

COMPARACIÓN DE MODELOS AERODINÁMICOS PARA LA ESTIMACIÓN DE FUERZAS EN ALAS BATIENTES

COMPARISON OF AERODYNAMIC MODELS FOR ESTIMATING LOADS ON FLAPPING WINGS

Marcelo F. Valdez^{a,b}, Balakumar Balachandran^c y Sergio Preidikman^d

^a*Instituto de Investigaciones en Energía no Convencional (INENCO), Universidad Nacional de Salta (UNSa)-CONICET, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina*

^b*Facultad de Ingeniería, UNSa, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina, mfvaldez82@gmail.com*

^c*Department of Mechanical Engineering, University of Maryland College Park, MD, 20742, USA*

^d*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), Universidad Nacional de Córdoba-CONICET, Av. Velez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina*

Palabras clave: Succión de borde de ataque, Red de Vórtices, Flujo potencial, Alas batientes.

Resumen. En este trabajo, distintos modelos aerodinámicos derivados del Método de Red de Vórtices Inestacionario (UVLM) se comparan en términos de la estimación de las cargas aerodinámicas producidas por una sección de un ala batiente. El UVLM permite describir la evolución de las estelas vorticosas generadas por los cuerpos y en consecuencia, determinar la influencia de las mismas sobre las cargas aerodinámicas. Para tener en cuenta la influencia del vórtice de borde de ataque observado experimentalmente, se introduce una modificación *ad hoc* de la fuerza resultante aerodinámica. Esta modificación es una generalización de la analogía de la succión de borde de ataque que elude la necesidad de modelar explícitamente la separación de flujo desde el borde de ataque. Las predicciones de los modelos son comparadas con valores experimentales y con resultados de simulaciones de dinámica de fluidos computacional (CFD) disponibles en la literatura. Se observa que, en general, la modificación de la carga aerodinámica mejora la correlación entre las predicciones de los modelos y los resultados experimentales.

Keywords: Leading Edge Suction, Vortex Lattice, Potential Flow, Flapping Wings.

Abstract. In this effort, different aerodynamic models derived from the Unsteady Vortex Lattice Method (UVLM) are compared in terms of the estimated aerodynamic loads produced by a flapping wing section. The UVLM can describe the evolution of the vortical wakes left behind by immersed bodies; therefore, it allows to determine their influence on the aerodynamic loads. To account for the influence of the experimentally observed leading edge vortex (delayed stall mechanism), an *ad hoc* modification of the aerodynamic force is introduced. This modification is a generalization of the leading edge suction analogy, which avoids the need to explicitly model the flow separation from the leading edge. The predictions of the models are compared with experimental data and with CFD simulation results available in the literature. It is observed that, in general, the modification of the aerodynamic load improves the correlation between the predictions of the models and the experimental results.

1. INTRODUCCIÓN

El vuelo de las aves y los insectos se caracteriza por números de Reynolds bajos a moderados: $\mathcal{O}(10^1)$ para insectos pequeños como la avispa chalcidoidea, $\mathcal{O}(10^2)$ para la mosca de la fruta, $\mathcal{O}(10^3)$ para abejas y libélulas, y $\mathcal{O}(10^4)$ para polillas y picaflones (Tabla 1.1, p.15 de [Altenbuchner y Hubbard Jr \(2017\)](#)). La evidencia experimental de [Dickinson et al. \(1999\)](#) y [Wang et al. \(2004\)](#), entre otras, sugieren que *las fuerzas aerodinámicas generadas por alas batientes son dominadas por las fuerzas de presión y que las fuerzas viscosas tienen un papel secundario*. Estas observaciones sustentan la hipótesis de que *las características principales del flujo y de las fuerzas generadas por un ala batiente pueden ser descritas por medio de modelos aerodinámicos que desprecian la viscosidad*. [Xuan et al. \(2020\)](#) realizaron una revisión sistemática de los distintos métodos y modelos aerodinámicos estacionarios, cuasiestacionarios e inestacionarios que han sido empleados para estudiar las fuerzas aerodinámicas desarrolladas por aves e insectos.

Los mecanismos aerodinámicos inestacionarios aprovechados por los insectos por medio de sus alas batientes fueron propuestos por [Weis-Fogh \(1973\)](#). Entre otros, se conjetura que los insectos aprovechan el retraso de la pérdida aerodinámica para generar mayor sustentación. Este mecanismo consiste en la generación de un vórtice estable a lo largo del borde de ataque del ala que se mantiene sobre la superficie de la misma durante su recorrido y se desprende en la maniobra de inversión del sentido del aleteo (stroke reversal). Este vórtice adherido reduce la presión en superficie del ala sobre la que se encuentra, un efecto similar al producido por los vórtices de puntera en las alas delta. Otros mecanismos aerodinámicos propuestos son la captura de la estela, la circulación rotacional o efecto Magnus, entre otros ([Sane, 2003](#)).

El objetivo de este trabajo es comparar las predicciones de tres modelos aerodinámicos con los resultados experimentales y de simulaciones de dinámica de fluidos computacional (CFD) obtenidos por [Wang et al. \(2004\)](#). La comparación se realiza en términos de las cargas aerodinámicas de sustentación y resistencia. Los tres modelos aerodinámicos se derivan del Método de Red de Vórtices Inestacionario (UVLM por sus siglas en inglés) y son: un modelo de flujo completamente adherido, y dos modelos que, por medio de una modificación de la fuerza resultante aerodinámica, incluyen indirectamente la influencia de la separación de flujo desde el borde de ataque sin modelarla explícitamente. La modificación propuesta es una generalización de la analogía de la succión en el borde de ataque de [Polhamus \(1966\)](#).

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El sistema analizado se esquematiza en la Fig. 1 y consiste en una sección de un ala batiente inmersa en un fluido (aire) inicialmente en reposo. La sección alar ejecuta una cinemática en el plano característica de un movimiento de aleteo. La cinemática es completamente definida por la translación del centroide O y la rotación alrededor de dicho punto. Se adopta en este trabajo la cinemática propuesta por [Wang et al. \(2004\)](#) que se indica a continuación:

$$X_O(t) = \frac{A_f}{2}c \cos(\varpi t) \quad Y_O(t) = 0 \quad \zeta(t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{2} \sin(\varpi t + \psi) \quad (1)$$

En las Ecs. (1), $X_O(t)$ e $Y_O(t)$ son las coordenadas del punto O , $\zeta(t)$ es la orientación angular de la sección con respecto al eje positivo X , $\varpi = 2\pi f_f$ es la frecuencia angular de aleteo, A_f y Θ son las amplitudes de los movimientos de translación y rotación, respectivamente, y c es la cuerda de la sección. El ángulo ψ adopta valores de -45° , 0° y 45° , correspondientes a una rotación retrasada, en fase y avanzada con respecto a la translación, respectivamente.

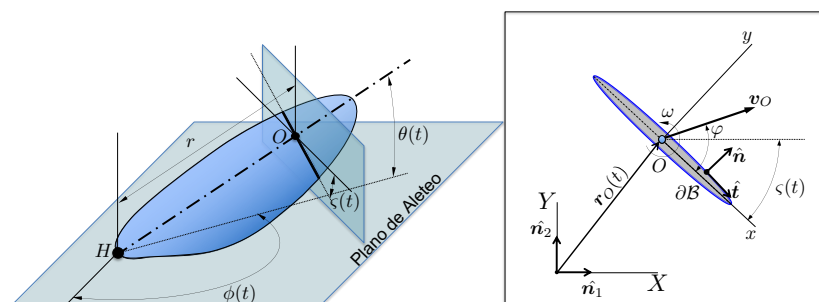


Figura 1: Descripción del sistema en estudio. Izquierda: Ala batiente en tres dimensiones articulada en el punto H . Se identifica una sección del ala a una distancia r de la articulación H . Derecha: Sección alar con movimiento plano bidimensional.

En el límite cuando el número de Reynolds tiende a infinito, el efecto de la difusión viscosa molecular tiende a cero. Por lo tanto los espesores de la capa límite adyacente a las superficies de los cuerpos, y de las estelas generadas por ellos –que son las regiones que concentran la vorticidad del flujo– también tienden a cero. En esta situación, dichas regiones fluidas pueden idealizarse matemáticamente como sábanas vorticosas: superficies de discontinuidad a través de las cuales la velocidad tangencial del fluido experimenta un salto finito. Fuera de esta regiones, el flujo se asume irrotacional. Las ecuaciones que describen la evolución de los campos de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ y de presión $p(\mathbf{r}, t)$ para un flujo irrotacional e incompresible son conocidas y se resumen a continuación [Katz y Plotkin \(2001\)](#):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla_r \Phi(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) - p_\infty = \frac{\rho}{2} (\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) - \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(\mathbf{r}, t) - \Phi_\infty) \\ \lim_{r \rightarrow \zeta} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\zeta, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\zeta, t) = 0 \\ \lim_{|r| \rightarrow \infty} |\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}_\infty| = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{r} \in \Omega, t \in [0, \infty) \\ \\ \\ \forall \zeta \in \partial \mathcal{B}, t \in [0, \infty) \\ \forall t \in [0, \infty) \end{array} \quad (2)$$

donde: $\Phi(\mathbf{r}, t)$ es el potencial de velocidad, Ω es el dominio fluido, $\partial \mathcal{B}$ denota la superficie del cuerpo \mathcal{B} , $\hat{\mathbf{n}}(\zeta, t)$ y $\mathbf{v}(\zeta, t)$ son el vector unitario localmente normal a la superficie del cuerpo y la velocidad local de la superficie, respectivamente, en el punto con vector posición ζ y $|\cdot|$ denota magnitud. El subíndice ∞ denota las condiciones de la corriente libre sin perturbar. Las últimas dos ecuaciones expresan la condición de no penetración en la superficies sólidas y la condición de regularidad del flujo. La sección de ala analizada se asume una placa plana con espesor nulo.

En los puntos S sobre la superficie de la sección alar donde se produce separación de flujo, por ejemplo el borde de fuga, se impone la condición de continuidad de la presión (condición de Kutta) lo que implica que debe emitirse vorticidad desde ese punto a razón de:

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{r_S} = \frac{1}{2} \llbracket u_{\text{slip}}^2 \rrbracket, \quad (3)$$

donde u_{slip} es la magnitud de la velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido justo por encima de la sábana vorticiosa y el operador $\llbracket \cdot \rrbracket$ denota el salto discontinuo a ambos lados del punto de separación S .

3. MÉTODO DE RED DE VÓRTICES INESTACIONARIO

Para resolver las ecuaciones (2), se emplea el método de red de vórtices no estacionario que permite, además de estimar las cargas aerodinámicas, describir la evolución temporal de las estelas generadas por los cuerpos inmersos en un fluido. Este método es muy difundido en las disciplinas Aerodinámica e Hidrodinámica; por lo tanto, se omite su descripción, refiriendo al lector interesado al libro de Katz y Plotkin (2001) y al trabajo de Valdez et al. (2021).

En el presente trabajo, sólo se modela la separación de flujo desde el borde de fuga de la sección alar. La estela generada se representa por medio de una sábana vorticosa libre cuya vorticidad es creada de acuerdo a la Ec. (3). Si bien en un ala batiente con grandes ángulos de ataque se produce separación de flujo desde el borde de ataque, la estela generada por esta separación no es modelada explícitamente en el presente trabajo. En su lugar, se propone una modificación *ad hoc* de la fuerza resultante aerodinámica \mathbf{F} para acomodar indirectamente el efecto de dicha separación y la contribución del vórtice estable de borde de ataque (LEV) que ha sido observado experimentalmente. Esta modificación es una generalización de la analogía de la succión de borde de ataque propuesta por Polhamus (1966). La fuerza resultante aerodinámica modificada \mathbf{F}_m se calcula como sigue:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{LEV} = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_{LE}) + \mathbf{F}_{LEV}, \quad (4)$$

donde \mathbf{F}_p es la fuerza *normal* a la placa plana obtenida por integración de la presión en la superficie de la placa plana, \mathbf{F}_{LE} es la fuerza de succión en el borde de ataque (Sec. 6.5.2 de Katz y Plotkin (2001)) y \mathbf{F}_{LEV} tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{LEV} := \kappa |\mathbf{F}_{LE}| \hat{\mathbf{n}} \quad (5)$$

$$\kappa = \rho \text{sign}((\mathbf{V}_\infty - \mathbf{v}_O) \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (6)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal a la placa plana, ρ es un parámetro y \mathbf{v}_O es la velocidad del punto O . Conceptualmente la modificación propuesta implica la supresión de la fuerza de succión en el borde de ataque como resultado de la separación del flujo desde ese punto y la generación de una fuerza adicional \mathbf{F}_{LEV} , normal a la placa plana y con magnitud proporcional a la fuerza de succión suprimida. Esta fuerza adicional es el resultado de la interacción local del vórtice estable de borde de ataque con la superficie sobre la que se encuentra.

El parámetro ρ puede, en principio, tomar cualquier valor. Cuando $\rho = 1$ se obtiene el modelo de Polhamus (1966). Cuando $\rho = 0$, se suprime la fuerza de succión de borde de ataque y la influencia del vórtice generado es despreciable. Cuando $\rho < 0$, el vórtice de borde de ataque se encuentra por debajo de ala, como puede suceder durante las rápidas inversiones del sentido del aleteo (stroke reversals).

4. RESULTADOS

En este trabajo, se evalúan tres modelos derivados del UVLM. El primero (UVLM sin modificaciones) es el modelo de flujo adherido con separación de flujo únicamente desde el borde de fuga. En el segundo modelo (UVLM con $\rho = 0$) se suprime la fuerza de succión en el borde de ataque. En el último modelo (UVLM con $\rho = 1$) se emplea la analogía de Polhamus (1966).

Para realizar la evaluación, se comparan las predicciones de los modelos con los resultados experimentales y de simulaciones de CFD de Wang et al. (2004). Dichos investigadores midieron experimentalmente las fuerzas de sustentación y de resistencia desarrolladas por un modelo de 25 cm de envergadura del ala de una *Drosophila* realizando un cinemática de aleteo en el interior de un tanque de aceite mineral. Además, reprodujeron los experimentos por

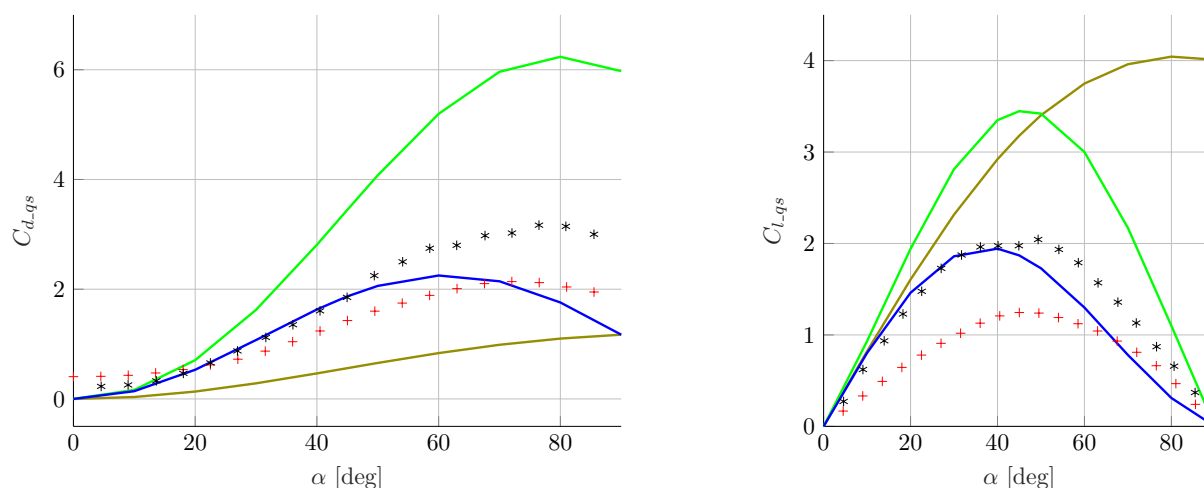


Figura 2: Coeficientes de resistencia y sustentación cuasi-estacionarios, $C_{d_{qs}}$ y $C_{l_{qs}}$ para una placa plana. (—): UVLM sin modificación, (—): ULVM con $\varrho = 0$, (—): ULVM con $\varrho = 1$, (+): Simulaciones CFD de Wang et al. (2004) para una sección con espesor relativo de 0.25 y $Re = 192$, (*): Resultados experimentales de Dickinson y Götz (1993) para una sección con espesor relativo de 0.02 y $Re = 192$.

medio de simulaciones de CFD para una sección alar representativa (problema bidimensional) con cinemática descrita por las Ecs. (1). El número de Reynolds basado en la cuerda de la sección de estas simulaciones es entre 75 y 115. Dichos autores concluyeron que las simulaciones bidimensionales capturan las características principales del problema tridimensional.

Las cargas aerodinámicas son normalizadas de acuerdo a Wang et al. (2004), empleando la máxima fuerza cuasi-estacionaria correspondiente a la cinemática específica. Esta adimensionalización tiene por objeto eliminar la dependencia de la geometría de la sección y del número de Reynolds. Los coeficientes aerodinámicos cuasi-estacionarios fueron obtenidos de la manera indicada por Wang et al. (2004) con cada uno de los modelos y se resumen en la Fig. 2. Se observa que el UVLM con $\varrho = 0$ reproduce adecuadamente los resultados experimentales para ángulos de ataque hasta 40° aproximadamente. En general, el modelo con $\varrho = 1$ sobre predice los resultados experimentales. El modelo UVLM sin modificaciones predice adecuadamente los valores de sustentación para ángulos de ataque pequeños, sin embargo, se desvía claramente de la física del problema para ángulos de ataque elevados ya que predice que la sustentación máxima se alcanza cuando la placa es normal al flujo.

Las predicciones de la evolución temporal de las cargas aerodinámicas obtenidas con los distintos modelos junto con las cargas aerodinámicas experimentales se muestran en la Fig. 3. La comparación cuantitativa, en términos de los estadísticos: valor medio, bias, correlación y raíz cuadrada del error medio cuadrático (RMSE), se resume en la Tabla 1.

Se observa, que los modelos con la fuerza aerodinámica modificada describen adecuadamente las características de la evolución temporal de la sustentación. Esto se comprueba por los elevados valores de correlación con los resultados experimentales, siendo en muchos casos mayores que los correspondientes a las simulaciones de CFD de alta fidelidad. También se observa que, en general, las amplitudes de los picos de sustentación son adecuadamente representadas por los modelos. En los casos de rotación retrasada y en fase con la translación ($\psi = -45^\circ$ y $\psi = 0^\circ$, respectivamente), la modificación de la fuerza aerodinámica produce una mejora notable en la predicción del valor medio temporal. En todos los casos la modificación de la carga aerodinámica produce una mejora en la correlación.

Con respecto a la resistencia, se observa que el UVLM con $\varrho = 0$ genera las mejores predicciones. Sin embargo, este modelo no es capaz de capturar los picos de resistencia que ocurren al inicio del movimiento de translación ($t/T = 0,5n$ con $n \in \mathbb{N}$). La misma observación aplica al UVLM con $\varrho = 1$. Se conjetura que la posible causa de esta deficiencia de los modelos modificados es la probable ausencia de separación de flujo desde el borde de ataque en las fases final e inicial de la translación debido a la baja velocidad de la sección. La ausencia de separación de flujo implica que la fuerza de succión en el borde de ataque está presente, mientras que dichos modelos la suprimen. Esta conjetura se fundamenta en la observación de que el modelo UVLM sin modificación es el único que predice la existencia de los picos mencionados.

Tabla 1: Comparación entre las predicciones de los modelos aerodinámicos, y los resultados experimentales y de simulaciones de CFD de (Wang et al., 2004).

		Wang et al. (2004)		UVLM		
		Exp.	CFD	Sin modificación	$\varrho = 0$	$\varrho = 1$
$\psi = -45^\circ$						
C_d	Valor Medio	0.62	0.58	0.60	0.45	0.38
	Bias	0.00	-0.04	-0.02	-0.17	-0.24
	Correlación	1.00	0.88	0.80	0.84	0.75
	RSME	0.00	0.28	0.53	0.35	0.45
C_l	Valor Medio	0.13	0.17	0.36	0.20	0.24
	Bias	0.00	0.04	0.23	0.07	0.11
	Correlación	1.00	0.67	0.84	0.91	0.92
	RSME	0.00	0.39	0.25	0.15	0.14
$\psi = 0,0^\circ$						
C_d	Valor Medio	0.57	0.58	0.87	0.52	0.51
	Bias	0.00	0.00	0.30	-0.05	-0.07
	Correlación	1.00	0.76	0.47	0.56	0.56
	RSME	0.00	0.49	0.85	0.53	0.54
C_l	Valor Medio	0.41	0.44	0.47	0.38	0.35
	Bias	0.00	0.04	0.06	-0.03	-0.05
	Correlación	1.00	0.74	0.91	0.92	0.92
	RSME	0.00	0.22	0.16	0.14	0.16
$\psi = 45^\circ$						
C_d	Valor Medio	0.63	0.62	1.08	0.58	0.51
	Bias	0.00	-0.01	0.45	-0.05	-0.12
	Correlación	1.00	0.92	0.62	0.85	0.67
	RSME	0.00	0.22	1.39	0.34	0.39
C_l	Valor Medio	0.50	0.59	0.55	0.41	0.31
	Bias	0.00	0.09	0.05	-0.09	-0.19
	Correlación	1.00	0.70	0.51	0.91	0.89
	RSME	0.00	0.34	0.37	0.21	0.25

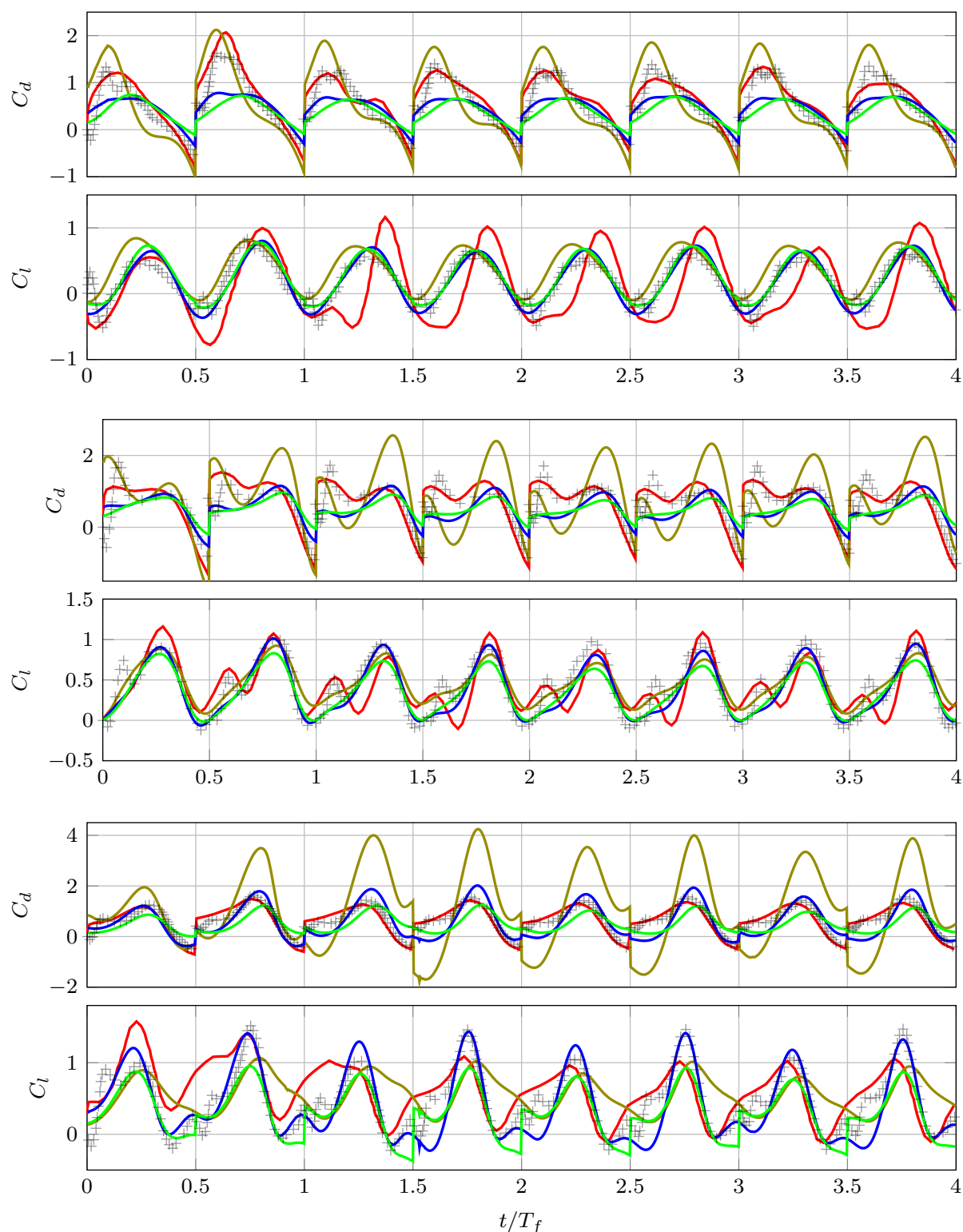


Figura 3: Evolución temporal de la resistencia y la sustentación normalizadas para la sección alar con cinemática dada por la Ec. (1). De arriba hacia abajo, el ángulo de fase de la rotación ψ es: $-45,0^\circ$ (retrasada), $0,0^\circ$ (en fase) y $45,0^\circ$ (avanzada). (+) y (—): Valores experimentales y de simulaciones CFD de Wang et al. (2004), respectivamente, (—): ULVM sin modificación, (—): ULVM con $\rho = 0$, (—): ULVM con $\rho = 1$.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las cargas aerodinámicas generadas por una sección de un ala batiente fueron predichas empleando tres modelos aerodinámicos. Dichas predicciones fueron comparadas con resultados experimentales y de simulaciones de CFD obtenidos por Wang et al. (2004). Se observa que el modelo de flujo adherido (UVLM sin modificación) no produce estimaciones adecuadas de las cargas aerodinámicas. Este resultado era anticipado, a juzgar por las predicciones cuasi-estacionarias de este modelo y por los grandes ángulos de ataque que caracterizan a la cinemática del movimiento de la sección alar. Se observa que este modelo predice picos muy grandes de resistencia y una fuerza de sustentación desfasada con respecto a los valores experimentales. Este desfase parece estar correlacionado con el ángulo ψ de avance de la rotación respecto a la translación.

La modificación introducida en la fuerza aerodinámica resultante produce un aumento notable de la correlación entre las predicciones del C_l y resultados experimentales. Esta modificación corrige el desfase antes mencionado. En particular, se destaca el modelo UVLM con $\varrho = 0$, para el cual la correlación del C_l estimado es mayor al 90 % en todos los casos, superando a la correlación de las simulaciones de CFD. En cuanto al C_d , también se observa que la modificación de la fuerza con $\varrho = 0$ produce un aumento considerable de la correlación con los datos experimentales; sin embargo, los valores alcanzados no son tan alentadores como en el caso del C_l . Del análisis de estos resultados, se concluye que el modelo que mejor predice las cargas aerodinámicas del ala batiente analizada es aquel en el cual la fuerza de succión del borde de ataque es simplemente suprimida. Los resultados sugieren que la analogía de la succión de borde de ataque ($\varrho = 1$), sugerida por la comunidad científica (Dickinson y Götz, 1993; Sane, 2003) para cuantificar el efecto del vórtice estable de borde de ataque no es satisfactoria para predecir las fuerzas aerodinámicas desarrolladas por una sección alar con la cinemática estudiada en este trabajo.

REFERENCIAS

- Altenbuchner C. y Hubbard Jr J. *Modern Flexible Multi-body Dynamics Modeling Methodology for Flapping Wing Vehicles*. Academic Press, 2017.
- Dickinson M. y Götz K. Unsteady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numbers. *Journal of Experimental Biology*, 174(1):45–64, 1993.
- Dickinson M., Lehmann F., y Sane S. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284(5422):1954–1960, 1999. ISSN 1095-9203. doi:10.1126/science.284.5422.1954.
- Ellington C. The aerodynamics of hovering insect flight. iv. aerodynamic mechanisms. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, 305(1122):79–113, 1984.
- Katz J. y Plotkin A. *Low-speed aerodynamics*. Cambridge university press, 2001.
- Polhamus E. A concept of the vortex lift of sharp-edge delta wings based on a leading-edge-suction analogy. Nasa technical note td-d3767, National Aeronautics and Space Administration, 1966.
- Sane S. The aerodynamics of insect flight. *Journal of Experimental Biology*, 206(23):4191–4208, 2003. ISSN 1477-9145. doi:10.1242/jeb.00663.
- Valdez M.F., Ribero S., y Preidikman S. Estudio aerodinámico de perfiles con espesor con el método de red de vórtices. *Revista de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 8(1):15–30, 2021.

- Wang Z., Birch J., y Dickinson M. Unsteady forces and flows in low Reynolds number hovering flight: two-dimensional computations vs robotic wing experiments. *Journal of Experimental Biology*, 207(3):449–460, 2004.
- Weis-Fogh T. Quick estimates of flight fitness in hovering animals, including novel mechanisms for lift production. *Journal of experimental Biology*, 59(1):169–230, 1973.
- Xuan H., Hu J., Yu Y., y Zhang J. Recent progress in aerodynamic modeling methods for flapping flight. *AIP Advances*, 10(2):020701, 2020. doi:10.1063/1.5130900.