

## ESTUDIO DE PERFILES AERODINÁMICOS NO DELGADOS CON CAMBIO DE FORMA MEDIANTE UN MÉTODO DE VORTICIDAD DISTRIBUIDA

### 2D THICK-MORPHING-AIRFOILS STUDY USING DISTRIBUTED VORTICITY

Santiago Ribero<sup>a,b</sup>, Agostina C. Aichino<sup>b</sup>, Marcelo F. Valdez<sup>c</sup> y Sergio Preidikman<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [idit@fcefyn.edu.ar](mailto:idit@fcefyn.edu.ar), [www.inv.idit.efn.uncor.edu](http://www.inv.idit.efn.uncor.edu)*

<sup>b</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina, <https://fcefyn.unc.edu.ar>*

<sup>c</sup>*Instituto de Investigaciones en Energía no Convencional, Universidad Nacional de Salta - CONICET, Av. Bolivia 51150, 4400 Salta, Argentina, [mfvaldez@unsa.edu.ar](mailto:mfvaldez@unsa.edu.ar), <http://inenco.unsa.edu.ar>*

**Palabras clave:** Perfiles no delgados, Perfiles morphing, Vorticidad distribuida.

**Resumen.** Las nuevas tecnologías de fabricación combinadas con el uso de materiales inteligentes han impulsado el diseño de superficies sustentadoras (alas de aeronaves y palas de turbinas eólicas) que cambian de forma de manera adaptativa, eliminando la necesidad de superficies de control móviles. Una manera de incorporar este cambio de forma es mediante la modificación local de la geometría de los perfiles aerodinámicos que componen la superficie sustentadora. En este trabajo se presenta una formulación unificada para estudiar el cambio de forma y la aerodinámica no estacionaria en perfiles de gran espesor. El cambio de forma en el perfil se obtiene a partir de la deformación de su línea media, manteniendo su longitud constante. La capa límite sobre la superficie del perfil es modelada aerodinámicamente como una sábana vorticiosa adherida de intensidad variable, tanto temporal como espacialmente. Partículas vorticiosas generadas y desprendidas desde el borde de fuga son empleadas para modelar la estela. La velocidad de generación de vorticidad desde el borde de fuga del perfil se determina mediante la versión inestacionaria de la condición de Kutta.

**Keywords:** Thick airfoils, Morphing airfoils, Distributed vorticity.

**Abstract.** New manufacturing technologies combined with the use of smart materials have fueled the design of lifting surfaces (such as aircraft wings and wind turbine blades) that adaptively change their shape and, in turn, have reduced the need for hinged control surfaces. This change of shape of lifting surfaces may be achieved by a local modification of the airfoil geometry. In this paper, a framework to study the change of shape and the unsteady aerodynamics of thick airfoils is presented. The change in the airfoil geometry is performed by the deformation of its camber line with a constant-length constraint. Regarding the aerodynamic model, the boundary layer is treated as a bounded vortex sheet of variable intensity, the wake is simulated as a system of vortex blobs, and the rate at which vorticity is shed from the trailing edge of the airfoil into the wake is determined by the unsteady Kutta condition.

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra “morphing” es un anglicismo utilizado para hacer referencia a cambios suaves o graduales en la forma de un cuerpo. En general, el morphing es una de las ramas de la disciplina tecnológica de las estructuras inteligentes, las cuales permiten sistemas de sensores y actuadores totalmente integrados de manera que la estructura tenga la capacidad de adaptarse a cambios externos o a diferentes condiciones de operación. Esta tecnología podría emplearse, por ejemplo, para incorporar continuos de forma de las palas de turbinas eólicas, que permitan modificar el flujo de manera suave a lo largo de la pala del aerogenerador y/o contrarrestar efectos inestacionarios indeseables causados por la llamada “sombra de la torre” y por los cambios en altura del perfil del viento incidente producto de la presencia de la capa límite terrestre. En este trabajo se presenta, en primera instancia, una formulación para describir la evolución temporal de la geometría de perfiles aerodinámicos no delgados y, en segunda instancia, una formulación que permite estimar y observar el comportamiento de los parámetros aerodinámicos durante el proceso de cambio de forma. El cambio de forma en el perfil se obtiene a partir de la deformación de su línea media. Imponiendo desplazamientos verticales y cambios en la pendiente de los extremos de la línea media, la forma de la curva que define su configuración deformada se determina utilizando polinomios cúbicos de Hermite e imponiendo, como restricción, que la longitud de la misma permanezca constante. Las posiciones y las velocidades de puntos ubicados sobre el intradós y el extradós se determinan asumiendo una conexión rígida entre estos puntos, y puntos ubicados convenientemente sobre la línea media. La formulación aerodinámica es una variación al método de red de vórtices clásico en la que se utiliza una aproximación lineal de la función de distribución de vorticidad que representa a la sábana vorticiosa adherida al perfil. La condición de no penetración se impone en los puntos de control considerando los aportes de las regiones vorticosas al campo de velocidades del fluido y la velocidad de la superficie sólida que varía en cada instante de tiempo durante el proceso de morphing. La estela que se desprende del perfil es modelada como una colección de partículas con vorticidad concentrada e invariable en el tiempo.

## 2. CINEMÁTICA DEL MORPHING

Para definir la geometría de un perfil aerodinámico y dar su orientación en el plano se utiliza un marco de referencia inercial,  $\mathbf{N}$ , construido con una base vectorial dextrógira y ortonormal,  $\mathbf{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ . Este marco de referencia está dotado de un sistema de coordenadas cartesianas,  $(X, Y, Z)$ , denominado sistema de coordenadas global. Solidario al perfil, se identifica un punto  $O$  en la semicuerda,  $b$ , de su línea media. La posición de este punto coincide, en la configuración no deformada del perfil, con el origen del sistema coordenado global (véase la Fig. 1).

### 2.1. Discretización del contorno del perfil aerodinámico y de su línea media

El contorno del perfil, en un instante de tiempo  $t$ , se define por la curva paramétrica  $\mathbf{r}_0(l, t)$ . La longitud de arco  $l$  se mide desde en sentido horario desde el borde de fuga del intradós hacia borde de fuga del extradós (véase la Fig. 2a). La curva  $\mathbf{r}_0(l, t)$  es aproximada mediante tramos de rectas de longitud pequeña. Este conjunto de rectas definen el dominio discreto  $\bar{\mathbf{r}}_0^h(l, t)$ .

$$\mathbf{r}_0(l, t) \approx \bar{\mathbf{r}}_0^h(l, t). \quad (1)$$

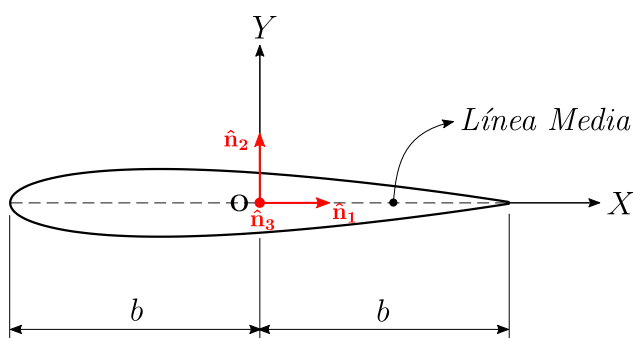


Figura 1: Perfil alar simétrico en su configuración no deformada.

El dominio discreto queda definido como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_0^h &= \cup \bar{\mathbf{r}}_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, n_{el}, \\ \bar{\mathbf{r}}_0^i &= \mathbf{r}_0^i \cup \partial \mathbf{r}_0^i, \quad \mathbf{r}_0^i \cap \mathbf{r}_0^j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\bar{\mathbf{r}}_0^i$  es el subdominio del elemento discreto  $i$ ,  $n_{el}$  es el número de elementos,  $\partial \mathbf{r}_0^i$  son los bordes del subdominio  $i$  y son llamados nodos, y  $\mathbf{r}_0^i$  es el interior del subdominio y es llamado panel. La distribución de los paneles es no uniforme, de manera que un mayor número de paneles se concentran en las cercanías del borde de ataque y del borde de fuga del perfil. Cada uno de los nodos ubicados sobre el contorno del perfil se encuentra asociado a un único nodo ubicado sobre la línea media (véase la Fig. 2b). De aquí en adelante, a los nodos ubicados sobre la línea media se les llamará *nodos maestros* y a los nodos ubicados sobre la superficie del perfil se les llamará *nodos esclavos*.

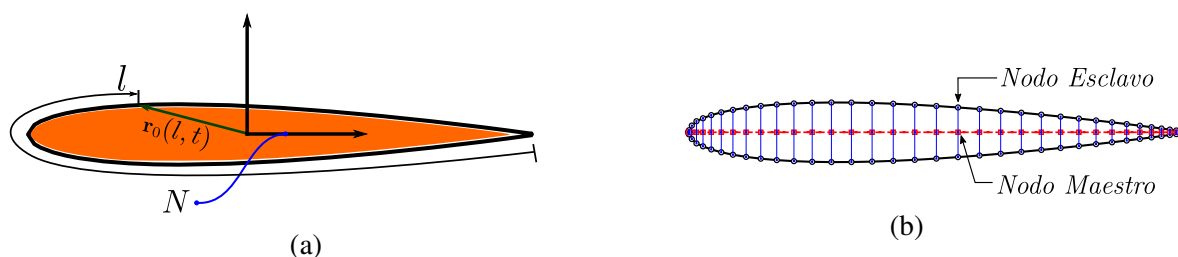


Figura 2: (a) Representación de la curva paramétrica  $\mathbf{r}_0(l, t)$ ; (b) Discretización del contorno del perfil y de su línea media: nodos esclavos y maestros.

## 2.2. Desplazamientos de los nodos maestros

El cambio en la forma del perfil se obtiene a partir de la deformación de su línea media. Los nodos maestros de los extremos coincidentes con el borde de ataque y con el borde de fuga del perfil se denominan nodo  $A$  y nodo  $B$ . Si a éstos se le imponen desplazamientos verticales ( $h_A(t)$  y  $h_B(t)$ ) y cambios en sus pendientes ( $\tan[\theta_A(t)]$  y  $\tan[\theta_B(t)]$ ), entonces es posible definir la geometría de la línea media deformada mediante interpolación utilizando polinomios cúbicos de Hermite. La curva  $H(X, t)$  que define, en cada instante de tiempo  $t$ , la configuración deformada de la línea media se muestra en la Fig. 3 y su expresión viene dada por

$$H(X, t) = h_A(t)N_1(X, t) + \tan[\theta_A(t)]N_2(X, t) + h_B(t)N_3(X, t) + \tan[\theta_B(t)]N_4(X, t), \quad (3)$$

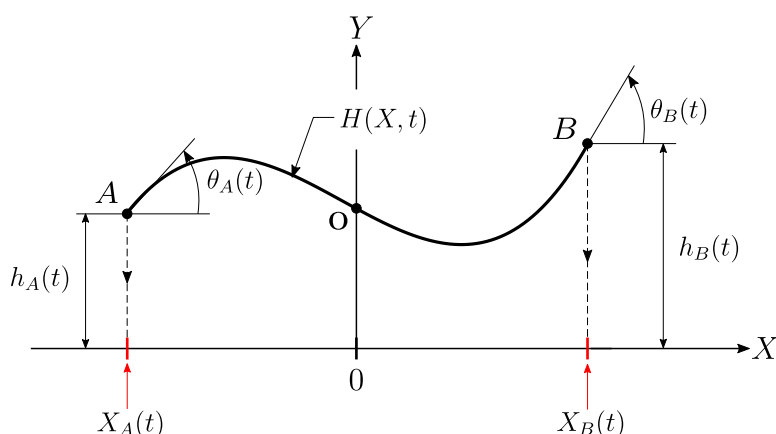


Figura 3: Configuración deformada de la línea media en un instante de tiempo  $t$ .

donde  $N_1(X, t)$ ,  $N_2(X, t)$ ,  $N_3(X, t)$  y  $N_4(X, t)$  son los cuatro polinomios interpolantes cúbicos de Hermite (Kreyszig, 2006).

Durante el proceso de cambio de forma, la coordenada global  $X_O$  del punto O se mantiene constante e igual a cero,  $X_O \equiv 0$ , y la longitud de la línea media,  $L$ , debe permanecer constante. Luego, en cada instante de tiempo  $t$ , tanto la longitud del arco que une al punto A con el punto O, como la longitud del arco que une al punto O con el punto B, deben permanecer constantes e iguales a  $L/2$

$$\int_{X_A(t)}^0 \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial}{\partial X} H(X, t) \right]^2} dX - \frac{L}{2} = 0, \quad \int_0^{X_B(t)} \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial}{\partial X} H(X, t) \right]^2} dX - \frac{L}{2} = 0. \quad (4)$$

La ecuación (4) conforma un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son  $X_A(t)$  y  $X_B(t)$ . Para determinar sus valores, se utiliza la función *fsolve* de MATLAB<sup>®</sup>. Una vez obtenidos los valores de  $X_A(t)$  y  $X_B(t)$ , es posible determinar las coordenadas en la dirección  $\hat{n}_1$  de cada nodo maestro perteneciente al interior de la línea media,  $X_k(t)$ ,  $k = 2, 3, \dots, n_{np} - 1$  (siendo  $n_{np}$  el número de nodos). Para esto se utiliza la función *fzero* de MATLAB<sup>®</sup>.

Luego, las coordenadas en la dirección  $\hat{n}_2$  de cada nodo maestro perteneciente al interior de la línea media,  $Y_k(t)$ , se obtienen evaluando la ecuación (3) en  $X_k(t)$ , y el cambio en la pendiente de la curva  $H(X, t)$  en el nodo maestro  $k$  se obtiene como

$$\theta_k(t) = \arctan \left[ \frac{\partial}{\partial X} H(X, t) \Big|_{X=X_k(t)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n_{np}. \quad (5)$$

### 2.3. Desplazamientos de los nodos esclavos

Las coordenadas globales de los nodos maestros se utilizan para determinar las posiciones en la configuración deformada de los nodos esclavos en cada instante de tiempo  $t$ . Para esto, a cada nodo maestro  $k$  se le asocia un marco de referencia local,  $\mathbf{A}_k = \{ {}^k\hat{\mathbf{a}}_1, {}^k\hat{\mathbf{a}}_2, {}^k\hat{\mathbf{a}}_3 \}$ . Luego, se asume una conexión rígida,  $\mathcal{B}_k$ , en la dirección  ${}^k\hat{\mathbf{a}}_2$  entre el nodo maestro y su único nodo esclavo asociado (véase la Fig. 4). La posición del nodo esclavo  $k$ ,  $\mathbf{R}_{LUk}$ , respecto del marco de referencia N, se determina mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{R}_{LUk} = \mathbf{R}_{CLk} + \mathbf{C}_{NAk} \mathbf{r}_{CL2LUk}, \quad k = 1, 2, \dots, n_{np}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{R}_{CLk}$  es el vector posición del nodo maestro  $k$  respecto del marco de referencia  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{C}_{NAk}$  es la matriz de rotación del marco  $\mathbf{A}_k$  al marco  $\mathbf{N}$ , y  $\mathbf{r}_{CL2LUk}$  es el vector posición del nodo esclavo  $k$  respecto del marco  $\mathbf{A}_k$ .

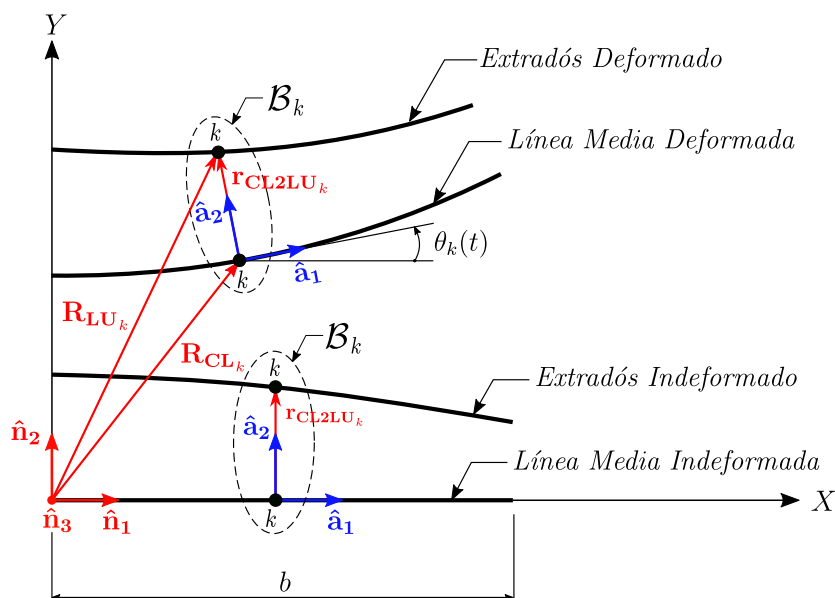


Figura 4: Sistema de referencia local  $\mathbf{A}_k$ , conexión rígida  $\mathcal{B}_k$  en su configuración indeformada y deformada entre el nodo maestro y el nodo esclavo  $k$ .

#### 2.4. Velocidades de los nodos maestros

Las velocidades de los nodos maestros se componen de una velocidad de traslación y de una velocidad de rotación. Para obtener la componente en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}_1$  de la velocidad de traslación del nodo maestro  $k$ ,  $\dot{X}_k(t)$ , se iguala a cero la derivada temporal de la longitud del arco que une el nodo  $A$  con el nodo  $k$

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{X_A(t)}^{X_k(t)} \sqrt{1 + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} H(\xi, t) \right]^2} d\xi \right] = 0, \quad X_A(t) \leq \xi \leq X_k(t). \quad (7)$$

Para derivar bajo el signo de integral, a la ecuación (7) se le aplica la regla de Leibniz (Flanders, 1973), obteniéndose, finalmente, la expresión para  $\dot{X}_k(t)$ .

La componente en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}_2$  de la velocidad de traslación del nodo maestro  $k$ ,  $\dot{Y}_k(t)$ , se obtiene evaluando la derivada temporal de la ecuación (3) en  $X_k(t)$ , y la magnitud de su velocidad angular se determina derivando la ecuación (5) respecto del tiempo

$$\dot{Y}_k(t) = \frac{d}{dt} H[X_k(t), t], \quad \dot{\theta}_k(t) = \frac{d}{dt} \theta_k(t). \quad (8)$$

#### 2.5. Velocidades de los nodos esclavos

A partir de las velocidades del nodo maestro  $k$ , es posible determinar la velocidad de traslación de su nodo esclavo asociado,  $\mathbf{V}_{LUk}$ , respecto del marco de referencia  $\mathbf{N}$ , como

$$\mathbf{V}_{LUk} = \mathbf{V}_{CLk} + \mathbf{C}_{NAk} (\mathbf{N}\boldsymbol{\omega}^A \times \mathbf{r}_{CL2LUk}), \quad k = 1, 2, \dots, n_{np}, \quad (9)$$

donde  $\mathbf{V}_{CLk}$  es el vector velocidad de traslación del nodo maestro  $k$  respecto del marco de referencia  $\mathbf{N}$ , y  ${}^{\mathbf{N}}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{A}_k}$  es el vector velocidad angular de la conexión rígida  $\mathcal{B}_k$  respecto del marco de referencia  $\mathbf{N}$ .

### 3. MODELO AERODINÁMICO

#### 3.1. Fundamentos del modelo

En flujos incompresibles, levemente viscosos y de elevado número de Reynolds, al desarrollarse el movimiento de un fluido alrededor de un perfil aerodinámico, el efecto de la viscosidad se manifiesta principalmente en la región de flujo adyacente a las superficies sólidas, donde la condición de no deslizamiento debe satisfacerse. Esta región es llamada capa límite y su espesor crece a medida que se desarrolla el flujo sobre el perfil. Cuando el fluido abandona el perfil, toda la región perturbada por los efectos viscosos pasa a formar parte de la estela. A medida que el número de Reynolds crece, el espesor de la capa límite disminuye. En el límite cuando el espesor de la capa límite tiende a cero y, por ende, el de la estela que de él se desprende, estas regiones vorticosas se representan como líneas que concentran la vorticidad y se las denomina sábanas vorticosas. En la Fig. 5, se muestra la sábana vorticosa adherida al perfil en color azul, y la sábana vorticosa libre que conforma la estela de partículas, en color negro.

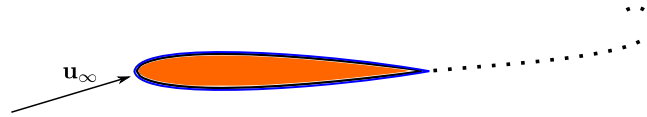


Figura 5: Región vorticosa, modelo de sábana vorticosa y estela de partículas.

La sábana vorticosa libre que conforma la estela es resultado de la convección de la vorticidad en el borde de fuga del perfil. Identificadas las dos regiones de vorticidad, el campo de velocidad,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , se puede desagregar de la siguiente manera

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_w(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_\infty, \quad (10)$$

donde  $\mathbf{u}_b(\mathbf{r}, t)$  es la contribución asociada a la sábana vorticosa adherida al perfil,  $\mathbf{u}_w(\mathbf{r}, t)$  es la contribución asociada a la sábana libre, y  $\mathbf{u}_\infty$  es la velocidad de la corriente libre. La contribución al campo de velocidad asociada a la sábana adherida, de intensidad  $\gamma(\mathbf{r}_0, t)$ , está dada por la ley de Biot-Savart (Karamcheti, 1966)

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{n}}_3 \times \oint_{\mathbf{r}_0(l,t)} \frac{\gamma(\mathbf{r}_0, t)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dl. \quad (11)$$

Debido a que la sábana vorticosa libre es aproximada mediante vórtices puntuales, la contribución al campo de velocidad asociada a ella se expresa como sigue

$$\mathbf{u}_w(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{n}}_3 \times \sum_{k=1}^{n_v} \Gamma_k \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^2 + \sigma^2}, \quad (12)$$

donde  $\Gamma_k$  es la intensidad del vórtice  $k$ ,  $n_v$  es el número de vórtices que componen la estela y  $\sigma$  es el parámetro de suavizado del vórtice concentrado (Winkelmans y Leonard, 1993). De acuerdo a la condición de Kelvin (Spurk y Aksel, 2010), en un flujo de un fluido no viscoso y barotrópico, la circulación se mantiene constante en el tiempo.

$$\frac{D}{Dt} \Gamma(t) = \frac{D}{Dt} [\Gamma_b(t) + \Gamma_w(t)] = 0, \quad (13)$$

donde  $\Gamma_b(t)$  es la circulación total de la sábana vorticiosa adherida en el tiempo  $t$ , y  $\Gamma_w(t)$  es la circulación total de la sábana vorticiosa libre en el tiempo  $t$ . Al ser el fluido de viscosidad despreciable, el flujo del mismo es descrito por la ecuación de Euler (Spurk y Aksel, 2010). Teniendo en cuenta la velocidad relativa dada por la función  $\gamma(l, t)$ , de la ecuación de Euler se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma(l, t) + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} \gamma^2(l, t) \right] + [\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_t](l, t) = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial l} p(l, t) \right], \quad (14)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(l, t)$  es la aceleración inercial del contorno del perfil debido al cambio de forma y/o movimiento del perfil en la posición  $l$  y en el tiempo  $t$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_t = \hat{\mathbf{e}}_t(l, t)$  es el versor tangente a la sábana vorticiosa adherida en la posición  $l$  y en el tiempo  $t$ ,  $p = p(l, t)$  es la presión en la posición  $l$  y en el tiempo  $t$ . Al integrar la Ec. (14) a lo largo de la curva  $\mathbf{r}_0(l, t)$  se establece una relación entre la derivada en el tiempo de la circulación sobre el perfil y las velocidades relativas en el borde de fuga.

$$\frac{D}{Dt} \Gamma_b(t) = \frac{d}{dt} \Gamma_b(t) = -\frac{\gamma_U^2 - \gamma_L^2}{2}. \quad (15)$$

En la Ec. (15) el aporte a la tasa de cambio de la circulación debida a la aceleración de la superficie del perfil es despreciado.

La formulación se completa imponiendo la condición de no penetración, es decir, la componente de la velocidad del fluido,  $\mathbf{u}(l, t)$  y la componente de la velocidad del cuerpo,  $\mathbf{v}(l, t)$  en la dirección normal a la superficie sólida, deben ser iguales para todo tiempo. Matemáticamente esto se expresa de la siguiente manera

$$[(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}](l, t) = 0 \quad (16)$$

### 3.2. Aproximación de la función de vorticidad distribuida

La sábana vorticiosa adherida al perfil es representada, al igual que su contorno, por la curva  $\mathbf{r}_0(l, t)$ . En la Fig. 6 se muestra esquemáticamente el resultado de la discretización de la sábana vorticiosa adherida al perfil aerodinámico. Cada subdominio posee un marco de referencia local,

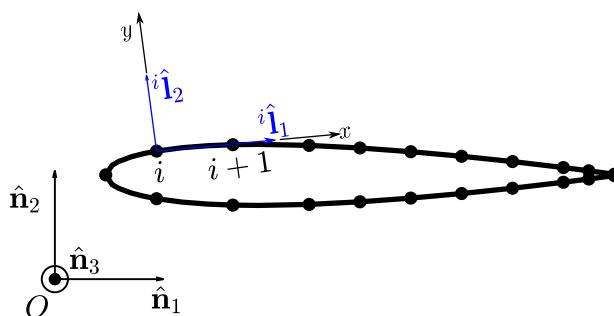


Figura 6: Sábana vorticiosa discretizada.

$L_i = \{ {}^i\hat{\mathbf{i}}_1, {}^i\hat{\mathbf{i}}_2, {}^i\hat{\mathbf{i}}_3 \}$ . El origen,  $O_i$  del sistema de coordenadas asociadas al marco de referencia se encuentra ubicado en el nodo inicial del panel,  $i$ , y su vector  $\{ {}^i\hat{\mathbf{i}}_1 \}$  apunta hacia el nodo  $i + 1$ . Además, un punto de control se ubica en el punto medio de cada panel. Luego de realizada la

discretización, la coordenada curvilínea  $l$  es aproximada como sigue

$$l = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta l_j(t) + \xi, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta l_i(t), \quad \bar{\mathbf{r}}_0^i(\xi, t) = \xi \hat{\mathbf{1}}_1, \quad (17)$$

donde  $\xi$  es la coordenada local sobre el elemento  $i$ , y que parametriza al subdominio en coordenadas locales y,  $\Delta l_j(t)$  es la longitud del panel  $j$  en el instante de tiempo  $t$ . La contribución al campo de velocidades asociada a la sábana adherida puede aproximarse sustituyendo la Ec. (17) en la Ec. (11) como sigue

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{r}, t) \cong -\frac{1}{2\pi} \hat{\mathbf{n}}_3 \times \left[ \sum_{i=1}^{n_{el}} \int_0^{\Delta l_i(t)} \frac{\gamma(\bar{\mathbf{r}}_0^i, t)(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_0^i)}{|\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_0^i|^2} dl \right]. \quad (18)$$

La función de vorticidad distribuida,  $\gamma(\bar{\mathbf{r}}_0^i, t)$ , es discretizada en cada subdominio,  $\gamma_i(\xi, t)$ , y se aproxima mediante funciones de interpolación lineales  $N_1^i(\xi, t)$ ,  $N_2^i(\xi, t)$  (Kreyszig, 2006).

$$\gamma_i(\xi, t) = G_i(t)N_1^i(\xi, t) + G_{i+1}(t)N_2^i(\xi, t), \quad 0 \leq \xi \leq \Delta l_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_{el}, \quad (19)$$

donde  $G_i(t)$  y  $G_{i+1}(t)$  son las vorticidades en los nodos  $i$  e  $i + 1$  en el tiempo  $t$ . La Ec (18) puede ser integrada analíticamente, véase (Mook y Dong, 1994).

En las cercanías del borde de fuga, la aproximación de la vorticidad distribuida es ligeramente modificada. Las vorticidades de los paneles adyacentes al borde de fuga en el intradós y extradós,  $G_1(t)$  y  $G_{n_{el}+1}(t)$ , respectivamente, son forzadas a ser idénticamente nulas para todo tiempo y son reemplazadas por un vórtice puntual de intensidad  $\Gamma_t(t)$ . El campo de velocidad generado por el vórtice puntual se define como

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_t \hat{\mathbf{n}}_3 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_t\|^2}, \quad (20)$$

donde  $\mathbf{r}_t$  es el vector posición del vórtice ubicado el borde de fuga. En virtud de la incorporación de este vórtice puntual, es necesario considerar su aporte en el campo de velocidades dado en la Ec. (10) y a la circulación dada en la Ec. (13). Finalmente, este problema queda descrito matemáticamente mediante un conjunto de  $n_{el}$  ecuaciones de no penetración más una ecuación de conservación de la circulación.

$$[\mathbf{u}(\mathbf{r}_{cp_i}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_{cp_i}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_{cp_i}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_{el}, \quad (21a)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{el}} [G_i(t) + G_{i+1}(t)] \Delta l_i(t) + \Gamma_t(t) + \sum_{k=1}^{n_v} \Gamma_k = 0. \quad (21b)$$

Donde  $\mathbf{r}_{cp_i}$  es la posición del punto de control en el panel  $i$ .

#### 4. SOLUCIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

El problema del flujo alrededor del perfil aerodinámico se resuelve en el dominio del tiempo. Para ello, la variable  $t$  se discretiza en un número finito de pasos de tiempo discretos. En cada paso de tiempo, las posiciones y las velocidades de los puntos de control son obtenidos a partir de la Ec. (6) y de la Ec. (9), respectivamente, por interpolación lineal de las posiciones y las



velocidades de los nodos esclavos. Además, el vórtice situado en el borde de fuga es conveccionado a la estela. El valor de la circulación de este vórtice,  $\Gamma_k$ , se obtiene como

$$\Delta\Gamma_k = \frac{2\Gamma_t^2}{\Delta l_U^2} \Delta t \quad \text{si } \Gamma_t > 0, \quad \Delta\Gamma_k = -\frac{2\Gamma_t^2}{\Delta l_L^2} \Delta t \quad \text{si } \Gamma_t < 0, \quad (22)$$

donde  $\Delta l_U$  es la longitud del panel ubicado en el borde de fuga del extradós,  $\Delta l_L$  es la longitud del panel ubicado en el borde de fuga del intradós, y  $\Delta t$  es la longitud del paso de tiempo discreto. En perfiles con borde de fuga con ángulo finito (Giesing, 1969; Maskel, 1971), el vórtice generado es conveccionado a una velocidad que es paralela a la dirección o del intradós,  $\gamma_U$ , o del extradós,  $\gamma_L$ , en el borde de fuga, según el signo de  $\Gamma_t$ . La magnitud de la velocidad local de convección está dada por

$$\Gamma_t > 0 \implies \gamma_U = \frac{2\Gamma_t}{\Delta l_U}, \quad \gamma_L = 0, \quad \Gamma_t < 0 \implies \gamma_L = \frac{2\Gamma_t}{\Delta l_L}, \quad \gamma_U = 0. \quad (23)$$

En la estela, el cambio de posición del vórtice  $k$  se calcula como sigue

$$\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{u}(\mathbf{r}_k, t) \Delta t. \quad (24)$$

## 5. CARGAS AERODINÁMICAS

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones de la Ec. (21), la distribución de presión sobre la superficie del perfil aerodinámico se obtiene integrando la Ec. (14) como sigue

$$p(l, t) - p_L(t) = -\rho \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial t} \gamma(l, t) + \left[ \frac{\partial}{\partial l} \frac{\gamma^2(l, t)}{2} \right] + [\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_t](l, t) \right] dl, \quad (25)$$

donde  $p_L(t)$  es la presión en el borde de fuga. La fuerza resultante,  $\mathbf{f}(t)$ , que actúa sobre el perfil se calcula integrando la distribución de presión a lo largo de todo el contorno del perfil como sigue

$$\mathbf{f}(t) = - \oint_{\mathbf{r}_0(l, t)} p(l, t) \hat{\mathbf{n}}(l, t) dl \cong \rho \sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_i(t), \quad (26)$$

luego la sustentación,  $\mathbf{L}(t)$ , y el coeficiente de sustentación,  $C_l(t)$ , resultan de

$$L = \mathbf{f}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2, \quad \mathbf{L} = L(t) \hat{\mathbf{n}}_2, \quad C_l(t) = \frac{L}{qc}. \quad (27)$$

## 6. RESULTADOS

Los resultados presentados en esta sección corresponden a un morphing sobre un perfil NA-CA0012, imponiendo cambios en la pendiente de los extremos de su línea media de igual magnitud pero de signo contrario,  $\theta_A(t) = -\theta_B(t)$ . Para la simulación se adoptó una discretización de 34 paneles, un cambio en la pendiente de los extremos máximo de  $15^\circ$ , un paso de tiempo de 0,06s, una frecuencia reducida de 0,08 y 3 ciclos de morphing. La velocidad de la corriente libre  $\{1, 0, 0\}$  m/s y el parámetro de suavizado de 0,01. En la Fig. 7 se muestra la evolución del coeficiente de sustentación en el tiempo producto del cambio de geometría. Además, se presenta un esquema de la máxima deformación alcanzada por el perfil durante el morphing.

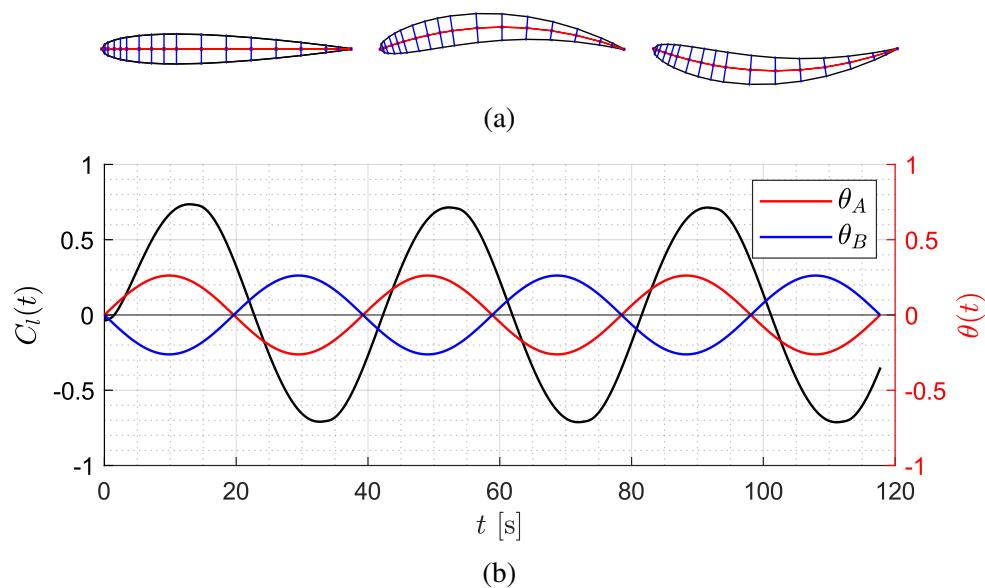


Figura 7: (a) Máxima deformación de morphing para  $\theta_A(t) = -\theta_B(t)$ , (b)  $C_l(t)$  vs.  $t$  para  $\theta_{A_{max}} = -\theta_{B_{max}} = 15^\circ$  y una frecuencia reducida  $k = 0,08$ .

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el desarrollo de una formulación unificada que permite describir la cinemática de perfiles alares no delgados que cambian de forma, y la estimación de las cargas aerodinámicas inestacionarias y no lineales producto del cambio de forma. El cambio en la forma del perfil se obtuvo a partir de la deformación de su línea media, imponiendo como restricción, que la longitud de la misma permanezca constante. La curva que define la configuración deformada de la línea media se obtuvo mediante interpolación utilizando polinomios cúbicos de Hermite. La variación temporal del coeficiente de sustentación producida por el cambio de forma se obtuvo por integración del campo de presiones a partir de la ecuación de Euler. Para ello fue necesario adaptar un método de vorticidad distribuida 2D preexistente para admitir cambios en los parámetros geométricos del perfil.

## REFERENCIAS

- Flanders H. Differentiation under the integral sign. *The American Mathematical Monthly*, 80:615–627, 1973.
- Giesing J.P. Vorticity and kutta condition for unsteady multienergy flows. *Journal of Applied Mechanics*, 36:608–613, 1969.
- Karamcheti K. *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. Krieger, 1966.
- Kreyszig E. *Advanced engineering mathematics*. Wiley and Sons, 2006.
- Maskel E.C. On the kutta-joukowski condition in two-dimensional unsteady flow. *Unpublished note, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, England*, 1971.
- Mook D.T. y Dong B. Perspective: Numerical simulations of wakes and blade-vortex interaction. *Journal of fluids engineering*, 116:5–21, 1994.
- Spurk J.H. y Aksel N. *Strömungslehre*. Springer, 2010.
- Winkelmans G.S. y Leonard A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows. *Journal of Computational Physics*, 109:247–273, 1993.