiar la estabilidad de cada punto se procede a la linealización del sistema. Para ello, se busca la matriz jacobiana de  $f$  evaluada en cada punto de equilibrio y se la llama  $J(u_{eq})$ .

Luego, se calculan los autovalores  $\lambda_{eq}$  de  $J(u_{eq})$  para cada punto de equilibrio. Por último, se sacan conclusiones siguiendo el siguiente Teorema, ver (Ahmed et al., 2006; Diethelm, 2010).

**Teorema 4** Sean  $\lambda_{eq}$  los autovalores no nulos de  $J(u_{eq})$ , matriz jacobiana de  $f$  asociada al punto de equilibrio  $u_{eq}$ . Luego

- si  $|\arg(\lambda_{eq})| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$  para todo  $\lambda_{eq}$  y todos los autovalores con  $|\arg(\lambda_{eq})| = \frac{\alpha\pi}{2}$  poseen multiplicidad geométrica que coincide con su multiplicidad algebraica entonces el punto de equilibrio  $u_{eq}$  es localmente estable,
- si  $|\arg(\lambda_{eq})| > \frac{\alpha\pi}{2}$  para todo  $\lambda_{eq}$ , entonces el punto de equilibrio  $u_{eq}$  es localmente asintóticamente estable,
- si  $|\arg(\lambda_{eq})| < \frac{\alpha\pi}{2}$  para algún  $\lambda_{eq}$ , entonces el punto de equilibrio  $u_{eq}$  es localmente inestable.

**Observación 1** En el Teorema anterior se considera como  $\arg(\lambda_{eq})$  al argumento principal del número complejo  $\lambda_{eq}$ , es decir  $\arg(\lambda_{eq}) \in (-\pi, \pi]$ . Además, cuando alguno de los autovalores es nulo, se dice que la estabilidad del punto de equilibrio es un caso degenerado.

## 1.3. Método de Adams fraccionario

El método de Adams fraccionario sirve para aproximar las soluciones de problemas como (3). Es de tipo predictor–corrector, es decir primero se utiliza el método de Euler como predictor, para luego usar el método de la Regla Trapezoidal fraccionaria como corrector, (Li y Zeng, 2015).

Se considera una partición del intervalo  $[0, t]$  como  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = t$  con  $t_{j+1} - t_j = \Delta t$ . El método consiste en aproximar la solución  $u(t)$  mediante la interpolación de los puntos  $(t_j, u_{n+1}(j))$ ,  $\forall j = 0, \dots, n+1$ , donde  $u_{n+1}(j)$  es la componente  $j$ -ésima del vector  $u_{n+1}$  obtenido a través de la siguiente recursividad

$$\begin{cases} u_{n+1}^P = \frac{u_0}{j!} + \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(u_j), \\ u_{n+1} = \frac{u_0}{j!} + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(u_j) + a_{n+1,n+1} f(u_{n+1}^P), \end{cases} \quad (5)$$

donde

$$b_{j,n+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha] \quad (6)$$

son los coeficientes del método de Euler fraccionario y

$$a_{j,n+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} & 1 \leq j \leq n \\ 1 & j=n+1 \end{cases} \quad (7)$$

son los coeficientes del método de la Regla Trapezoidal fraccionaria.

## 2. RESULTADOS

En este trabajo se analizará el siguiente modelo, el cual es un caso particular de (3) para dos dimensiones, es decir que se obtendrán soluciones  $u(t) = (x(t), y(t)) \forall t > 0$ .

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha [x] = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) (x(t) - m) - bx(t)y(t), \\ {}^C_0 D_t^\alpha [y] = cx(t)y(t) - dy(t) - ey(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (8)$$

donde  $x(t)$  representa la cantidad de presas,  $y(t)$  representa la cantidad de depredadores en el tiempo  $t$  y los diferentes parámetros  $r, K, m, b, c, d, e$  son considerados todos positivos.

En la ecuación que modela las presas, el primer sumando corresponde al crecimiento de las mismas, donde se considera un efecto llamado Allee en el que intervienen los siguiente parámetros:  $r$  tasa de crecimiento intrínseco,  $K$  capacidad de carga y  $m$  umbral del efecto Allee, es decir la densidad de población mínima para el crecimiento de ciertas especies, que por debajo de la cual la población se extingue (la tasa de crecimiento de la población es positiva solo dentro del rango  $m < x < K$  y es negativa fuera de este intervalo), y el segundo sumando representa la disminución de las presas por ser capturadas, (Barrios et al., 2021a). En la ecuación que modela los depredadores se puede ver que el primer sumando corresponde al crecimiento de los mismos por capturar presas, el segundo sumando representa la mortalidad natural de los depredadores mientras que el tercer sumando representa la cosecha de los mismos.

### 2.1. Análisis de estabilidad

Como se vio en la Sección 1.2, a continuación se trabajará con la estabilidad local de (8). Igualando a cero  ${}^C_0 D_t^\alpha [x]$  y  ${}^C_0 D_t^\alpha [y]$ , se obtienen los siguientes 4 puntos de equilibrio:

1. El estado trivial  $P_1(0, 0)$ , que corresponde a la extinción de las especies.
2. El estado axial  $P_2(K, 0)$ , que corresponde a que las presas alcanzan la capacidad de carga y no existe presencia de los depredadores.
3. El estado axial  $P_3(m, 0)$ , que corresponde a que las presas se estabilizan en el umbral de Allee y no existe presencia de los depredadores.
4. El estado de coexistencia de las especies  $P_4\left(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b}\left(1 - \frac{d+e}{cK}\right)\left(\frac{d+e}{c} - m\right)\right)$ .

**Observación 2** Como  $x(t)$  e  $y(t)$  deben ser no negativas y  $K > m$ ,  $P_4$  sólo tiene sentido cuando  $cm - d \leq e \leq cK - d$ . También, se puede observar que cuando  $e = cm - d$  entonces  $P_4 = P_3$  y cuando  $e = cK - d$  entonces  $P_4 = P_2$ , con lo cuál se analizará sólo el caso en que  $cm - d < e < cK - d$  para garantizar la coexistencia de las especies.

#### 2.1.1. Linealización

Para analizar la estabilidad local de los puntos de equilibrio se utilizará lo visto en la Sección 1.2. La matriz jacobiana del sistema (8) en un punto  $P(x, y)$  es la siguiente:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{r}{K}x (x - m) + rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - by & -bx \\ cy & cx - (d + e) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Utilizando el Teorema 4, se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .

- La matriz jacobiana (9) evaluada en  $P_1(0, 0)$  resulta

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} -rm & 0 \\ 0 & -(d+e) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = -rm$  y  $\lambda_2 = -(d+e)$ . Siendo  $r, m, d, e > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$  resulta  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \pi$ . Como  $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow 0 < \alpha \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} < \pi \quad \forall \alpha \in (0, 1]$ , entonces  $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha \in (0, 1], i = 1, 2$ .

**Teorema 5** *El equilibrio  $P_1$  del sistema (8) es localmente asintóticamente estable.*

- La matriz jacobiana (9) evaluada en  $P_2(K, 0)$  resulta

$$J_{P_2} = \begin{pmatrix} r(m-K) & -bK \\ 0 & cK - (d+e) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = r(m-K)$  y  $\lambda_2 = cK - (d+e)$ . Siendo  $m < K$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-$  resulta  $|\arg(\lambda_1)| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$ . Por otro lado, como se considera  $e < cK - d$ ,  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$  entonces  $|\arg(\lambda_2)| = 0 < \alpha \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$ .

**Teorema 6** *El equilibrio  $P_2$  del sistema (8) es localmente inestable.*

- La matriz jacobiana (9) evaluada en  $P_3(m, 0)$  resulta

$$J_{P_3} = \begin{pmatrix} rm(1 - \frac{m}{K}) & -bm \\ 0 & cm - (d+e) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = rm(1 - \frac{m}{K})$  y  $\lambda_2 = cm - (d+e)$ . Siendo  $m < K$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$  resulta  $|\arg(\lambda_1)| = 0 < \alpha \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$ .

**Teorema 7** *El equilibrio  $P_3$  del sistema (8) es localmente inestable.*

- La matriz jacobiana (9) evaluada en  $P_4(\frac{d+e}{c}, \frac{r}{b}(1 - \frac{d+e}{cK})(\frac{d+e}{c} - m))$  resulta

$$J_{P_4} = \begin{pmatrix} \frac{r}{K} \frac{d+e}{c} [ -(\frac{d+e}{c} - m) + (K - \frac{d+e}{c}) ] & -b \frac{d+e}{c} \\ \frac{r}{K} \frac{c}{b} (\frac{d+e}{c} - m) (K - \frac{d+e}{c}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

De donde se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^2 + \lambda \frac{r}{K} \frac{d+e}{c} [(\frac{d+e}{c} - m) - (K - \frac{d+e}{c})] + c \frac{d+e}{c} \frac{r}{K} (\frac{d+e}{c} - m) (K - \frac{d+e}{c}) = 0. \quad (14)$$

Los ceros de este polinomio resultan :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ -\left(\frac{d+e}{c} - m\right) + \left(K - \frac{d+e}{c}\right) \right] \pm \sqrt{\Delta} \right\}, \quad (15)$$

donde

$$\Delta = \left[ \frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ (\frac{d+e}{c} - m) - (K - \frac{d+e}{c}) \right] \right]^2 - 4c \frac{d+e}{c} \frac{r}{K} (\frac{d+e}{c} - m) (K - \frac{d+e}{c}). \quad (16)$$

Como se considera  $cm - d < e < cK - d$ , se tiene que

$4c \frac{d+e}{c} \frac{r}{K} (\frac{d+e}{c} - m) (K - \frac{d+e}{c}) > 0$  entonces  $\Delta < \left[ \frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ (\frac{d+e}{c} - m) - (K - \frac{d+e}{c}) \right] \right]^2$ .  
A continuación, se analizan diferentes casos según el valor de  $e$ .

- Caso  $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$ : se verifica

$$\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ - \left( \frac{d+e}{c} - m \right) + \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right] > 0. \quad (17)$$

- Si  $\Delta \geq 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$  entonces  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = 0 < \alpha \frac{\pi}{2} \forall \alpha \in (0, 1]$ .
  - Si  $\Delta < 0$  entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  conjugados, con  $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) > 0$  por (17) y  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \left| \tan^{-1} \left( \frac{\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ \left( \frac{d+e}{c} - m \right) - \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right]}{\sqrt{-\Delta}} \right) \right| \in (0, \frac{\pi}{2})$ , por lo que su estabilidad dependerá del valor de  $\alpha$ .
- Caso  $e = \frac{c}{2}(K + m) - d$ : se verifica

$$\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ - \left( \frac{d+e}{c} - m \right) + \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right] = 0 \quad (18)$$

y en esta situación siempre resultará  $\Delta < 0$ . Luego,  $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$  entonces  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{\pi}{2} > \alpha \frac{\pi}{2} \forall \alpha \in (0, 1)$  y  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{\pi}{2} = \alpha \frac{\pi}{2}$  para  $\alpha = 1$ .

- Caso  $\frac{c}{2}(K + m) - d < e < cK - d$ : se verifica

$$\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ - \left( \frac{d+e}{c} - m \right) + \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right] < 0. \quad (19)$$

- Si  $\Delta \geq 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$  entonces  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \pi > \alpha \frac{\pi}{2} \forall \alpha \in (0, 1]$ .
- Si  $\Delta < 0$  entonces  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  conjugados, con  $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$  por (19) y  $|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| > \frac{\pi}{2} \geq \alpha \frac{\pi}{2} \forall \alpha \in (0, 1]$ .

**Teorema 8** El equilibrio  $P_4$  del sistema (8) es:

- localmente estable si
  - $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$ ,  $\Delta < 0$  y  $\alpha \leq \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ \left( \frac{d+e}{c} - m \right) - \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right]}{\sqrt{-\Delta}} \right)$ .
  - $e = \frac{c}{2}(K + m) - d$  y  $\alpha \in (0, 1]$ .
  - $\frac{c}{2}(K + m) - d < e < cK - d$  y  $\alpha \in (0, 1]$ .
- localmente asintóticamente estable si
  - $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$ ,  $\Delta < 0$  y  $\alpha < \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ \left( \frac{d+e}{c} - m \right) - \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right]}{\sqrt{-\Delta}} \right)$ .
  - $e = \frac{c}{2}(K + m) - d$  y  $\alpha \in (0, 1)$ .
  - $\frac{c}{2}(K + m) - d < e < cK - d$  y  $\alpha \in (0, 1)$ .
- localmente inestable si
  - $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$  y  $\Delta \geq 0$  y  $\alpha \in (0, 1]$ .
  - $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$ ,  $\Delta < 0$  y  $\alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\frac{r}{K} \frac{d+e}{c} \left[ \left( \frac{d+e}{c} - m \right) - \left( K - \frac{d+e}{c} \right) \right]}{\sqrt{-\Delta}} \right)$ .

## 2.2. Ejemplo

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0.5x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{3}\right) (x(t) - 0.5) - 0.7x(t)y(t), \\ {}_0^C D_t^\alpha [y] = 0.35x(t)y(t) - 0.35y(t) - ey(t). \end{cases} \quad (20)$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Teoremas 5, 6, 7 y 8, se realizará un análisis de estabilidad sensible al parámetro  $e$ , la cosecha de las presas, y sensible a  $\alpha$ .

A continuación se presentarán las gráficas de las soluciones aproximadas de (20), utilizando el método numérico visto en la Sección 1.3. En cada caso, se fijará un valor de  $e$  y se realizarán las gráficas para valores de  $\alpha$  que sean de interés.

### Caso $e = 0.1$

Este valor corresponde a  $cm - d < e < \frac{c}{2}(K + m) - d$  con  $\Delta < 0$ . Se obtienen los puntos de equilibrio  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(3, 0)$ ,  $P_3(0.5, 0)$  y  $P_4(1.2857, 0.3207)$  aproximadamente.

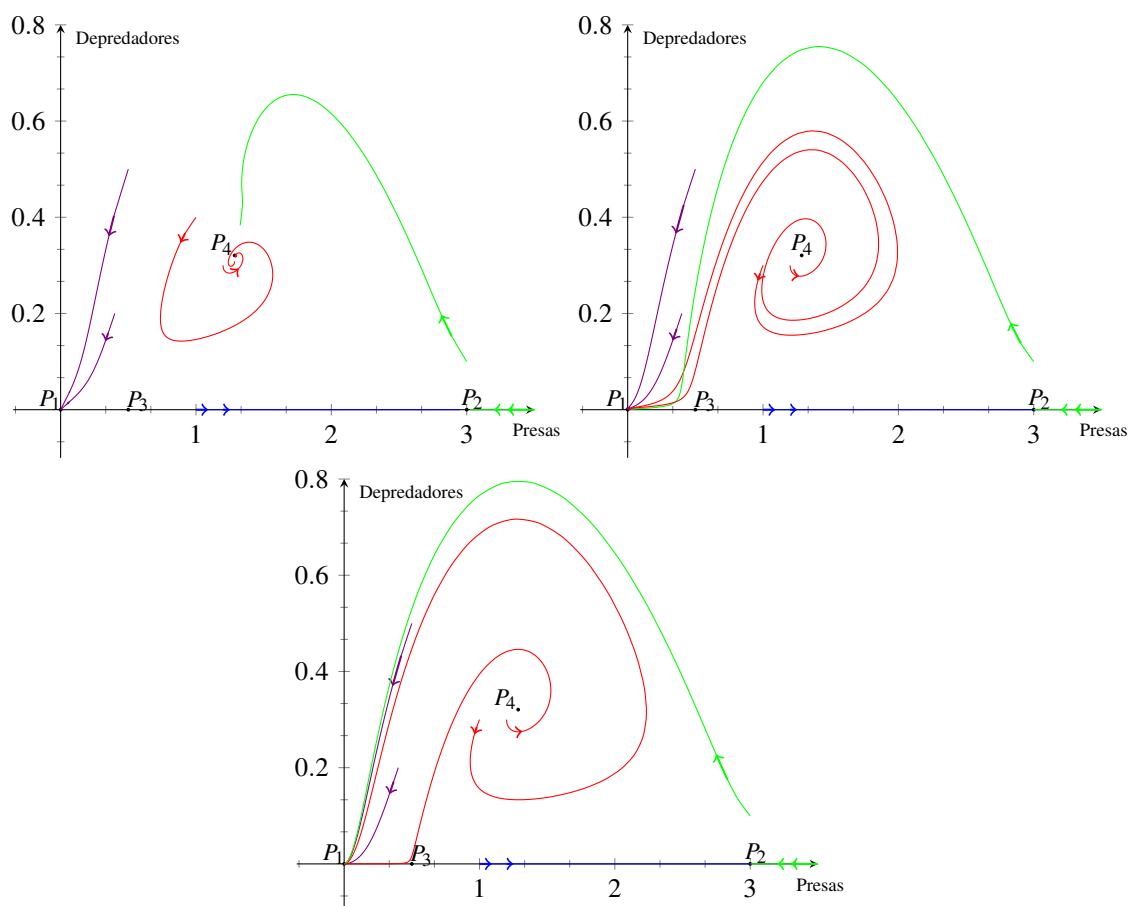


Figura 1: Soluciones con  $e = 0.1$  para  $\alpha = 0.6$  (superior izquierda),  $\alpha = 0.9$  (superior derecha) y  $\alpha = 1$  (inferior).

En la Figura 1 se pueden observar las soluciones aproximadas del problema (20) con  $\alpha = 0.6$ ,  $\alpha = 0.9$  y  $\alpha = 1$ . En todas ellas, las trayectorias cuyas condiciones iniciales son cercanas a  $P_1$  tienden a  $P_1$ , resultando localmente asintóticamente estable como se ha visto, es decir si se considera una cantidad de presas menor al umbral de Allee o una cantidad suficientemente grande de depredadores entonces tiene sentido que las especies se extingan. Con respecto a las trayectorias cuyas condiciones iniciales son cercanas a  $P_2$ , la no existencia de depredadores



hace que tiendan a  $P_2$  es decir que las presas alcanzan la capacidad de carga, sin embargo si la condición inicial consta de una cantidad positiva de depredadores, las trayectorias se alejan de  $P_2$ , resultando un equilibrio localmente inestable. Con respecto a las trayectorias cuyas condiciones iniciales son cercanas a  $P_3$ , se puede observar cómo todas ellas se alejan resultando un equilibrio localmente inestable. Por último, se puede notar la diferencia con respecto a  $P_4$  en las imágenes. Cuando  $\alpha = 0.6$ , las trayectorias que inician cerca de  $P_4$  se acercan al mismo, resultando un equilibrio localmente asintóticamente estable, logrando una coexistencia entre las especies, tiene sentido debido al gran “retardo” en la evolución de crecimiento de los depredadores. Cuando  $\alpha = 0.9$ , las trayectorias se alejan de  $P_4$  siendo un equilibrio localmente inestable, extinguiéndose ambas especies. Este comportamiento también tiene sentido debido a que, al ser  $\alpha$  suficientemente grande, la evolución de los depredadores no está afectada a un “retardo” muy grande, haciendo que crezcan casi de manera usual, además la cosecha de éstos es relativamente baja y por lo tanto la gran cantidad de depredadores hace que ambas especies se extingan. Cuando  $\alpha = 1$ , la imagen es similar a cuando  $\alpha = 0.9$ , sólo que las trayectorias no se intersecan y alcanzan los equilibrios más rápidamente.

### Caso $e = 0.2625$

Este valor corresponde a  $e = \frac{c}{2}(K + m) - d$ . Se obtienen los puntos de equilibrio  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(3, 0)$ ,  $P_3(0.5, 0)$  y  $P_4(1.75, 0.3720)$  aproximadamente.

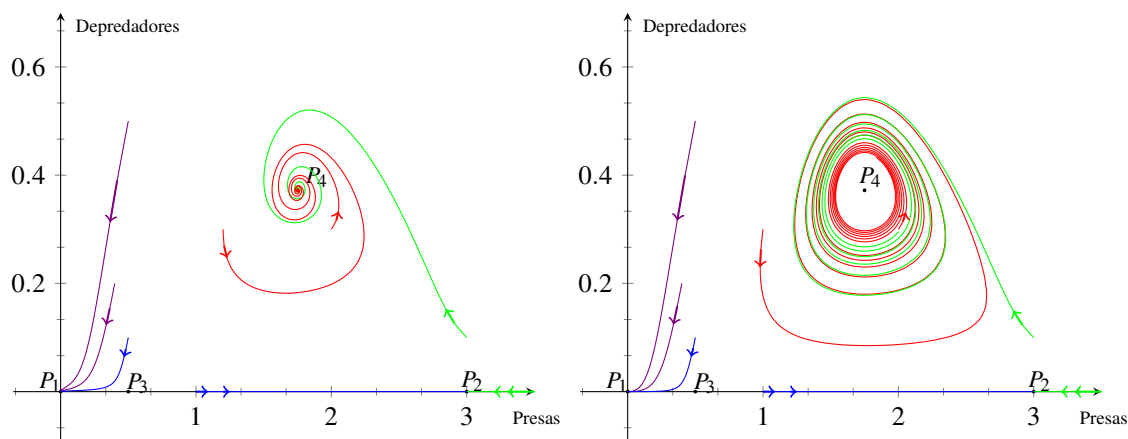


Figura 2: Soluciones con  $e = 0.2625$  para  $\alpha = 0.9$  (izquierda) y  $\alpha = 1$  (derecha).

En la Figura 2 se pueden observar las soluciones aproximadas del problema (20) con  $\alpha = 0.9$  y  $\alpha = 1$ . En ambas imágenes, las trayectorias que inician con valores cercanos al punto de equilibrio  $P_1$  tienden al mismo con el paso del tiempo, mostrando la estabilidad asintótica que menciona el Teorema 5. También, las trayectorias que inician cercanas a los puntos de equilibrio  $P_2$  y  $P_3$  tienden a alejarse de dichos puntos, similar al comportamiento de las mismas en la Figura 1. Con respecto a aquellas trayectorias que inician cercanas al punto de equilibrio  $P_4$  se pueden observar comportamientos diferentes en cada imagen. En el caso  $\alpha = 0.9$  se ve cómo estas trayectorias se acercan al punto  $P_4$  con el paso del tiempo, consiguiendo estar cada vez más cerca del mismo, coincidiendo con la estabilidad asintótica mencionada en el Teorema 8. En cambio en el caso  $\alpha = 1$  se ve que las trayectorias con las mismas condiciones iniciales que en la imagen anterior tienden al equilibrio  $P_4$  pero no logran acercarse suficientemente, respondiendo a una estabilidad no asintótica, también vista en el Teorema 8. Aquí se puede notar una importante diferencia, mientras que en el modelo clásico la coexistencia de las especies está



representada por centros, en el modelo fraccionario está representada por espirales asintóticamente estables, pudiendo describir otros tipos de situaciones de depredadores-presas.

### Caso $e = 0.5$

Este valor corresponde a  $\frac{e}{2}(K + m) - d < e < cK - d$ . Se obtienen los puntos de equilibrio  $P_1(0, 0)$ ,  $P_2(3, 0)$ ,  $P_3(0.5, 0)$  y  $P_4(2.4286, 0.2624)$  aproximadamente.

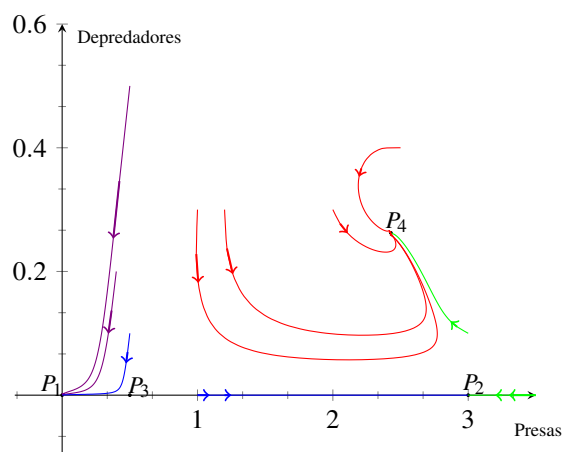


Figura 3: Soluciones con  $e = 0.5$  para  $\alpha = 0.9$ .

En la Figura 3 se pueden observar las soluciones aproximadas del problema (20) con  $\alpha = 0.9$ , y se mantendrá con el mismo comportamiento para todos los valores de  $0 < \alpha \leq 1$ . Nuevamente las trayectorias cercanas a los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  actúan de manera similar a lo obtenido en las Figuras 1 y 2. Con respecto a  $P_4$  se puede ver que es localmente asintóticamente estable según lo predicho por el Teorema 8, sin embargo la forma en que las trayectorias alcanzan ese equilibrio es la que cambia. En las gráficas anteriores las trayectorias eran de forma espiralada, mientras que ahora ya no. Este comportamiento es consecuencia de que los autovalores encontrados en la matriz jacobiana asociada son reales, a diferencia de los otros casos en los que eran complejos.

### 3. CONCLUSIONES

En este trabajo, se consideró un modelo depredador-presa de orden fraccionario que incorpora un efecto Allee en el crecimiento de la presa y tiene en cuenta una cosecha de depredadores. Al incorporar esto en el sistema, se ha conseguido que el modelo sea más realista. Debido a la dificultad de la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales fraccionarios no lineales de manera exacta, se vio la necesidad de recurrir a otros métodos. Se realizó un análisis de estabilidad de las soluciones, observando cómo el tipo de estabilidad encontrada dependía del coeficiente de cosecha de los depredadores. Cuando la cosecha es suficientemente baja, la estabilidad de la solución que representa la coexistencia de las especies depende del orden fraccionario elegido para la evolución de las mismas. Cuando se considera una cosecha intermedia, comparando el caso fraccionario con el caso clásico, se nota una gran diferencia donde la solución que representa la coexistencia es sólo estable para  $\alpha = 1$ , convirtiéndose en asintóticamente estable para  $0 < \alpha < 1$ , pudiendo modelar otros tipos de comportamientos entre especies. Cuando la cosecha es suficientemente grande, el modelo fraccionario y el clásico se comportan de manera similar. Todo este trabajo analítico se pudo verificar a partir del tratamiento numérico realizado posteriormente. Para esto se utilizó el método de Adams en su versión fraccionaria y se realizaron gráficas de las soluciones aproximadas para diferentes parámetros que se consideraron de

importancia. Se puede concluir que las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario son, al menos, tan estables como las de orden entero. Como trabajo a futuro, se tratará de demostrar que el modelo posee la existencia, la unicidad, la no negatividad y la acotación de las soluciones, como se desea en cualquier dinámica de poblaciones, y se implementará este sistema como dinámica en un problema de maximización de ganancias por la cosecha obtenida.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue subsidiado por la UNR a través del proyecto 80020190100005UR “Ecuaciones diferenciales fraccionarias en modelos de evolución poblacional”.

## REFERENCIAS

- Ahmed E., El-Sayed A., y El-Saka H.A. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. *Physics Letters A*, 358(1):1–4, 2006.
- Ahmed E., El-Sayed A., y El-Saka H.A. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 325(1):542–553, 2007.
- Barrios M. y Reyero G. An Euler-Lagrange Equation only Depending on Derivatives of Caputo for Fractional Variational Problems with Classical Derivatives. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 8(2):590–601, 2020.
- Barrios M., Reyero G., y Tidball M. A fractional order cubic differential equation. Applications to natural resource management. *arXiv preprint arXiv:2104.04092*, 2021a.
- Barrios M., Reyero G., y Tidball M. Harvest management problem in a fractional logistic equation. *arXiv preprint arXiv:2104.04082*, 2021b.
- Clark C.W. *The optimal management of renewable resources*, volumen 2. Mathematical Bioeconomics, 1990.
- Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media, 2010.
- Diethelm K., Ford N.J., y Freed A.D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1):3–22, 2002.
- Ferrari A. y Marcus E.S. Study of a fractional-order model for HIV infection of CD4+ T-cells with treatment. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 11(2):12–22, 2020.
- Hilfer R. et al. *Applications of fractional calculus in physics*, volumen 35. World scientific Singapore, 2000.
- Javidi M. y Nyamoradi N. Dynamic analysis of a fractional order prey–predator interaction with harvesting. *Applied mathematical modelling*, 37(20-21):8946–8956, 2013.
- Kilbas A.ĭ.A., Srivastava H.M., y Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, volumen 204. Elsevier, 2006.
- Li C. y Zeng F. *Numerical methods for fractional calculus*, volumen 24. CRC Press, 2015.
- Li H.L., Zhang L., Hu C., Jiang Y.L., y Teng Z. Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 54(1-2):435–449, 2017.
- Podlubny I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.