

## ANÁLISIS DE LA DINÁMICA DE SEDIMENTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS EN UN FLUIDO NEWTONIANO UTILIZANDO EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

### ANALYSIS OF RIGID BODY SEDIMENTATION DYNAMIC IN A NEWTONIAN FLUID BY LATTICE BOLTZMANN METHOD

Juan P. Giovacchini<sup>a,b</sup> y Carlos G. Sacco<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Depto. Mecánica Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Centro Regional Universitario Córdoba - IUA, Universidad de la Defensa Nacional, Argentina, [jgiovacchini@iua.edu.ar](mailto:jgiovacchini@iua.edu.ar), <http://www.iua.edu.ar/>*

<sup>b</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Córdoba, Argentina, <http://www.ucc.edu.ar/>*

**Palabras clave:** método de lattice Boltzmann, interacción cuerpo rígido - fluido, sedimentación de partículas

**Resumen.** En este trabajo se analiza la dinámica de una serie de cuerpos rígidos en sedimentación en un fluido newtoniano a bajos números de Reynolds. Utilizando el método de lattice Boltzmann (LBM) se evalúa la interacción cuerpo rígido - fluido para diferentes geometrías de cuerpo rígido, relaciones de densidad sólido-fluido, y geometrías del dominio. Se valida el método y algoritmo propuestos analizando problemas bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D) de interacción cuerpo rígido - fluido con resultados conocidos. Se analizan problemas de sedimentación de un cilindro y de una elipse en un canal 2D para diferentes relaciones de densidad sólido-fluido, así como el de una esfera en un canal 3D de sección cuadrada para diferentes relaciones entre diámetro de la esfera y sección del ducto.

**Keywords:** lattice Boltzmann method, rigid body - fluid interaction, particles sedimentation.

**Abstract.** We study the sedimentation dynamic of various rigid bodies in a newtonian fluid at low Reynolds numbers. We use the lattice Boltzmann method (LBM) to solve the interaction between the rigid body and surrounding fluid. We compute the interaction for different rigid body geometries, for various solid to fluid mass density ratios, and for different fluid domain configurations. We solve some well known two-dimensional (2D) and three-dimensional (3D) problems to validate the proposed algorithm. In particular we analyze the circular and elliptical cylinder sedimentation in a 2D rectangular duct for some solid to fluid mass density ratios. We also simulate a sphere sedimentation in a 3D square cross section duct for several sphere to duct cross section relations.

## 1. INTRODUCCIÓN

La determinación de la dinámica de partículas o cuerpos rígidos inmersos en un fluido es un problema de interés que ha sido analizado extensamente. En la literatura se pueden encontrar una variedad de problemas específicos que involucran el transporte de cuerpos rígidos o partículas sólidas en suspensión.

En problemas de interacción cuerpo rígido - fluido es necesario determinar con precisión las fuerzas actuantes sobre el cuerpo para conocer su dinámica a través de las ecuaciones de movimiento del sólido. Determinar con precisión las fuerzas que el fluido ejerce sobre el cuerpo rígido implica resolver de manera apropiada la dinámica del fluido. Existen diversos métodos de la dinámica de fluido computacional (CFD) para resolver estos problemas, típicamente se utiliza alguno que discretiza las ecuaciones de Navier-Stokes (NS). Una alternativa a los métodos numéricos clásicos es el método de lattice Boltzmann (LBM). El LBM es una discretización particular de la ecuación de Boltzmann (BE) en el espacio de las fases, que en un límite particular converge a la ecuación de NS. El LBM ha sido ampliamente probado en múltiples problemas de flujo compresible e incompresible (cuasi-incompresible). En particular, brinda una forma simple y precisa para tratar problemas de fluido que involucren bordes de geometrías arbitrarias en movimiento. Estas características hacen del LBM una herramienta numérica apropiada para resolver problemas de mecánica de fluido que involucren interacción cuerpo rígido - fluido. Es posible encontrar en la literatura diversos problemas donde se analiza - utilizando el LBM (Ladd, 1994a,b; Aidun y Lu, 1995; Aidun et al., 1998; Aidun y Clausen, 2010; Xia et al., 2009) - la dinámica de cuerpos rígidos y partículas en sedimentación en un fluido.

En este trabajo se implementa un algoritmo basado en el LBM para resolver el problema de fluidos y su interacción con una serie de cuerpos rígidos bidimensionales (2D) y tridimensionales (3D) a bajos números de Reynolds. El algoritmo implementado combina diferentes modelos de velocidad 2D y 3D, y métodos para tratar condiciones de borde. Se consideran algunas propuestas de la literatura para imponer condiciones de borde Dirichlet en bordes regulares y en geometrías arbitrarias en movimiento, así como condiciones de borde convectivas para modelar bordes abiertos. Con motivo de representar algunas regiones del fluido con mayor grado de detalle - sin incrementar notablemente el costo computacional - se implementa un método de refinamiento de grilla. Las fuerzas del fluido sobre el cuerpo rígido se obtienen del método de *momentum exchange*.

Se analizan problemas donde el cuerpo rígido no posee un movimiento prescrito. Estos tienen movimiento arbitrario bajo la acción de su propio peso, fuerzas de flotación y fuerzas originadas por la interacción con el fluido. Se consideran cuerpos rígidos aislados, sin interacciones de contacto con otros cuerpos o bordes del dominio. Los resultados obtenidos con el LBM son comparados con resultados experimentales, numéricos y soluciones analíticas conocidas.

El trabajo está organizado de la manera siguiente: En la sección 2 se presentan las ecuaciones básicas del LBM, se introduce notación y algunos detalles de los métodos de condiciones de borde, evaluación de fuerzas y refinamiento de grilla utilizados. En la sección 3 se evalúan diferentes problemas de sedimentación de cuerpos rígidos. En las secciones 3.1 y 3.2 se analiza un cilindro y una elipse (para diferentes relaciones de densidad sólido-fluido) respectivamente en sedimentación dentro de un canal bidimensional. En la sección 3.3 se evalúa la velocidad terminal de una esfera en caída libre inmersa en un fluido viscoso contenido en un tubo de sección cuadrada.

## 2. EL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

Los resultados numéricos en este trabajo son obtenidos resolviendo la ecuación de lattice Boltzmann (LBE) (Wolf-Gladrow, 2000), una discretización particular de la ecuación de Boltzmann (BE) (Harris, 2004) en el espacio de las fases y el tiempo. La BE gobierna la evolución temporal de la función distribución de velocidad  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$  de una partícula,  $\mathbf{x}$  y  $\boldsymbol{\xi}$  son la posición y velocidad en el espacio de fase. La LBE es una discretización de la BE, donde  $\mathbf{x}$  toma valores en una grilla uniforme (lattice), mientras que  $\boldsymbol{\xi}$  es discretizada y restringida a un número finito  $Q$  (el número de velocidades discretas en el modelo) de valores (He y Luo, 1997). En un problema isotérmico y en ausencia de fuerzas externas, la LBE es:

$$f_i(\mathbf{x}_A + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}_A, t) + \sum_{j=0}^{Q-1} \Omega_{i,j} \left( f_j(\mathbf{x}_A, t) - f_j^{eq}(\mathbf{x}_A, t) \right) \quad , \quad i = 0, \dots, Q-1 \quad (1)$$

donde  $f_i(\mathbf{x}_A, t)$  es la  $i$ -ésima componente de la función distribución discretizada  $f(\mathbf{x}_A, t)$  (dependiendo de la formulación utilizada puede contener factores adicionales respecto de la función distribución continua) en un punto de grilla con coordenadas  $\mathbf{x}_A$ , a tiempo  $t$ , y velocidad discreta  $\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i c$ . Los múltiples índices enteros  $A = (j, k, l)$  (o,  $A = (j, k)$  en el caso 2D) en  $\mathbf{x}_A$  denotan un sitio particular en la grilla.  $c$  se denomina velocidad de grilla,  $c = \frac{\delta x}{\delta t}$  para mantener uniformidad de la grilla.  $\delta x$  es la distancia mínima entre dos nodos primeros vecinos, y  $\delta t$  el paso temporal.  $\mathbf{e}_i$  son direcciones discretas de velocidad.  $f^{eq}(\mathbf{x}_A, t)$  es la versión discreta de la función distribución de equilibrio y  $\Omega$  es un operador de colisiones linealizado. Para obtener los resultados presentados se utiliza un modelo de colisiones de múltiples tiempos de relajación (MRT) (d'Humières et al., 2002). La configuración de los modelos, parámetros de relajación y expresiones de equilibrio son las propuestas en d'Humières et al. (2002); Giovacchini (2018). Las cantidades macroscópicas como densidad de masa del fluido  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , y velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , son obtenidas como es usual en la teoría de lattice Boltzmann (He y Luo, 1997)

$$\rho(\mathbf{x}_A, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i(\mathbf{x}_A, t) \quad , \quad \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}_A, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}_A, t) \quad (2)$$

En los problemas que se abordan, el dominio fluido esta acotado físicamente por fronteras tipo pared en alguna de las direcciones coordenadas. En otras, el dominio se puede considerar no acotado ya que la frontera física se encuentra a una distancia mucho mayor a cualquier longitud característica del cuerpo. En todos los casos el dominio computacional esta acotado por bordes regulares rectos coincidentes con la grilla. Se utilizan condiciones de borde Dirichlet de velocidad (Zou y He, 1997) para modelar fronteras tipo pared. Para modelar dominios extensos o cuasi-infinitos mediante un dominio computacional acotado se implementan condiciones de borde convectivas (CBC) propuestas por Yang (2013).

El cuerpo rígido de geometría arbitraria se desplaza sin interacciones de contacto dentro de un dominio fluido. Su dinámica se determina resolviendo las ecuaciones de movimiento del sólido. Luego sobre la superficie del cuerpo la velocidad está prescrita, esta condición de borde Dirichlet se impone utilizando el método propuesto por Bouzidi et al. (2001). Se utiliza el método Euler forward - de primer orden de precisión como el LBM - para la integración numérica en el tiempo de las ecuaciones de movimiento.

Las fuerzas actuantes sobre el cuerpo rígido son: fuerzas con origen en el flujo de fluido, fuerzas másicas dadas por el peso del cuerpo y fuerzas de flotación. Las fuerzas con origen en el flujo del fluido son evaluadas en este trabajo utilizando el métodos de *momentum exchange*

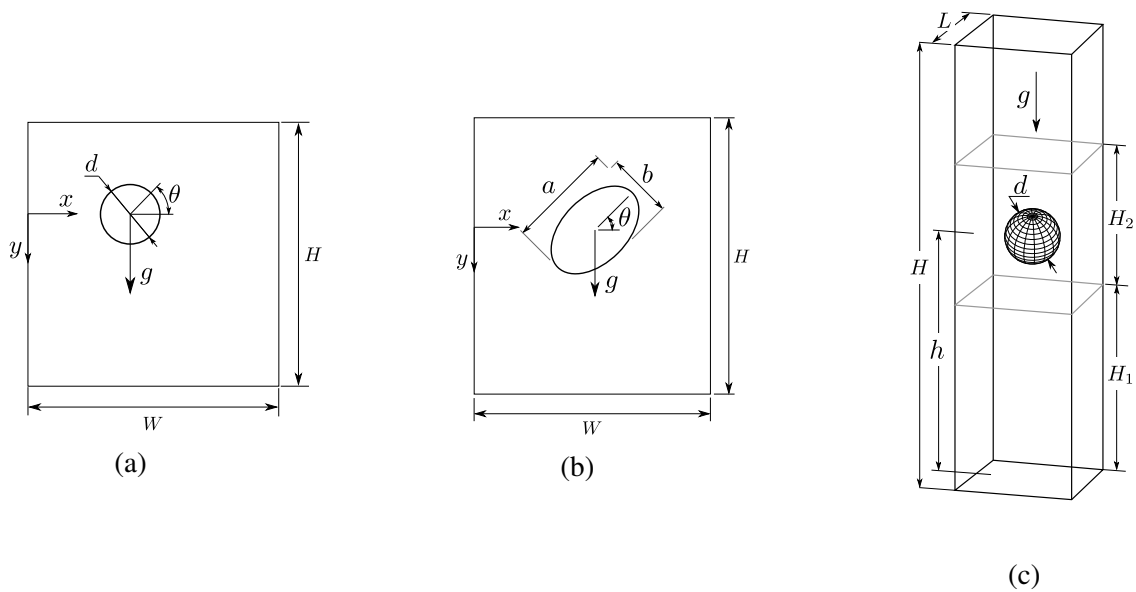


Figura 1: Esquema de la configuración geométrica del problema de sedimentación de un disco y una elipse en un canal bidimensional, y de una esfera en un canal de sección cuadrada. Fig. (a): configuración disco. Fig. (b): configuración elipse. Fig. (c): configuración esfera.

(ME) presentados en [Giovacchini y Ortiz \(2015\)](#). El algoritmo de ME está específicamente diseñado y adaptado al LBM, es simple de aplicar, preciso y computacionalmente más eficiente que el método clásico de integración de tensiones.

En un problema típico de LBM el dominio computacional está cubierto por un arreglo de grillas. Este puede ser simple como una única grilla con tamaño  $\delta x$  uniforme, o un arreglo complejo de grillas con diferentes  $\delta x$ . En este trabajo se utiliza el método *multi-dominio* (MD) (o multi-block) ([Yu et al., 2002](#); [Lagrava et al., 2012](#)) para integrar las grillas de diferente tamaño en un dominio computacional. Se adopta un refinamiento a priori, es decir, la distribución de las diferentes grillas y tamaños de grilla en el dominio del problema se establece previo a resolver el problema. El arreglo de grillas en el dominio puede variar en el tiempo. En particular aquí se considera un conjunto de grillas que sigue el movimiento del cuerpo rígido.

### 3. SEDIMENTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS - PARTÍCULAS

En esta sección se analizan y presentan resultados obtenidos con el algoritmo de LBM propuesto para problemas bidimensionales y tridimensionales de interacción cuerpo rígido - fluido.

#### 3.1. Sedimentación de un cilindro en un canal bidimensional

Se analiza la dinámica de un cilindro en sedimentación libre a través de un canal bidimensional que contiene un fluido Newtoniano. En la Figura 1a se muestra un esquema de la configuración del problema. El disco se libera a tiempo  $t = 0$  [s] desde una posición inicial  $(x, y) = (7,6 \times 10^{-4}, 0)$  [m] dentro de un canal bidimensional que contiene un fluido Newtoniano con  $\rho_f = 1000$  [kg/m<sup>3</sup>] y viscosidad cinemática  $\nu = 1 \times 10^{-6}$  [m<sup>2</sup>/s]. El fluido y cuerpo rígido se encuentra inicialmente en reposo con velocidad cero. Se analizan dos relaciones de densidad  $r_\rho = \rho_b/\rho_f$ , donde  $\rho_b$  es la densidad de masa del cuerpo rígido (disco).

El problema de fluido se resuelve utilizando un modelo *D2Q9* cuasi-incompresible. Se utiliza

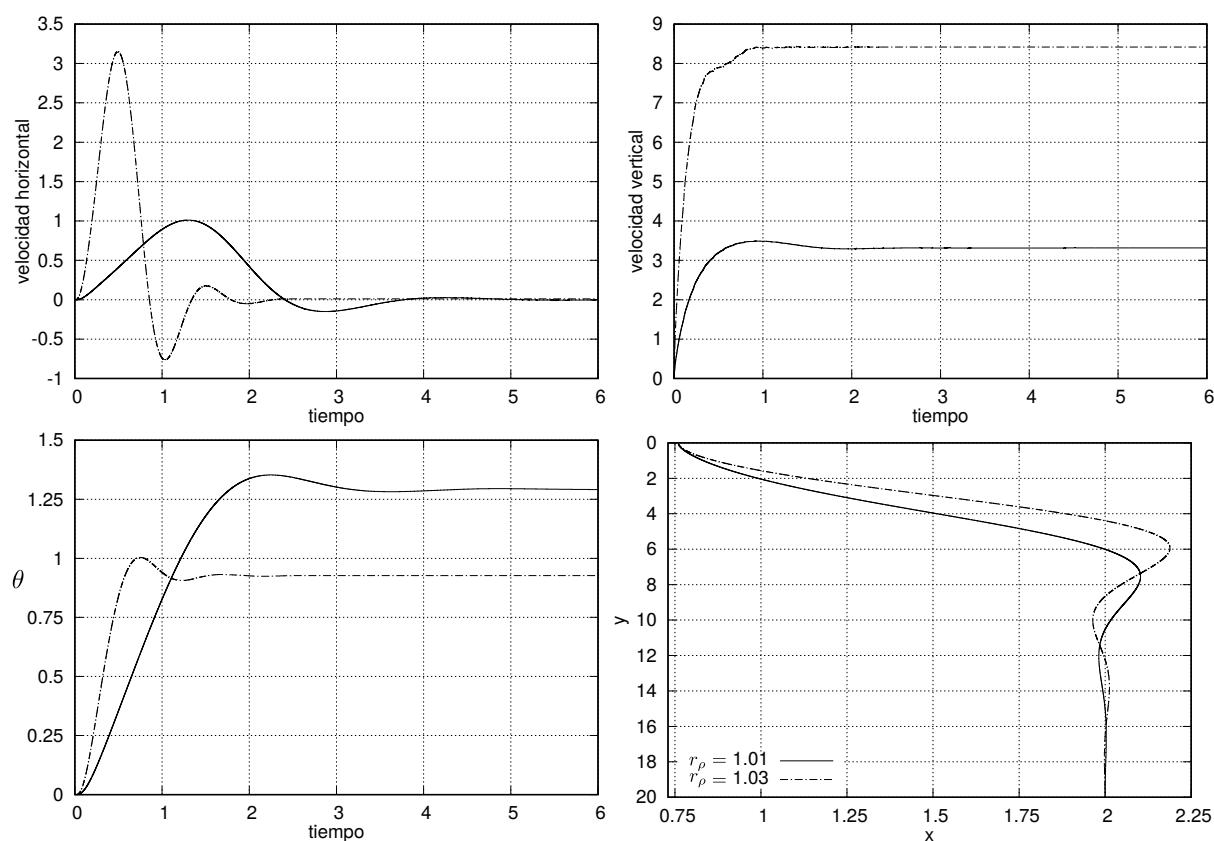


Figura 2: Resultados obtenidos del cilindro en sedimentación libre (Figura 1a) para  $r_\rho = 1,01$  y  $r_\rho = 1,03$ . Unidades de las magnitudes: espacio [mm], tiempo [s] y ángulos en [rad].

la notación estándar  $DmQn$  para denotar un modelo LBM,  $m$  es la dimensión espacial del problema, y  $n$  el número de velocidades discretas. Detalles de los momentos de equilibrio y operador de colisiones se especifican en Lallemand y Luo (2000); Giovacchini (2018). Como tiempos de relajación se adopta:  $s_8 = s_9 = \frac{1}{\tau}$ ,  $\tau = 0,6$  para los relacionados con la viscosidad cinemática e isotropía del método.  $s_2 = 1,64$ ,  $s_3 = 1,54$ ,  $s_5 = 1,3$ , y  $s_7 = s_5$  para el resto de los parámetros relacionados con estabilidad numérica y segundo coeficiente de viscosidad.

Las dimensiones del canal son  $W = 4d$  y  $H = 8W$ ; el diámetro del disco es  $d = 1 \times 10^{-3}$  [m]. El origen del sistema de coordenadas y la dirección de la aceleración de la gravedad ( $g = 9,81$  [m/s<sup>2</sup>]) se muestran esquemáticamente en la Figura 1a. El dominio computacional se discretiza con  $n_x \times n_y = 135 \times 1073$  puntos de grilla. Sobre las paredes vertical y horizontal superior se impone velocidad cero para todo tiempo, sobre la frontera horizontal inferior se imponen condiciones de borde convectivas.

La Figura 2 muestra resultados del LBM para  $r_\rho = 1,01$  y  $r_\rho = 1,03$ . Se presenta la evolución temporal de la velocidad horizontal y vertical junto con la trayectoria del centro del disco y el ángulo de rotación.

Los resultados obtenidos tienen una buena correlación con los presentados por Li et al. (2004), Wen et al. (2012), y Feng et al. (1994). Los dos primeros utiliza LBM evaluando fuerzas vía integración de tensiones y ME respectivamente, el último utiliza el método de elementos finitos (FEM). En la Figura 4 se muestra una comparación de resultados con los presentados en Wen et al. (2012). Este problema simple es particularmente útil para evaluar el método con el que se determinan las fuerzas sobre el cuerpo rígido en movimiento. La elección de un método

inapropiado, ME para cuerpos sin movimiento por ejemplo (Mei et al., 2002), brinda diferencias notables en los resultados para el régimen transitorio del problema.

### 3.2. Sedimentación de una elipse en un canal bidimensional

Se analiza la dinámica de un disco elíptico en sedimentación libre dentro de un canal bidimensional que contiene un fluido Newtoniano con las mismas propiedades de la sección 3.1. En la Figura 1b se muestra un esquema de la configuración analizada. El problema está caracterizado (Xia et al., 2009) por tres parámetros adimensionales: la relación de aspecto  $\alpha = a/b$ , con  $a = 1 \times 10^{-3}$  [m] y  $b$  el eje mayor y menor de la elipse respectivamente; la relación de bloqueo  $\beta = W/a$ , con  $W$  el ancho del canal bidimensional; y la relación de densidad  $r_\rho$  (definida en la sección 3.1). Como el interés es verificar el método y algoritmo propuesto, se analiza el problema para una única relación de bloqueo  $\beta = 4$  y de aspecto  $\alpha = 2$ . Esta configuración garantiza que no existen interacciones del cuerpo rígido con los bordes del dominio.

El fluido y el cuerpo rígido se encuentran inicialmente en reposo. El centro de la elipse se ubica en  $(x, y) = (0,5W, 0)$  [m] con una posición angular inicial  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  que elimina la simetría del problema. El origen de coordenadas se indica en el esquema de la Figura 1b. Las dimensiones del dominio son  $H = 50a$  y  $W = 4a$ . Se utiliza una discretización de  $n_x \times n_y = 135 \times 1676$  puntos de grilla. Se analiza el problema para tres relaciones de densidad:  $r_\rho = 1, 10, 1,30, 1,50$ . La configuración del método y condiciones de borde son idénticas a las del problema de la sección 3.1. En la Figura 3 se muestran resultados del LBM para las relaciones  $r_\rho$  analizadas. Las figuras muestran la evolución temporal de la velocidad y el ángulo de rotación  $\theta$  de la elipse, junto con su desplazamiento dentro del dominio bidimensional que la contiene. Se puede observar que el incremento en  $r_\rho$  modifica la dinámica del cuerpo rígido, incrementa la velocidad vertical, la amplitud en las oscilaciones en la velocidad horizontal y el ángulo de rotación, así como un incremento en el desplazamiento horizontal dentro del canal bidimensional.

Los resultados obtenidos tienen una buena correlación con los presentados en Xia et al. (2009) para este caso de análisis. En la Figura 4 se muestra una comparación con los resultados de Xia et al. (2009) para el desplazamiento de la elipse -  $r_\rho = 1,3$  - dentro del canal.

### 3.3. Sedimentación de una esfera dentro de un ducto de sección cuadrada

En este problema se evalúa la velocidad terminal  $v_s$  de una esfera en caída libre inmersa en un fluido dentro de un tubo de sección cuadrada. En la Figura 1c se muestra un esquema del problema. Se evalúa numéricamente  $v_s$  para diferentes relaciones  $\frac{d}{L}$ , y se cuantifica la relación  $\frac{v_s}{v_T}$  denominada *factor de corrección de pared*.  $v_T$  es la velocidad terminal de la esfera en un dominio infinito sin restricciones, obtenida de considerar fuerzas viscosas en un problema de Stokes.

Este problema de interés tiene resultados numéricos (Aidun et al., 1998) y experimentales (Miyamura et al., 1981) conocidos. En este trabajo se modela numéricamente el ensayo experimental de Miyamura et al. (1981). Se obtiene  $v_s$  para siete diámetros de esferas ( $d \in [1; 8]$  [mm]) con  $\frac{d}{L} \in [0,1; 0,8]$ . El ensayo consiste en dejar caer libremente la esfera desde su posición inicial  $h$  (ver Figura 1c) a  $t = t_0$ . Alcanzado el estado estacionario se encuentra  $v_s$  para los casos de interés. El rango de números de Reynolds de las simulaciones es  $0,0005 \leq Re \leq 0,39$ , consecuente con los resultados experimentales de Miyamura et al. (1981).

El flujo de fluido se resuelve utilizando un esquema de velocidades D3Q15. Los valores adoptados de los parámetros de relajación para este modelo son:  $s_2 = 1,6$ ,  $s_3 = 1,2$ ,  $s_5 = 1,6$ ,



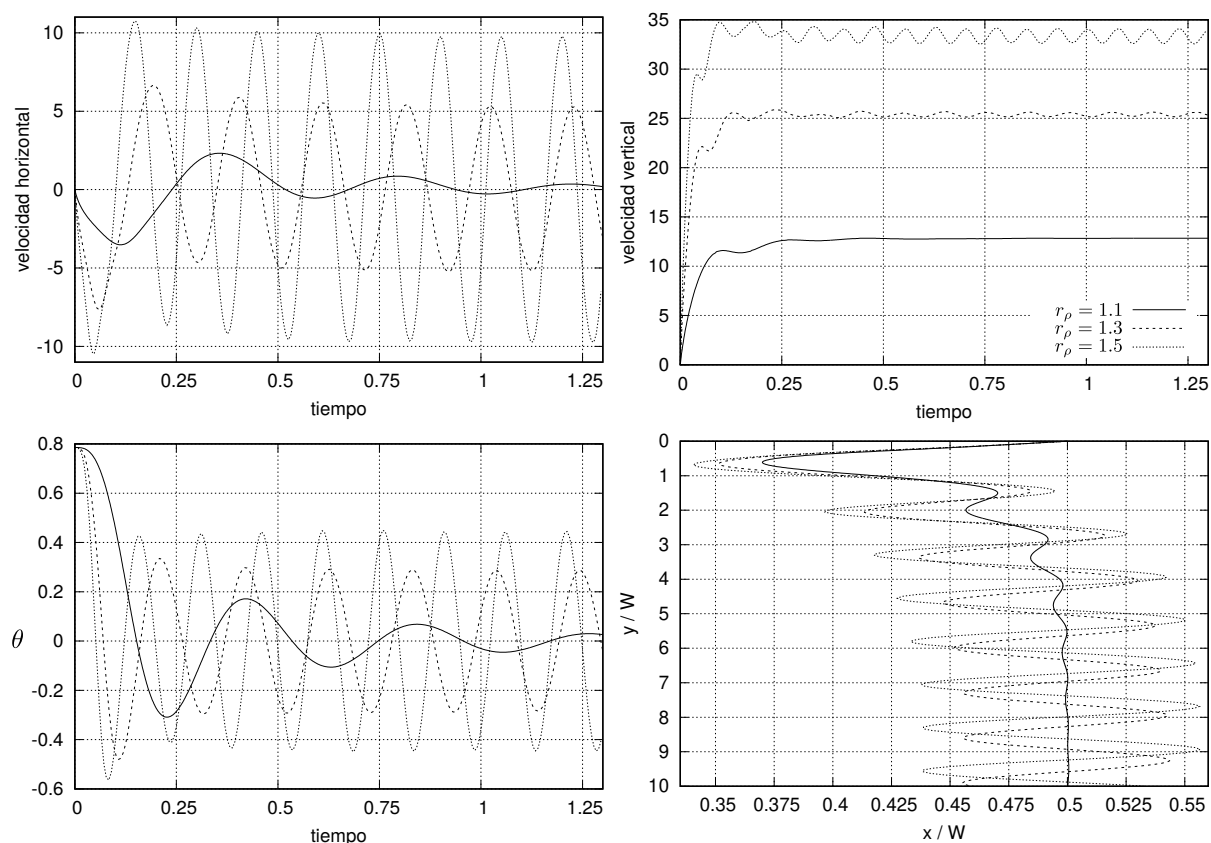


Figura 3: Resultados del problema de sedimentación del disco elíptico de la Figura 1b. Unidades de las magnitudes: espacio [mm], tiempo [s] y ángulos en [rad].

$s_{10} = \frac{1}{\tau}$ , y  $s_{15} = 1,2$  con  $\tau = 0,53$ ; con las relaciones:  $s_7 = s_9 = s_5$ ,  $s_{11} = s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{10}$ . Se realizan evaluaciones utilizando esquemas de velocidad  $D3Q19$  y  $D3Q27$  sin observar diferencias significativas en los resultados. Se implementa un esquema de refinamiento y movimiento de grillas con el objetivo de disminuir el tamaño del dominio computacional. La región de refinamiento está posicionada como se muestra en el esquema de la Figura 1c, desde  $H_1$  hasta  $H_1 + H_2$ . Se consideran cuatro escalas de refinamiento, la de menor  $\delta x$  contiene al cuerpo rígido y se desplaza en combinación con las demás siguiendo el movimiento del cuerpo para todo tiempo. Se utiliza  $L = 0,01 \text{ m}$  y  $H = 12L$ , con una región de refinamiento de longitud  $H_2 = 2,6L$  posicionada en  $H_1 = 6L$ . Se utiliza una discretización de  $81 \times 81 \times 81$  nodos para la grilla más fina que contiene al cuerpo rígido en su posición central. A ambos lados de esta grilla y en la dirección longitudinal, se introduce un apilamiento de grillas - dos niveles de refinamiento hacia ambos lados de  $L \times 0,4L \times L$  - hasta alcanzar la grilla más gruesa.

Sobre las paredes laterales e inferior del dominio y la superficie de la esfera se imponen condiciones de borde de Dirichlet de velocidad. En la pared superior horizontal se utilizan condiciones de borde convectivas para representar un dominio de longitud quasi-infinita (ver sección 2).

La posición inicial de la esfera es el centro de la sección transversal a una distancia  $h = 7L$  desde la base del dominio computacional. Se impone como condición inicial una velocidad homogénea  $\mathbf{u}_0$  sobre todo el dominio fluido. La esfera es liberada en su posición inicial a  $t = 0 \text{ s}$  con velocidad  $\mathbf{u}_0$ , aproximadamente igual y en dirección opuesta a  $v_s$ . El cuerpo rígido se mantiene en una posición aproximadamente constante, permitiendo adoptar la relación mínima  $\frac{H}{L}$  tal

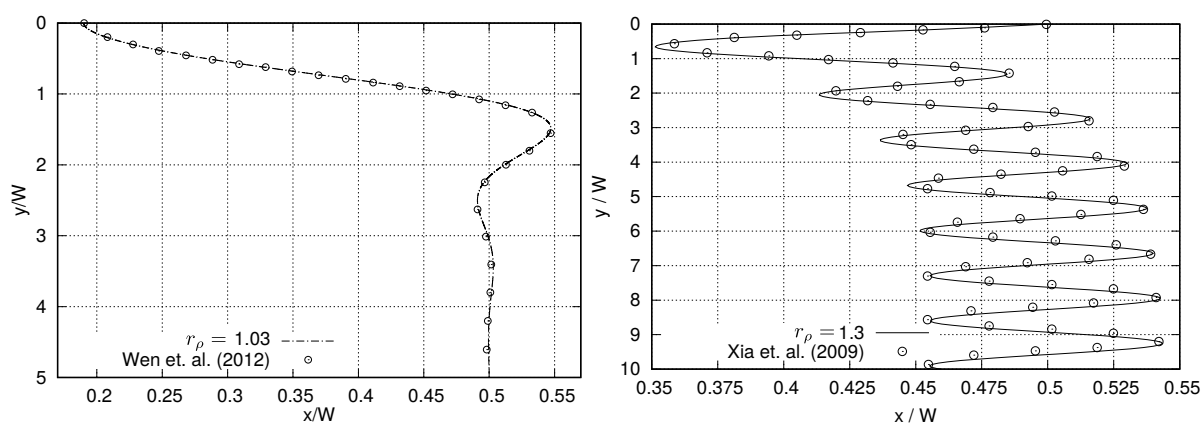


Figura 4: Resultados obtenidos para el desplazamiento del cilindro (izq.) y la elipse (der.) en el canal bidimensional comparados con los presentados por Wen et al. (2012) y Xia et al. (2009).

que el cuerpo rígido se encuentre siempre en una posición alejado de los bordes para el tiempo de sedimentación que se modela. Analizar el problema en un referencial con velocidad constante permite mantener el cuerpo rígido en una posición - relativa al dominio computacional - aproximadamente constante. Esto acota el desplazamiento de las grillas que lo siguen para todo tiempo, y junto con la implementación de condiciones de borde convectivas, reduce el tamaño del dominio computacional. De manera adicional elimina las perturbaciones espurias (especialmente notorias en modelos cuasi-compresibles) que pueden existir por una inicialización ficticia o incorrecta del problema. Estas influyen particularmente cuando existen diferencias de velocidad entre el cuerpo rígido y el fluido.

En la Figura 5a se muestran los resultados obtenidos de  $\left(\frac{v_s}{v_T}\right)$  junto con el polinomio de ajuste de los resultados experimentales presentado por Miyamura et al. (1981). En la Figura 5b se muestra la evolución temporal de la velocidad vertical para las diferentes relaciones  $\frac{d}{L}$ .

Se puede apreciar de la Figura 5a que los resultados obtenidos del LBM presentan una buena correlación con los datos experimentales (Miyamura et al., 1981) para todas las configuraciones analizadas. Los resultados obtenidos con el algoritmo propuesto presentan una mejor aproximación a los datos experimentales que los presentados por Aidun et al. (1998).

#### 4. CONCLUSIONES

Los resultados presentados, encontrados al analizar diferentes problemas de interacción cuerpo rígido - fluido (bidimensionales y tridimensionales), validan el algoritmo propuesto para abordar problemas de sedimentación de cuerpos rígidos a bajos números de Reynolds. En todos los casos los resultados del LBM se ajustan a los de la literatura, obtenidos por otros métodos numéricos o de ensayos experimentales. La validación de resultados no solo incluye la del LBM para resolver la dinámica del fluido, sino que también la combinación de métodos y condiciones de borde, método de refinamiento y movimiento de grilla, y acoplamiento con movimiento de cuerpo rígido inmerso en el medio fluido. Si bien no se muestran en este trabajo, la implementación realizada permite abordar problemas más general que incluyan movimientos en seis grados de libertad de cuerpos rígidos de geometrías arbitrarias.



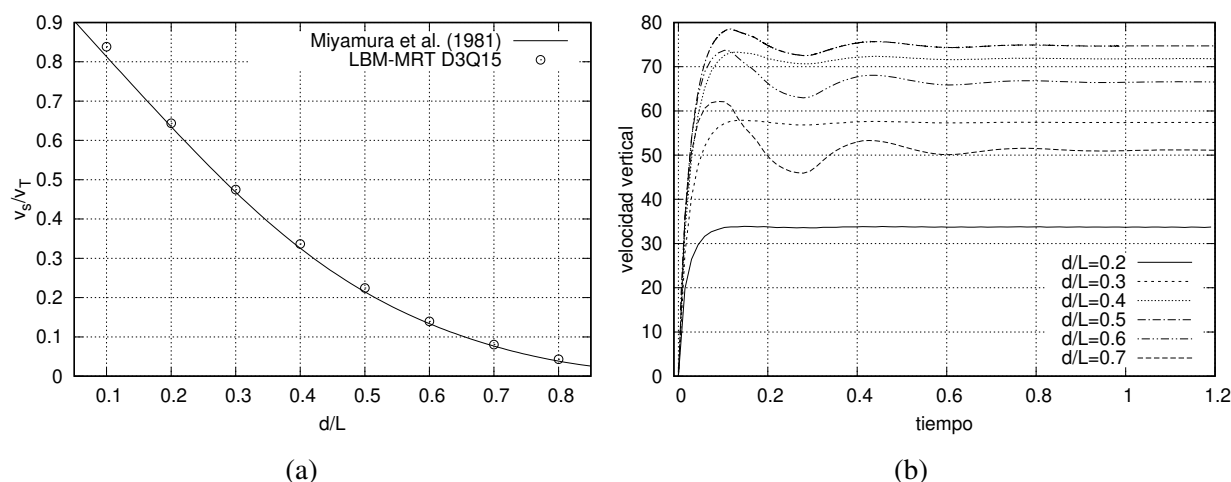


Figura 5: Fig. (a): factor de corrección de pared  $\frac{v_s}{v_T}$  en función de la relación  $\frac{d}{L}$  para una esfera de diámetro  $d$  en sedimentación dentro de un tubo de sección cuadrada. Fig. (b): evolución temporal de la velocidad vertical de la esfera para las diferentes configuraciones analizadas. Unidades de las magnitudes: espacio [mm], tiempo [s] y ángulos en [rad].

## REFERENCIAS

- Aidun C. y Lu Y. Lattice Boltzmann simulation of solid particles suspended in fluid. *Journal of Statistical Physics*, 81(1-2):49–61, 1995. ISSN 0022-4715. doi:10.1007/BF02179967.
- Aidun C.K. y Clausen J.R. Lattice-Boltzmann method for complex flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1):439–472, 2010. doi:10.1146/annurev-fluid-121108-145519.
- Aidun C.K., Lu Y., y Ding E.J. Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 373:287–311, 1998. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/S0022112098002493.
- Bouzidi M., Firdaouss M., y Lallemand P. Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, 13(11):3452–3459, 2001. doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.1399290.
- d’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., y Luo L.S. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 360(1792):437+, 2002. ISSN 1364503X. doi:10.2307/3066323.
- Feng J., Hu H.H., y Joseph D.D. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid part 1. sedimentation. *Journal of Fluid Mechanics*, 261:95–134, 1994. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/S0022112094000285.
- Giovacchini J.P. *Desarrollo e implementación de métodos basados en el modelo de lattice Boltzmann para aplicaciones en mecánica de fluidos*. Tesis de Doctorado, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria, Córdoba, Argentina, 2018.
- Giovacchini J.P. y Ortiz O.E. Flow force and torque on submerged bodies in lattice-Boltzmann methods via momentum exchange. *Phys. Rev. E*, 92:063302, 2015. doi:10.1103/PhysRevE.92.063302.
- Harris S. *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*. Dover books on physics. Dover Publications, 2004. ISBN 9780486438313.
- He X. y Luo L.S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the

- lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56(6):6811–6817, 1997. doi:10.1103/PhysRevE.56.6811.
- Ladd A.J.C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics*, 271:285–309, 1994a. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/S0022112094001771.
- Ladd A.J.C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. part 2. numerical results. *Journal of Fluid Mechanics*, 271:311–339, 1994b. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/S0022112094001783.
- Lagrava D., Malaspinas O., Latt J., y Chopard B. Advances in multi-domain lattice Boltzmann grid refinement. *Journal of Computational Physics*, 231(14):4808 – 4822, 2012. ISSN 0021-9991. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2012.03.015.
- Lallemand P. y Luo L.S. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance, and stability. *Phys. Rev. E*, 61:6546–6562, 2000. doi:10.1103/PhysRevE.61.6546.
- Li H., Lu X., Fang H., y Qian Y. Force evaluations in lattice Boltzmann simulations with moving boundaries in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 70:026701, 2004. doi:10.1103/PhysRevE.70.026701.
- Mei R., Yu D., Shyy W., y Luo L.S. Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. *Phys. Rev. E*, 65:041203, 2002. doi:10.1103/PhysRevE.65.041203.
- Miyamura A., Iwasaki S., y Ishii T. Experimental wall correction factors of single solid spheres in triangular and square cylinders, and parallel plates. *International Journal of Multiphase Flow*, 7(1):41 – 46, 1981. ISSN 0301-9322. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(81)90013-6.
- Wen B., Li H., Zhang C., y Fang H. Lattice-type-dependent momentum-exchange method for moving boundaries. *Phys. Rev. E*, 85:016704, 2012. doi:10.1103/PhysRevE.85.016704.
- Wolf-Gladrow D. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction*. número n.º 1725 En Lattice-gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: An Introduction. Springer, 2000. ISBN 9783540669739.
- Xia Z., Connington K.W., Rapaka S., Yue P., Feng J.J., y Chen S. Flow patterns in the sedimentation of an elliptical particle. *Journal of Fluid Mechanics*, 625:249–272, 2009. ISSN 1469-7645. doi:10.1017/S0022112008005521.
- Yang Z. Lattice Boltzmann outflow treatments: Convective conditions and others. *Computers & Mathematics with Applications*, 65(2):160 – 171, 2013. ISSN 0898-1221. doi:10.1016/j.camwa.2012.11.012. Special Issue on Mesoscopic Methods in Engineering and Science (ICMMES-2010, Edmonton, Canada).
- Yu D., Mei R., y Shyy W. A multi-block lattice Boltzmann method for viscous fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(2):99–120, 2002. ISSN 1097-0363. doi:10.1002/flid.280.
- Zou Q. y He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann bgk model. *Phys. Fluids E*, 9(6):1591–1598, 1997.