Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXVIII, págs. 1147-1159 (artículo completo)
H.G. Castro, J.L. Mroginski, R.R. Paz, M.A. Storti (Eds.)
Resistencia, 1-5 Noviembre 2021

PRINCIPIO DE POTENCIA VIRTUAL MULTIESCALA APLICADO A MEDIOS POROSOS SATURADOS

PRINCIPLE OF MULTISCALE VIRTUAL POWER APPLIED TO SATURATED POROUS MEDIUM

Reinaldo A. Anonis[a], Javier L. Mroginski[a], Pablo J. Sánchez[b,c] y Pablo A. Beneyto[a]

[a]*LAMEC-IMIT-CONICET Laboratorio de Mecánica Coputacional, Universidad Nacional del Nordeste, Las Heras 727, 3500 Resistencia, Chaco, Argentina, reiadrian@hotmail.com*

[b]*CIMEC-INTEC-UNL-CONICET, Guemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina*

[c]*GIMNI-UTN-FRSF, Lavaisse 610, 3000 Santa Fe, Argentina*

Palabras clave: modelos multiescala, medio poroso saturado, formulación variacional, FE2.

Resumen. En el presente trabajo se propone desarrollar un modelo multiescala para un medio poroso saturado mediante formulación variacional y el Principio de Potencia Virtual Multiescala, una generalización del Principio de Hill-Mandel de la macrohomogeneidad. De este modo, se adiciona a la potencia de tensiones, pares de variables conjugadas dadas por el contendido de masa del fluido-poropresiones y el vector velocidad de filtración-gradiente de poropresiones, a partir de los cuales es posible obtener las ecuaciones de balance y las relaciones de homogeinización. A fin de resolver estas ecuaciones, se propone hacer uso de la metodología *Finite Element Square* (FE2)

Keywords: multiscale models, saturated porous medium, variational formulation, FE2.

Abstract. In the present work, a multiscale model for a saturated porous medium is applied in a framework of variational formulation and employing the Principle of Multiscale Virtual Power, which consists of a generalization of The Hill-Mandel Principle Macro-homogeneity. In this way, two pairs of consistent variables are added to the power stress. These variables are the fluid mass content-pore pressure and the pore pressure gradient-filtration vector, from which it is possible to obtain the balance equations and homogenization relationships. In order to solve these equations, it is proposed to use the *Finite Element Square* (FE2) methodology

1. INTRODUCCIÓN

El análisis multiescala aplicado a medios sólidos fue ampliamente difundido y desarrollado por la comunidad científica durante las últimas décadas destacando el informe realizado por de Souza Neto y Feijóo (2006), quienes sentaron las bases para una formulación variacional del problema. Considerando como entidad primitiva básica la descripción cinemática macro, a través del tensor de deformaciones apropiado, es posible determinar la respuesta macroscópica mediante un procedimiento de homogenización en la microescala. Esta aproximación teórica puede implementarse y resolverse numéricamente en el marco de la metodología FE2 (Perić et al. (2011)). Sánchez et al. (2013) ampliaron el alcance al incluir fenómenos de falla en el análisis multiescala, mientras que de Souza Neto et al. (2015) extendiendo el Principio de Hill-Mandel, consideraron fuerzas inerciales y de cuerpo. Por su parte Blanco et al. (2014) proponen los fundamentos para una teoría unificada variacional, del cual surge el Principio de Potencia Virtual Multiescala que provee un marco claro y bien estrucuturado para aplicar modelos multiescalas basados en el concepto de *Representative Volume Element* (RVE).
En relación a medios porosos multifásicos, la formulación y aplicación de esta metodología de homogeneización se encuentra aún en desarrollo y quedan incertidumbres sobre la determinación de las variables energéticamente complementarias que permitan obtener la respuesta macroscópica a partir de la homogenización de variables microscópicas. Khoei y Hajiabadi (2018) desenvolvieron un método multiescala basado en elementos finitos para el problema del medio poroso saturado totalmente acoplado con efectos microdinámicos. Siguiendo esta línea de trabajo, desde un enfoque variacional y empleando el Principio de Potencia Virtual Multiescala al fenómeno de consolidación de suelos saturados, se plantea el presente informe. Para tal fin, se utilizan dos pares de variables energéticamente conjugadas adicionales a la potencia virtual de deformación multiescala.

2. PRINCIPIO DE POTENCIA VIRTUAL MULTIESCALA

El Principio de la Macro-homogeneidad de Hill-Mandel establece la consistencia energética entre la micro y macroescala. En su formato original establece que el promedio volumétrico de la potencia de un campo de tensiones en equilibrio sobre un RVE sometido a desplazamientos de borde lineales o tracciones de borde uniformes es igual a la potencia de tensiones de la macroescala (de Souza Neto et al. (2015)). Este principio se extiende, a fin de que la potencia virtual macroescala total conincida con el promedio volumétrico de su contraparte en la microescala. De la teoría de medios porosos dada por Coussy (2003) y Mroginski et al. (2011), se adoptan como variables conjugadas termodinámicas a los escalares poropresiones-tasa de contenido de masa del fluido (dividida la densidad del fluido) y los vectores gradiente de poropresiones-velocidad de filtración del fluido: es decir $\left(p; \frac{\dot{m}}{\rho_f}\right)$ y $(\boldsymbol{\nabla} p; \boldsymbol{v})$. Siguiendo lo planteado por Blanco et al. (2014) y de Souza Neto et al. (2015) a situaciones con fenómenos físicos de diferente naturaleza, se extiende ahora al caso de un medio poroso saturado, adicionando la potencia virtual inducida por los pares de variables mencionados al clásico término dado por el tensor de tensiones de Cauchy y el tensor de deformaciones infinitesimales $(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\varepsilon})$, alcanzando la siguiente ecuacion variacional:

$$\boldsymbol{\sigma}_M : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \dot{m}_M \delta p_M - \boldsymbol{v}_M \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \left(\boldsymbol{\sigma}_\mu : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu + \dot{m}_\mu \delta p_\mu - \boldsymbol{v}_\mu \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_\mu\right) dV,$$
$$\forall\, \delta\dot{\boldsymbol{u}}_\mu \in \mathcal{U}_\mu; \delta p_\mu \in \mathcal{P}_\mu \qquad (1)$$
$$\forall\, \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M \in \mathbb{R}^6; \forall\, \delta\boldsymbol{\varphi}_M \in \mathbb{R}^3; \forall\, \delta p_M \in \mathbb{R}^1$$

Donde las variables macro se denotan con subindice $(\cdot)_M$, mientras que a su contraparte micro le corresponde la terminología $(\cdot)_\mu$. Se definen así las variables para ambas escalas:

- $\boldsymbol{\sigma}_{(\cdot)}$ Tensor de tensiones de Cauchy
- $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(\cdot)}$ Tasa del tensor de deformaciones infinitesimales virtuales
- $\dot{\bar{m}}_{(\cdot)} = \frac{\dot{m}_{(\cdot)}}{\rho_{f(\cdot)}}$ Tasa del contenido de masa del fluido dividida la densidad del fluido (ρ_f)
- $\delta p_{(\cdot)}$ Poropresiones virtuales
- $\boldsymbol{v}_{(\cdot)}$ Vector de velocidad de filtración
- $\delta\boldsymbol{\varphi}_{(\cdot)} = \boldsymbol{\nabla}_{(\cdot)}\delta p_{(\cdot)}$ Gradiente de poropresiones virtuales. $\boldsymbol{\nabla}_{(\cdot)}$ es el operador gradiente
- $\Omega_{(\cdot)}$ Dominio del Medio Poroso Saturado
- $\delta\dot{\boldsymbol{u}}_{(\cdot)}$ Tasa del vector de desplazamietos virtuales
- $\mathcal{U}_\mu$ Espacios de desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles del RVE.
- $\mathcal{P}_\mu$ Espacios de poropresiones virtuales admisibles del RVE
- $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^1$ Espacio de tensores simétricos de segundo orden, espacio Euclideo tridimensional y unidimensional respectivamente
- $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ Coordenadas cartesianas en la macro y microescala respectivamente

Los espacios virtuales admisibles, $\mathcal{U}_\mu$ y $\mathcal{P}_\mu$, de la microescala serán definidos más adelante.

3. DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA A NIVEL DEL RVE

Se asume que el origen del sistema de coordenadas de la microecala se encuentra ubicado en el centroide de Ω_μ, es decir:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{y}\, dV = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

Una suposición fundamental en la presente teoría es que el campo de desplazamiento micro sobre Ω_μ puede ser expandido como:

$$\boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{u}_M(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\varepsilon}_M(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{y} + \tilde{\boldsymbol{u}}_\mu(\boldsymbol{y},t) \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{u}_M(\boldsymbol{x},t)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_M(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{u}_M(\boldsymbol{x},t)$ son el desplazamiento y la deformación infinitesimal del correspondiente punto $\boldsymbol{x}$ de la macroescala. Se define $\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu(\boldsymbol{y},t)$ como el *campo de desplazamiento fluctuante* del RVE. En función de Ec. (3), la deformación infinitesimal de la microescala se obtiene mediante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mu(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{\nabla}_y\boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{\varepsilon}_M(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\nabla}_y\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu(\boldsymbol{y},t) \tag{4}$$

El campo de deformaciones infinitesimales micro es la suma de las deformaciones infinitesimales macro, que afectan uniformemente a todo el dominio Ω_μ y el gradiente de los desplazamientos fluctuantes microscópicos. Como se definió anteriormente, $\boldsymbol{\nabla}_x(\cdot)$ es el operador gradiente de $(\cdot)$ con respecto a las coordenadas macroscópicas y $\boldsymbol{\nabla}_y(\cdot)$ es el operador gradiente de $(\cdot)$ con respecto a las coordenadas del RVE. En lo que sigue se utiliza por simplicidad $\boldsymbol{\nabla}_y(\cdot) = \boldsymbol{\nabla}(\cdot)$. Se procede de igual manera con las poropresiones micro y el gradiente de éstas haciendo:

$$p_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right) = p_M\left(\boldsymbol{x},t\right) + \boldsymbol{\varphi}_M\left(\boldsymbol{x},t\right)\cdot\boldsymbol{y} + \tilde{p}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right) = \boldsymbol{\nabla}p_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right) = \boldsymbol{\varphi}_M\left(\boldsymbol{x},t\right) + \boldsymbol{\nabla}\tilde{p}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right) \tag{6}$$

donde $p_M\left(\boldsymbol{x},t\right)$ y $\boldsymbol{\varphi}_M\left(\boldsymbol{x},t\right) = \boldsymbol{\nabla}_x p_M\left(\boldsymbol{x},t\right)$ son las poropresiones y el gradiente de poropresiones del correspondiente punto $\boldsymbol{x}$ de la macro-escala. Se define, de igual modo que con los desplazamientos, a $\tilde{p}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right)$ como el *campo de poropresiones fluctuante* del RVE.

Las hipótesis fundamentales realizadas al definir los campos de desplazamientos, deformaciones, poropresiones y gradientes de estas últimas en la escala micro se consideran válidas también en un formato de tasas. De este modo, a lo largo del texto se hará uso por igual de los campos como previamente se han presentado o mediante sus derivadas respecto del tiempo.

3.1. Admisibilidad en los descriptores primales

Con el objetivo de relacionar las variables primitivas correspendientes a las dos escalas en estudio, se aceptan las siguientes relaciones de homogeinización:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M\left(t\right) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\boldsymbol{\varepsilon}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right)dV \tag{7}$$

$$p_M\left(t\right) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}p_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right)dV \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_M\left(t\right) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\boldsymbol{\varphi}_\mu\left(\boldsymbol{y},t\right)dV \tag{9}$$

Los postulados dados por Ecs. (7-9), tras algo de manipulación matemática sencilla, son equivalentes a imponer restricciones a $\boldsymbol{u}_\mu$ y p_μ. Puede observarse que al igual que en de Souza Neto et al. (2015) una de las variables primitivas no es derivada, siendo aquí el caso de las poropresiones. Esto, como se verá, genera restricciones en el volumen del RVE.
La relación de Ec. (7), debido a Ec. (4), tras aplicar teorema de Green equivale a exigir:

$$\int_{\Gamma_\mu}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu\otimes_{\boldsymbol{s}}\boldsymbol{n}_\mu\,dA = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

Asimismo, trabajando por un lado con las definiciones de Ecs. (2, 5, 8), y por otro lado con las expresiones Ecs. (6, 9) y el teorema de Green, se llega a:

$$\int_{\Omega_\mu}\tilde{p}_\mu\,dV = 0 \tag{11}$$

$$\int_{\Gamma_\mu}\tilde{p}_\mu\boldsymbol{n}_\mu\,dA = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

En las ecuaciones anteriores Γ_μ hace referencia al contorno del RVE y $\boldsymbol{n}_\mu$ es la normal unitaria hacia el exterior de Γ_μ. Únicamente los campos de desplazamiento y poropresiones que satisfacen las restricciones Ecs. (10-12) pueden ser considerados como admisibles, es decir compatibles con los postulados Ecs. (7-9). En el marco variacional de potencias virtuales utilizado, las restricciones pueden ser incoporadas al requerir que los espacios funcionales $\tilde{\mathcal{U}}_\mu$ y $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ de los campos fluctutantes admisibles del RVE sean subespacios de los espacios de desplazamientos microscopicos fluctuantes cinemáticamente admisibles minimamente restringidos y poropresiones microscopicas fluctuantes admisibles minimamente restringidos, aqui denotados como $\tilde{\mathcal{U}}^*_\mu$ y $\tilde{\mathcal{P}}^*_\mu$:

$$\tilde{\mathcal{U}}_\mu \subset \tilde{\mathcal{U}}^*_\mu \equiv \left\{ \boldsymbol{v}, suficientemente\; regulares\ : \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{v} \otimes_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{n}_\mu \, dV = \boldsymbol{0} \right\} \tag{13}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_\mu \subset \tilde{\mathcal{P}}^*_\mu \equiv \left\{ v, suficientemente\; regulares\ : \int_{\Omega_\mu} v \, dA = 0;\ \int_{\Gamma_\mu} v \, \boldsymbol{n}_\mu \, dV = \boldsymbol{0} \right\} \tag{14}$$

Continuando con el contexto variacional, se denominan a los correspondientes espacios virtuales de los campos fluctuantes admisibles como:

$$\mathcal{U}_\mu \equiv \left\{ \delta\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu = \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2} | \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in \tilde{\mathcal{U}}_\mu \right\} \tag{15}$$

$$\mathcal{P}_\mu \equiv \left\{ \delta\tilde{p}_\mu = v_1 - v_2 | v_1, v_2 \in \tilde{\mathcal{P}}_\mu \right\} \tag{16}$$

Se establece entonces que las fluctuaciones de los descriptores primales, y sus correpondientes variaciones virtuales, son admisibles si:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{U}}_\mu;\ \ \delta\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu \in \mathcal{U}_\mu;\ \ \mathcal{U}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{U}}_\mu \tag{17}$$

$$\tilde{p}_\mu \in \tilde{\mathcal{P}}_\mu;\ \ \delta\tilde{p}_\mu \in \mathcal{P}_\mu;\ \ \mathcal{P}_\mu \equiv \tilde{\mathcal{P}}_\mu \tag{18}$$

3.2. Variables homogeneizadas y formas variacionales de balance en la microescala

Como consecuencia directa de Ec. (1), al postular variaciones admisibles independientes de cada descriptor se deduce:

Variables o relaciones homogeneizadas

1. Tensiones homogeneizadas:

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu dV \tag{19}$$

   Que se obtiene de Ec. (1), adoptando $\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu = \boldsymbol{0}$; $\delta p_M = 0$; $\delta\tilde{p}_\mu = 0$; $\delta\boldsymbol{\varphi}_M = \boldsymbol{0}$ y permitiendo variaciones arbitrarias de $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M$.

2. Tasa de contenido de masa del fluido/densidad del fluido homogeneizada:

$$\dot{\bar{m}}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \dot{\bar{m}}_\mu dV \tag{20}$$

   Deducida permitiendo variaciones arbitrarias de δp_M y adoptando $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \boldsymbol{0}$; $\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu = \boldsymbol{0}$; $\delta\tilde{p}_\mu = 0$; $\delta\boldsymbol{\varphi}_M = \boldsymbol{0}$.

3. Vector de filtración o flujo homogeneizado:

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} (\boldsymbol{v}_\mu - \dot{\bar{m}}_\mu \boldsymbol{y})\, dV \tag{21}$$

Se alcanza partiendo de Ec. (1), adoptando $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbf{0}$; $\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu = \mathbf{0}$; $\delta p_M = 0$; $\delta\tilde{p}_\mu = 0$ y con variaciones arbitrarias de $\delta\boldsymbol{\varphi}_M$.

Formas variacionales de balance en el RVE

1. Ecuación integral de balance de cantidad de movimiento:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu : \boldsymbol{\nabla}\, \delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu\, dV = 0 \;\; \forall\, \delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu \in \mathcal{U}_\mu \tag{22}$$

Ésta se consigue mediante variaciones cinemáticamente admisibles de $\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\mu}}$ en Ec. (1), siendo a su vez $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbf{0}$; $\delta p_M = 0$; $\delta\tilde{p}_\mu = 0$; $\delta\boldsymbol{\varphi}_M = \mathbf{0}$.

2. Ecuación integral de balance de masas:

$$\int_{\Omega_\mu} \left(\dot{\bar{m}}_\mu \delta\tilde{p}_\mu - \boldsymbol{v}_\mu \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla}\, \delta\tilde{p}_\mu\right)\, dV = 0 \;\; \forall\, \delta\tilde{p}_\mu \in \mathcal{P}_\mu \tag{23}$$

Se desprende de Ec. (1), al permitir variaciones admisibles de $\delta\tilde{p}_\mu$, con $\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbf{0}$; $\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu = \mathbf{0}$; $\delta p_M = 0$; $\delta\boldsymbol{\varphi}_M = \mathbf{0}$.

3.3. Relaciones constitutivas

De la teoría de poromecánica dispuesta por Coussy (2003) y Mroginski et al. (2011) se admiten las relaciones constitutivas para el material poroso y la velocidad del fluido.

Relaciones constitutivas del material poroso: se asume que las partículas sólidas tienen un comportamiento elástico lineal y las propiedades del medio microscópico son definidas mediante el tensor constitutivo elástico $(\boldsymbol{C_\mu})$, el tensor tangente de Biot $(\boldsymbol{b_\mu})$ y la inversa del módulo de Biot $\left(\frac{1}{M_\mu}\right)$

$$d\boldsymbol{\sigma_\mu} = d\boldsymbol{\sigma_\mu}\left(\boldsymbol{\varepsilon_\mu}, p_\mu\right) = \boldsymbol{C_\mu} : d\boldsymbol{\varepsilon}_\mu - \boldsymbol{b_\mu} dp_\mu \tag{24}$$

$$\frac{\dot{m}_\mu}{(\rho_f)_\mu} = \frac{\dot{m}_\mu}{(\rho_f)_\mu}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\mu}}, \dot{p}_\mu\right) = \dot{\bar{m}}_\mu\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\mu}}, \dot{p}_\mu\right) = \boldsymbol{b_\mu} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\dot{p}_\mu}{M_\mu} \tag{25}$$

Relaciones constitutivas para la velocidad del fluido: mediante la ley de Darcy, se establece que la velocidad de un flujo laminar se corresponde con el gradiente de presiones, mediante la permeabilidad del medio analizado (k_μ).

$$\boldsymbol{v_\mu} = \boldsymbol{v_\mu}\left(\boldsymbol{\nabla} p_\mu\right) = \boldsymbol{v_\mu}\left(\boldsymbol{\varphi_\mu}\right) = -k_\mu \boldsymbol{\nabla} p_\mu = -k_\mu \boldsymbol{\varphi_\mu} \tag{26}$$

3.4. El problema incremental de las ecuaciones variacionales del RVE. Discretización espacial y temporal

Es posible asumir que para cualquier tiempo t, las tensiones, la tasa de contenido de masa del fluido y la filtración en cada punto $\boldsymbol{y}$ del RVE son dados por un funcional constitutivo genérico $\mathfrak{S}_y^{(\cdot)}$ de la historia de deformaciones, poropresiones y gradiente de estas, en un punto hasta el tiempo t:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_\mu(\boldsymbol{y},t) &= \mathfrak{S}_y^{\sigma}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t(\boldsymbol{y}), p_\mu^t(\boldsymbol{y})\right),\\
\dot{\bar{m}}_\mu(\boldsymbol{y},t) &= \mathfrak{S}_y^{m}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu^t(\boldsymbol{y}), \dot{p}_\mu^t(\boldsymbol{y})\right),\\
\boldsymbol{\upsilon}_\mu(\boldsymbol{y},t) &= \mathfrak{S}_y^{\upsilon}\left(\boldsymbol{\varphi}_\mu^t(\boldsymbol{y})\right)
\end{aligned} \tag{27}$$

Transformando ahora el problema en uno incremental, para un intervalo de tiempo $[{}^{n}t, {}^{n+1}t]$ cada uno de los funcionales y las variables independientes pueden ser representados para un tiempo precripto ${}^{n+1}t$. Considerando además las relaciones constitutivas dadas en Ecs. (24-26):

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_\mu &= \hat{\sigma}_y\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mu, {}^{n+1}p_\mu\right) = \hat{\sigma}_y\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M + \boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}p_M + {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M \cdot \boldsymbol{y} + {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right),\\
{}^{n+1}\dot{\bar{m}}_\mu &= \hat{m}_y\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu, {}^{n+1}\dot{p}_\mu\right) = \hat{m}_y\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M + \boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu, {}^{n+1}\dot{p}_M + {}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_M \cdot \boldsymbol{y} + {}^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu\right),\\
{}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_\mu &= \hat{\upsilon}_y\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_\mu\right) = \hat{\upsilon}_y\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M + \boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right)
\end{aligned} \tag{28}$$

donde $\hat{(\cdot)}_y$ refiere a la función constitutiva en forma incremental en el punto de interes $\boldsymbol{y}$. Dados los funcionales previamente presentados, es posible redefinir las relaciones homogeneizadas en formato incremental de la siguiente forma:

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_M = \hat{\sigma}_M\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M, {}^{n+1}p_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right) \equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_\mu \, dV \tag{29}$$

$${}^{n+1}\dot{\bar{m}}_M = \hat{m}_M\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M, {}^{n+1}\dot{p}_M, {}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_M, {}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu, {}^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu, \Delta t\right) \equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} {}^{n+1}\dot{\bar{m}}_\mu \, dV \tag{30}$$

$${}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_M = \hat{\upsilon}_M\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M, {}^{n+1}\dot{p}_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu, \Delta t\right) \equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \left({}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_\mu - {}^{n+1}\dot{\bar{m}}_\mu \, \boldsymbol{y}\right) dV \tag{31}$$

Pueden escribirse asi las ecuaciones en formato variacional e incremental que rigen el problema a nivel del RVE:

$$\hat{G}\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mu, {}^{n+1}p_\mu, \delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu\right) = \int_{\Omega_\mu} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_\mu : \boldsymbol{\nabla}\,\delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu \, dV = 0 \;\; \forall\, \delta\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu \in \mathcal{U}_\mu \tag{32}$$

$$\hat{H}\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu, {}^{n+1}\dot{p}_\mu, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_\mu, \delta\tilde{p}_\mu\right) = \int_{\Omega_\mu} \left({}^{n+1}\dot{\bar{m}}_\mu \delta\tilde{p}_\mu - {}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}\,\delta\tilde{p}_\mu\right) dV = 0 \;\; \forall\, \delta\tilde{p}_\mu \in \mathcal{P}_\mu \tag{33}$$

En estas últimas ecuaciones los desplazamientos fluctuantes ${}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu$ y las poropresiones fluctuantes ${}^{n+1}\tilde{p}_\mu$ en el tiempo ${}^{n+1}t$, son la solución al problema incremental expuesto.

3.5. Discretización mediante elementos finitos y solución del problema en el RVE

La aproximación mediante elementos finitos del sistema Ecs. (32-33) para una discretización espacial dada h consiste en determinar los vectores incógnitas ${}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\mu}}$, ${}^{\boldsymbol{n+1}}\tilde{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{\mu}}$ de desplazamientos y poropresiones fluctuantes nodales tales que:

$$\hat{G}^h\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_\mu, {}^{n+1}p_\mu, \boldsymbol{\eta}^u\right) = \left[\int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{uT}_\mu\, {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_\mu\, dV\right]\cdot\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{u}} = 0;\ \ \forall\, \boldsymbol{\eta}^u \in \mathcal{U}^h_\mu \tag{34}$$

$$\hat{H}^h\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu, {}^{n+1}\dot{p}_\mu, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_\mu, \boldsymbol{\eta}^p\right) = \left[\int_{\Omega_\mu} \left(\boldsymbol{N}^{pT}_\mu\, {}^{n+1}\dot{\tilde{m}}_\mu - \boldsymbol{B}^{pT}_\mu\, {}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_\mu\right) dV\right]\cdot\boldsymbol{\eta}^p = 0;\ \ \forall\, \boldsymbol{\eta}^p \in \mathcal{P}^h_\mu \tag{35}$$

donde Ω^h_μ hace referencia al dominio del RVE discretizado, $\boldsymbol{B}^u_\mu$ es la matriz global deformación-desplazamiento, $\boldsymbol{B}^p_\mu$ la matriz global gradiente de poropresiones-poropresiones, $\boldsymbol{N}^p_\mu$ la matriz de funciones de interpolación de las poropresiones, $\boldsymbol{\eta}^u, \boldsymbol{\eta}^p$ son los vectores globales de los desplazamientos y poropresiones virtuales nodales del RVE, mientras que $\mathcal{U}^h_\mu$ y $\mathcal{P}^h_\mu$ son los espacios finitos dimensionales de los vectores de desplazamientos y poropresiones virtuales asociados con la discretización de elementos finitos h del dominio Ω_μ.
El sistema de ecuaciones Ecs. (34-35) se resuelve mediante el esquema iterativo de Newton-Raphson, cuya iteración (k) consiste en resolver la forma linearizada:

$$\begin{aligned}
\left[{}^{n+1}\boldsymbol{F}^{u,(k-1)}_\mu + \boldsymbol{K}_\mu \Delta\tilde{\boldsymbol{U}}^{(k)}_\mu - \boldsymbol{Q}_\mu \Delta\tilde{\boldsymbol{P}}^{(k)}_\mu\right]\cdot\boldsymbol{\eta}^u &= 0 \\
\left[{}^{n+1}\boldsymbol{F}^{p,(k-1)}_\mu + \boldsymbol{Q}^T_\mu \Delta\dot{\tilde{U}}^{(k)}_\mu + \boldsymbol{S}_\mu \Delta\dot{\tilde{P}}^{(k)}_\mu + \boldsymbol{H}_\mu \Delta\tilde{P}^{(k)}_\mu\right]\cdot\boldsymbol{\eta}^p &= 0 \\
\forall\boldsymbol{\eta}^u \in \mathcal{U}^h_\mu;\ \boldsymbol{\eta}^p \in \mathcal{P}^h_\mu &
\end{aligned} \tag{36}$$

para los vectores nodales incógnitas de desplazamientos y poropresiones fluctuantes en cada iteración $\boldsymbol{\Delta\tilde{U}^{(k)}_\mu} \in \boldsymbol{\mathcal{U}^h_\mu}, \boldsymbol{\Delta\tilde{P}^{(k)}_\mu} \in \mathcal{P}^h_\mu$. En la primer ecuación Ec. (36) se define:

$$\begin{aligned}
&{}^{n+1}\boldsymbol{F}^{u,(k-1)}_\mu \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{uT}_\mu\, {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(k-1)}_\mu dV \\
&\boldsymbol{K}_\mu = \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{uT}_\mu\, \boldsymbol{C}_\mu\, \boldsymbol{B}^u_\mu dV;\ \ \boldsymbol{C}_\mu = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_\mu}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_\mu} \\
&\boldsymbol{Q}_\mu = \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{uT}_\mu\, \boldsymbol{b}_\mu\, \boldsymbol{N}^p_\mu dV;\ \ \boldsymbol{b}_\mu = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_\mu}{\partial p_\mu}
\end{aligned} \tag{37}$$

Mientras que para la segunda ecuación dada en Ec. (36), se tiene:

$$\begin{aligned}
&{}^{n+1}\boldsymbol{F}^{p,(k-1)}_\mu = \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{N}^{pT}_\mu\, {}^{n+1}\dot{\tilde{m}}^{(k-1)}_\mu\, dV - \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{pT}_\mu\, {}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}^{(k-1)}_\mu\, dV \\
&\boldsymbol{S}_\mu = \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{N}^{pT}_\mu\, \frac{1}{M_\mu}\, \boldsymbol{N}^p_\mu\, dV;\ \ \frac{1}{M_\mu} = \frac{\partial\dot{\tilde{m}}_\mu}{\partial p_\mu} \\
&\boldsymbol{H}_\mu = \int_{\Omega^h_\mu} \boldsymbol{B}^{pT}_\mu\, \boldsymbol{k}_\mu\, \boldsymbol{B}^p_\mu\, dV;\ \ \boldsymbol{k}_\mu = \frac{\partial\boldsymbol{\upsilon}_\mu}{\partial\boldsymbol{\varphi}_\mu}
\end{aligned} \tag{38}$$

Halladas las soluciones del proceso iterativo, una nueva aproximación de las incógnitas nodales fluctuantes para el tiempo ${}^{n+1}t$ es obtenida de acuerdo la actualización dada por la fórmula de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{U}}_\mu &= {}^{n}\tilde{\boldsymbol{U}}_\mu + \boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{U}}_\mu \\ {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{P}}_\mu &= {}^{n}\tilde{\boldsymbol{P}}_\mu + \boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{P}}_\mu \end{aligned} \tag{39}$$

El sistema de ecuaciones Ec. (36) se resuelve siguiendo la metodología fijada por Lewis y Schrefler (1998) y extendida por Mroginski y Etse (2013), siendo que en el presente trabajo se pretende determinar variables nodales *fluctuantes* en el RVE.

4. ECUACIONES VARIACIONALES DE BALANCE DE LA MACROESCALA

Partiendo de las ecuaciones variacionales de balance de cantidad de movimiento y balance de masas de la escala macroscópica en formato de integrales, se obtiene un sistema de ecuaciones variacionales, semejante a lo propuesto por Khoei y Hajiabadi (2018), quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\hat{G}_M \equiv \int_{\Omega_M} \boldsymbol{\sigma}_M : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_M \, dV - \int_{\Gamma_M} \boldsymbol{t}_M \cdot \delta\boldsymbol{u}_M \, dA = 0 \\ &\hat{H}_M \equiv \int_{\Omega_M} \left(\dot{m}\delta p_M - \boldsymbol{v}_M \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_M\right) \, dV - \int_{\Gamma_M} q_M \delta p_M \, dA = 0 \\ &\forall\, \delta\boldsymbol{u}_M \in \mathbb{R}^3;\ \forall\, \delta p_M \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \tag{40}$$

4.1. Condiciones iniciales y de contorno

Las condiciones iniciales especifican por completo el campo de desplazamientos y presiones neutras en el tiempo *t=0* (Lewis y Schrefler (1998))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_M &= {}^0\boldsymbol{u}_M \ \ \forall\, \Omega_M;\ \ \Gamma_M \\ p_M &= {}^0 p_M \ \ \forall\, \Omega_M;\ \ \Gamma_M \end{aligned} \tag{41}$$

donde Ω_M es el dominio en la macroescala y Γ_M su contorno.

Las condiciones de borde pueden imponerse ya sea para Γ_M^u y Γ_M^p o en términos de flujos en Γ_M^v y Γ_M^σ, siendo $\Gamma_M = \Gamma_M^u \cup \Gamma_M^p \cup \Gamma_M^v \cup \Gamma_M^\sigma$.
Se impone para desplazamientos y poropresesiones

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_M &= \bar{\boldsymbol{u}}_M \ \ \forall\, \Gamma_M^u \\ p_M &= \bar{p}_M \ \ \forall\, \Gamma_M^p \end{aligned} \tag{42}$$

Por otra parte las restricciones de borde en tracción para las tensiones se definen

$$\boldsymbol{\sigma}_M \cdot \boldsymbol{n}_M^\sigma = \boldsymbol{t}_M \ \ \forall\, \Gamma_M^\sigma \tag{43}$$

donde $\boldsymbol{n}_M^\sigma$ es la normal unitaria hacia el exterior de Γ_M^σ y $\boldsymbol{t}_M$ las tracciones en el contorno.
Finalmente para el flujo se establece

$$\boldsymbol{v}_M \cdot \boldsymbol{n}_M^v = q_M \ \ \forall\, \Gamma_M^v \tag{44}$$

donde $\boldsymbol{n}_M^v$ es la normal unitaria hacia el exterior de Γ_M^v y q_M el flujo normal al contorno.

4.2. Discretización espacial y temporal

Se considera el dominio discreto mediante elementos finitos *h* y una discretización temporal. Se reescriben de esta manera para un intervalo de tiempo $[{}^{n}t, {}^{n+1}t]$ las ecuaciones variacionales integrales de balance macroescala

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}\hat{G}^h_M &\equiv \int_{\Omega^h_M} \boldsymbol{B}^T_u\, {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_M \, dV - \int_{\Gamma^h_M} \boldsymbol{N}^T_u\, {}^{n+1}\boldsymbol{t}_M \, dA = 0 \\
{}^{n+1}\hat{H}^h_M &\equiv \int_{\Omega^h_M} \boldsymbol{N}^T_p\, {}^{n+1}\dot{\bar{m}}_M \, dV - \int_{\Omega^h_M} \boldsymbol{B}^T_p\, {}^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_M \, dV - \int_{\Gamma^h_M} \boldsymbol{N}^T_p\, {}^{n+1}q_M \, dV = 0
\end{aligned} \tag{45}$$

donde Ω^h_M y Γ^h_M hacen referencia al dominio y contorno de la macroescala discretizada y las matrices $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{B}_p$ y $\boldsymbol{N}_p$ se definen de igual manera que para el RVE, con la diferencia de que refieren a la escala macro.
Expandiendo las ecuaciones residuales Ec. (45) con una serie de Taylor hasta los términos de primer orden, se obtienen las expresiones aproximadas cuyas incógnitas son los incrementos de desplazamientos $\Delta\boldsymbol{U}^{(k)}_M$ y poropresiones $\Delta\boldsymbol{P}^{(k)}_M$ nodales macroscópicas, las cuales se resuelven a través del procedimiento de Newton-Raphson en un algoritmo iterativo incremental quedando para el incremento de tiempo ${}^{n+1}t$ en la iteración (*k*), de la siguiente manera (se omite el supraindice *h* en adelante):

$$\begin{bmatrix} {}^{n+1}\hat{G}^{(k)}_M \\ {}^{n+1}\hat{H}^{(k)}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n}\hat{G}_M \\ {}^{n}\hat{H}_M \end{bmatrix} + {}^{n+1}\boldsymbol{J}^{(k-1)} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{U}^{(k)}_M \\ \Delta\boldsymbol{P}^{(k)}_M \end{bmatrix} \tag{46}$$

siendo que la matriz *Jacobiana macroescala* se compone de:

$${}^{n+1}\boldsymbol{J}^{(k-1)}_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{n+1}\hat{G}^{(k-1)}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{U}^{(k-1)}_M} & \frac{\partial^{n+1}\hat{G}^{(k-1)}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{P}^{(k-1)}_M} \\ \frac{\partial^{n+1}\hat{H}^{(k-1)}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{U}^{(k-1)}_M} & \frac{\partial^{n+1}\hat{H}^{(k-1)}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{P}^{(k-1)}_M} \end{bmatrix} \tag{47}$$

Las componentes de la matriz *Jacobiana macroescala* que se definen a continuación, dependen de los tensores tangentes homogeneizados, cuya determinación se efectúa más adelente.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n+1}\hat{G}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{U}_M} &= \boldsymbol{B}^T_u \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\boldsymbol{B}_u \\
\frac{\partial^{n+1}\hat{G}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{P}_M} &= \boldsymbol{B}^T_u \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\boldsymbol{B}_p + \boldsymbol{B}^T_u \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_M}{\partial^{n+1}p_M}\boldsymbol{N}_p \\
\frac{\partial^{n+1}\hat{H}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{U}_M} &= -\boldsymbol{B}^T_p \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\boldsymbol{B}_u + \boldsymbol{N}^T_p \frac{\partial^{n+1}\dot{\bar{m}}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\boldsymbol{B}_u \\
\frac{\partial^{n+1}\hat{H}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{P}_M} &= -\boldsymbol{B}^T_p \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\boldsymbol{B}_p - \boldsymbol{B}^T_p \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_M}{\partial^{n+1}p_M}\boldsymbol{N}_p \\
&\quad + \boldsymbol{N}^T_p \frac{\partial^{n+1}\dot{\bar{m}}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\boldsymbol{B}_p + \boldsymbol{N}^T_p \frac{\partial^{n+1}\dot{\bar{m}}_M}{\partial^{n+1}p_M}\boldsymbol{N}_p
\end{aligned} \tag{48}$$

4.3. “Tensores” tangentes homogeneizados consistentes

Considerando la deformación, poropresión y gradiente de poropresiones macroscópica perturbadas:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon &= {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M + \epsilon\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M \\
p_\epsilon &= {}^{n+1}p_M + \epsilon\Delta p_M \\
\boldsymbol{\varphi}_\epsilon &= {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M + \epsilon\Delta\boldsymbol{\varphi}_M
\end{aligned} \tag{49}$$

donde ϵ es un escalar, mientras que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M$,$\Delta p_M$ y $\Delta\boldsymbol{\varphi}_M$ refieren a tensores de deformación, a escalares de poropresiones y a vectores de gradiente de presiones neutras respectivamente, dados en forma genérica incremental.
Los tensores tangentes incrementales homogeneizados en un tiempo ${}^{n+1}t$, consistentes con las funciones incrementales homogeneizadas Ecs. (29-31), serán determinados para cualquier dirección macroscópica de las variables incrementales previamente definidas. Los tensores constitutivos incrementales homogeneizados establecen de este modo la relacion que existe entre las diferentes variables primarias y las funciones incrementales homogeneizadas en el tiempo ${}^{n+1}t$.

Para cualquier deformación macróscopica en la dirección $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}_M$ afectando al tensor de tensiones homogeneizado se tiene:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_M\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon, {}^{n+1}p_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right) =&\hat{\sigma}_M\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M, {}^{n+1}p_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right) + \\ &\epsilon^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\,\boldsymbol{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M + O\left(\epsilon\right)\end{aligned} \tag{50}$$

Donde ${}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\,\boldsymbol{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M$ es la derivada direccional de la función constitutiva incremental $\hat{\sigma}_M$ en la dirección $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M$

$${}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\,\boldsymbol{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M \equiv \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \hat{\sigma}_M\left(\boldsymbol{\varepsilon}_\epsilon, {}^{n+1}p_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right) \tag{51}$$

Siendo el tensor constitutivo ${}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\boldsymbol{C}$:

$$\begin{aligned}{}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\boldsymbol{C} &\equiv \frac{\partial}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\hat{\sigma}_M\left({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M, {}^{n+1}p_M, {}^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M, {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu, {}^{n+1}\tilde{p}_\mu\right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{C}_\mu : \left(\mathbb{I} + \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\right) - \boldsymbol{b}_\mu \otimes \frac{\partial^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\right] dV\end{aligned} \tag{52}$$

Siendo $\mathbb{I}$ el tensor identidad de cuarto orden y más adelante $\boldsymbol{I}$ el tensor identidad de segundo orden.
Se procede de igual manera con cada una de las direcciones incrementales $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_M$, Δp_M y $\Delta\boldsymbol{\varphi}_M$

y se afecta también a los funcionales homogeneizados $\hat{m}_M$ y $\hat{\upsilon}_M$

$$
\begin{aligned}
{}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\boldsymbol{b} &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{b}_\mu : \left(\frac{\partial^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M} + \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\right) + \frac{1}{M_\mu}\frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta\varepsilon_M}\boldsymbol{C}^\upsilon &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[k_\mu\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M} - \boldsymbol{b}_\mu : \left(\frac{\partial^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M} + \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\right)\otimes\boldsymbol{y}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{M_\mu}\frac{\partial^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_M}\otimes\boldsymbol{y}\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta p_M}\boldsymbol{b} &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\mu}} : \left(\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\mu}}}{\partial^{n+1}p_M}\right) - \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{\mu}}\left(1 + \frac{\partial^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}p_M}\right)\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta p_M}\frac{1}{M} &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{b}_\mu : \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}p_M} + \frac{1}{M_\mu}\left(\frac{\partial^{n+1}\dot{p}_M}{\partial^{n+1}p_M} + \frac{\partial^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}p_M}\right)\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta p_M}\boldsymbol{b}^\upsilon &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[k_\mu\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}p_M} - \boldsymbol{b}_\mu : \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}p_M}\otimes\boldsymbol{y}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{M_\mu}\left(\frac{\partial^{n+1}\dot{p}_M}{\partial^{n+1}p_M} + \frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu}{\partial^{n+1}p_M}\right)\otimes\boldsymbol{y}\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta\varphi_M}\boldsymbol{k}^\sigma &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{C}_\mu : \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M} - \boldsymbol{b}_\mu\otimes\left(\boldsymbol{y} + \frac{\partial^{n+1}\tilde{p}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\right)\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta\varphi_M}\boldsymbol{k}^m &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[\boldsymbol{b}_\mu : \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M} + \frac{1}{M_\mu}\left(\frac{\partial\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_M\cdot\boldsymbol{y}\right)}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M} + \frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\right)\right] dV \\
{}^{hom}{}_{\Delta\varphi_M}\boldsymbol{k}^\upsilon &\equiv \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left[-k_\mu\left(\boldsymbol{I} + \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\right) - \boldsymbol{b}_\mu : \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}^{n+1}\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}\,{}_M}\otimes\boldsymbol{y}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{M_\mu}\left(\frac{\partial\left({}^{n+1}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_M\cdot\boldsymbol{y}\right)}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{M}}} + \frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{p}}_\mu}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varphi}_M}\right)\otimes\boldsymbol{y}\right] dV
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Para poder determinar los tensores constitutivos homogeneizados consistentes es necesario calcular las derivadas de las variables fluctuanctes ${}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{u}}_\mu$ y ${}^{n+1}\tilde{p}_\mu$, ya determinadas al resolver el problema en la microescala Ec. (36), respecto de cada una de las variables macroscópicas. Se alcanza de esta manera la descripción completa del problema macroscópico.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación variacional al problema de medios porosos saturados, basado en el Pricipio de Potencia Virtual Multiescala. Se establecieron ecuaciones para ambas escalas, las cuales permiten obtener variables macroscopicas dado el modelo constitutivo multiescala adoptado. Las ecuaciones se pretenden resolver a futuro aplicando la metodología FE2 mediante ordenador.

REFERENCIAS

Blanco P., Sánchez P., de Souza Neto E., y Feijóo R. Variational foundations and generalized unified theory of rve-based multiscale models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23, 2014. doi:10.1007/s11831-014-9137-5.

Coussy O. *Poromechanics*. John Wiley and Sons, Ltd, 2003. ISBN 9780470092712.

de Souza Neto E., Blanco P., Sánchez P., y Feijóo R. An rve-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mechanics of Materials*, 80:136–144, 2015. ISSN 0167-6636. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.10.007.

de Souza Neto E.A. y Feijóo R.A. *Variational Foundations of Large Strain Multiscale Solid Constitutive Models: Kinematical Formulation*, capítulo 9, páginas 341–378. John Wiley and Sons, Ltd, 2006. ISBN 9783527632312. doi:https://doi.org/10.1002/9783527632312.ch9.

Khoei A. y Hajiabadi M. Fully coupled hydromechanical multiscale model with microdynamic effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(3):293–327, 2018. doi:https://doi.org/10.1002/nme.5805.

Lewis R. y Schrefler B. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation in Porous Media*, volumen 34. John Wiley and Sons, Ltd, 1998. ISBN 0 471 92809 7.

Lopez Rivarola F., Labanda N., y Etse G. Thermodynamically consistent multiscale homogenization for thermo-poroplastic materials. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 70:1–27, 2019. doi:10.1007/s00033-019-1125-z.

Mroginski J. y Etse G. A finite element formulation of gradient-based plasticity for porous media with c1 interpolation of internal variables. *Computers and Geotechnics*, 49:7–17, 2013. doi:10.1016/j.compgeo.2012.11.003.

Mroginski J., Etse G., y Vrech S. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media. *International Journal of Plasticity*, 27:620–634, 2011. doi:10.1016/j.ijplas.2010.08.010.

Perić D., de Souza Neto E.A., Feijóo R.A., Partovi M., y Molina A.J.C. On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(1-5):149–170, 2011. doi:https://doi.org/10.1002/nme.3014.

Sánchez P., Blanco P., Huespe A., y Feijóo R. Failure-oriented multi-scale variational formulation: Micro-structures with nucleation and evolution of softening bands. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 257:221–247, 2013. ISSN 0045-7825. doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.11.016.