

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA FISURACIÓN EN EL HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE LA METODOLOGÍA DE DISCONTINUIDADES FUERTES Y LA TEORÍA DE MEZCLAS**

**Dorian L. Linero<sup>a</sup>, Javier Oliver<sup>b</sup>, Alfredo E. Huespe<sup>c</sup>**

*<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, edificio 406 Ciudad Universitaria, Bogotá, Colombia, [dllineros@unal.edu.co](mailto:dllineros@unal.edu.co), <http://www.ing.unal.edu.co/>*

*<sup>b</sup>E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Campus Nord UPC, Mòdul C1, Gran Capitán s/n, Barcelona s/n, España, [oliver@cimne.upc.edu](mailto:oliver@cimne.upc.edu), <http://www.rmee.upc.es/>*

*<sup>c</sup>CIMEC/Intec, Conicet, Guemes 3450, Santa Fe 3000, Argentina, [ahuespe@intec.unl.edu.ar](mailto:ahuespe@intec.unl.edu.ar), <http://www.intec.unl.edu.ar/>*

**Palabras clave:** Fallo material, fisuración, hormigón armado, discontinuidades fuertes, teoría de mezclas.

**Resumen.** En este trabajo se presenta un modelo que describe el comportamiento del hormigón armado, considerando que cada punto del medio continuo es un material compuesto constituido por dos paquetes de barras de acero ortogonales entre sí y embebidas en una matriz de hormigón en masa. La formulación es un aplicación de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (CSDA) en materiales compuestos tipo hormigón armado, de acuerdo con las hipótesis básicas de teoría de mezclas.

El comportamiento de los materiales componentes se describe por medio de modelos constitutivos particulares. La matriz de hormigón es representada por un modelo de daño escalar de tracción y compresión diferenciado, mientras que las fibras de acero se caracterizan con un modelo de plasticidad unidimensional. Los efectos de dovela y de deslizamiento entre fibra y matriz, están incluidos en el material compuesto como componentes de deformación y de tensión adicionales.

Finalmente, se simulan algunos ensayos en probetas ante diferentes solicitaciones, indicando la trayectoria de fisuras y la respuesta estructural. Dichos resultados se comparan con los obtenidos experimentalmente en algunas referencias.

## 1 INTRODUCCIÓN

La formulación presentada es una extensión de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (CSDA), aplicada a la fractura de materiales compuestos tipo hormigón armado.

La CSDA describe el mecanismo de fallo estructural identificando el comportamiento elástico, el proceso de fractura y el colapso general, mediante una cinemática enriquecida dentro de la mecánica del continuo (Oliver 1996a).

Cada punto material se compone de una matriz y dos familias de fibras orientadas en las direcciones  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente, como lo muestra la Figura 1. El modelo describe la cinemática en la escala del material compuesto, es decir: el campo de desplazamientos y en consecuencia el campo de deformaciones están definidos para el compuesto.

De acuerdo con la teoría de mezclas (Trusdell & Toupin 1960), (Oller 2003), en un sistema en paralelo los componentes de un material compuesto mantienen una deformación común, en cambio, la tensión es la suma ponderada (de acuerdo al volumen de participación), de las tensiones dadas en cada componente.

El fenómeno de localización de las deformaciones esta asociado al comportamiento del compuesto, por lo tanto el instante y la dirección de bifurcación dependen de las propiedades mecánicas de la matriz y de las fibras en conjunto.

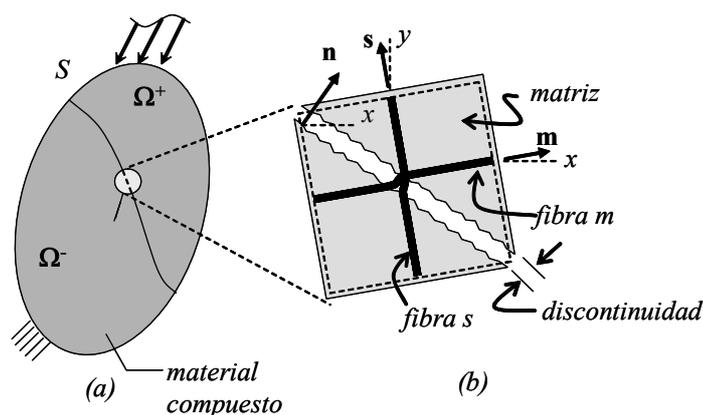


Figura 1: Material compuesto: (a) sólido con discontinuidad  $S$ , (b) punto material

## 2 MODELOS CONSTITUTIVOS DE LOS MATERIALES COMPONENTES

### 2.1 Modelo constitutivo de la matriz

El comportamiento de la matriz se describe mediante un modelo de daño isótropo con tracción y compresión diferenciada propuesto por Oliver y otros (1990). En general en un modelo de daño isótropo escalar la energía libre, la ecuación constitutiva, la ley de evolución y de endurecimiento se pueden expresar como (Simó and Ju 1987):

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r) = \frac{q}{r} \boldsymbol{\varepsilon}^m : \mathbb{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \frac{q}{r} \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m = \frac{q}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \lambda \quad , \quad r \geq r_{t=0} \\ r_{t=0} &= \frac{\sigma_u^m}{\sqrt{E^m}} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{q} = H^m(r) \dot{r} \quad , \quad H^m = \frac{dq}{dr} \leq 0 \quad (4)$$

$$0 \leq q \leq r_{t=0} \quad , \quad q_{t=0} = r_{t=0}$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m$  es el tensor de tensiones efectivas,  $\sigma_u^m$  es la resistencia a tracción de la matriz,  $H^m$  es el parámetro de ablandamiento,  $r$  y  $q$  son las variables internas tipo deformación y tipo tensión respectivamente. El tensor constitutivo elástico de la matriz para el caso plano de tensiones se define de la forma:

$$\mathbf{C}^m = \frac{E^m}{1-\nu^2} [\nu (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (1-\nu) \mathbf{I}] \quad (5)$$

En la ecuación anterior  $E^m$  y  $\nu$  corresponden al módulo de Young y la relación de Poisson de la matriz. Asimismo,  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{I}$  indican el tensor identidad de segundo y de cuarto orden respectivamente.

El modelo con tracción y compresión diferenciado utiliza una norma de deformaciones especial, tal que, para el estado tensional ( $\bar{\sigma}_1^m < 0, \bar{\sigma}_2^m < 0$ ) el dominio elástico es  $n$  veces más grande que el definido para ( $\bar{\sigma}_1^m > 0, \bar{\sigma}_2^m > 0$ ). Cuando  $\bar{\sigma}_1^m$  es positivo y  $\bar{\sigma}_2^m$  es negativo o viceversa se establece una transición aproximada como lo muestra la Figura 2. El factor  $n$  es el cociente entre la resistencia a compresión y a tracción de la matriz, es decir,  $n = \sigma_{u(c)}^m / \sigma_u^m$ .

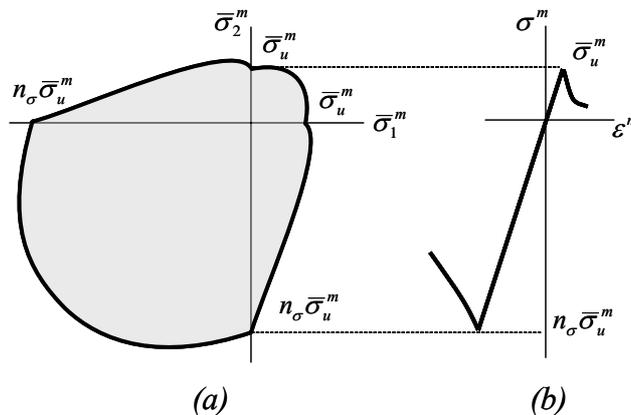


Figura 2: Modelo con degradación a tensión y compresión diferenciada: (a) superficie de daño, (b) curva de tensión – deformación uniaxial.

Para este modelo se definen el criterio de daño y las condiciones de carga-descarga como:

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r) = \tau_\varepsilon - r \quad , \quad \tau_\varepsilon = \alpha \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m : (\mathbf{C}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m} \quad (6)$$

$$f \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda f = 0, \lambda \dot{f} = 0 \text{ for } f = 0 \quad (7)$$

donde,

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m|} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \quad (8)$$

Al expresar la relación entre la tasa de deformación y la tasa de tensión en la matriz se llega a una ecuación constitutiva tangente de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbf{C}_{tg}^m : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m \quad (9)$$

donde el tensor constitutivo tangente para el estado de carga elástica o descarga es igual a:

$$\mathbf{C}_{tg}^m = \frac{q}{r} \mathbf{C}^m \quad (10)$$

mientras que para carga inelástica es de la forma:

$$\mathbf{C}_{tg}^m = \frac{q}{r} \mathbf{C}^m - \left( \frac{q - H^m r}{r^3} \right) \cdot \left[ \frac{r^2}{\alpha} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \otimes \mathbf{A}) + \alpha^2 (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m) \right] \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^m : \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha \quad (12)$$

$$\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha = \frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{\left( \sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m| \right)^2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m| \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial |\bar{\sigma}_i^m|}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right] \quad (13)$$

para el caso plano de tensiones:

$$\mathbf{A} = \frac{E^m}{1 - \nu^2} [\nu \text{tr}(\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha) \mathbf{1} + (1 - \nu) \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha] \quad (14)$$

Cuando ambas tensiones principales efectivas son positivas el parámetro  $\alpha$  es igual a 1 y su derivada con respecto a las tensiones efectivas  $\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha$  es igual al tensor nulo de segundo orden. Para tensiones principales efectivas negativas  $\alpha = 1/n$  y  $\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha = \mathbf{0}$ .

Si las tensiones principales efectivas son de signo contrario el valor del parámetro  $\alpha$  se calcula con la Ecuación (8), en cambio, el tensor de sus derivadas con respecto a las tensiones efectivas (en dos dimensiones), se evalúa mediante las siguiente expresión:

$$\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \alpha = \begin{bmatrix} \partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{xx}^m & \partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{xy}^m \\ \partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{xy}^m & \partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{yy}^m \end{bmatrix} \text{ donde} \quad (15)$$

$$\partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{xx}^m = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{4 \bar{\sigma}_r^m} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx}^m - \bar{\sigma}_{yy}^m}{2 \bar{\sigma}_r^m} \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx}^m + \bar{\sigma}_{yy}^m}{2 \bar{\sigma}_r^m} \right) \right]$$

$$\partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{yy}^m = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{4 \bar{\sigma}_r^m} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx}^m - \bar{\sigma}_{yy}^m}{2 \bar{\sigma}_r^m} \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx}^m + \bar{\sigma}_{yy}^m}{2 \bar{\sigma}_r^m} \right) \right]$$

$$\partial \alpha / \partial \bar{\sigma}_{xy}^m = - \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{\bar{\sigma}_{xy}^m}{4 (\bar{\sigma}_r^m)^2} \cdot \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx}^m + \bar{\sigma}_{yy}^m}{\bar{\sigma}_r^m} \right)$$

$$\bar{\sigma}_r^m = \sqrt{\left( (\bar{\sigma}_{xx}^m + \bar{\sigma}_{yy}^m) / 2 \right)^2 + (\bar{\sigma}_{xy}^m)^2}$$

### 2.2 Modelo constitutivo del comportamiento axial de las fibras

El comportamiento axial de las fibras se representa en un espacio unidimensional mediante un modelo de plasticidad con endurecimiento isótropo lineal (Simó & Hughes 1998). Este modelo es aplicable a ambos grupos de fibras, tanto a las fibras en la dirección  $\mathbf{m}$ , como a las fibras en  $\mathbf{s}$ .

$$\sigma^f = E^f (\varepsilon^f - \varepsilon_p^f) \tag{16}$$

$$\varepsilon_p^f = \lambda^f \text{sign}(\sigma^f) \tag{17}$$

$$\dot{\alpha}^f = \lambda^f \tag{18}$$

$$f(\sigma^f, \alpha^f) = |\sigma^f| - (\sigma_y + H^f \alpha^f) \tag{19}$$

$$f \leq 0; \lambda^f \geq 0; \lambda^f f = 0; \lambda^f \dot{f} = 0 \text{ for } f = 0 \tag{20}$$

En las ecuaciones anteriores,  $\varepsilon_p^f$  es la deformación plástica,  $E^f$  es el módulo de Young,  $\sigma^f$  es la tensión axial de la fibra y  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia. El endurecimiento esta determinado por la variable interna  $\alpha^f$  y el módulo  $H^f$ .

La ecuación constitutiva tangente que relación a las tasas de tensión y de deformación para los estados de carga elástica, carga inelástica o descarga se puede escribir de la forma:

$$\dot{\sigma}^f = E_{ig}^f \dot{\varepsilon}^f \tag{21}$$

donde el módulo de elasticidad tangente de la fibra es igual a:

$$E_{ig}^f = \begin{cases} E^f & \text{(elastico/descarga)} \\ \frac{E^f H^f}{E^f + H^f} & \text{(carga)} \end{cases} \tag{22}$$

La Figura 3 muestra la relación tensión deformación unidimensional para los modelos de plasticidad empleados en el comportamiento de la fibra a tracción y cortante respectivamente.

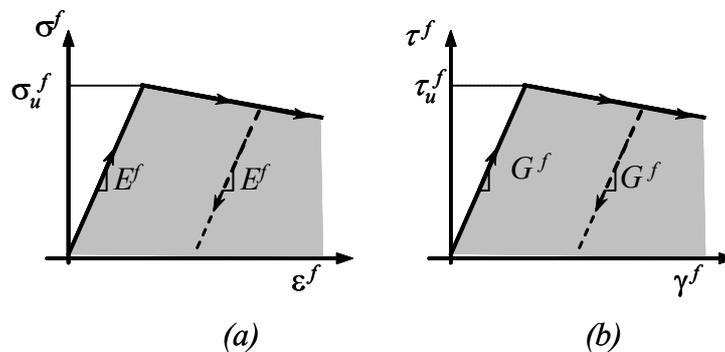


Figura 3: Modelos unidimensionales de plasticidad para las fibras: (a) relación tensión-deformación axial, (b) relación tensión cortante – deformación angular.

### 2.3 Modelo de fibra deslizante

Se considera que la pérdida de adherencia en la interfaz se refleja en una diferencia entre la deformación de los componentes denominada deformación por deslizamiento. Cuando existe deslizamiento entre la fibra y la matriz se establece un modelo constitutivo especial para la fibra que incluye el efecto de la adherencia denominado modelo de fibra deslizante.

Se puede suponer que la deformación del modelo de fibra deslizante es la suma de la deformación axial de la fibra  $\varepsilon^f$  (descrita en el apartado anterior), mas la deformación del modelo de deslizamiento  $\varepsilon^i$ , es decir:

$$\varepsilon^{fi} = \varepsilon^f + \varepsilon^i \quad (23)$$

Además, la tensión es la misma en ambos modelos y por lo tanto en el modelo de fibra deslizante, como lo indica la siguiente expresión.

$$\sigma^{fi} = \sigma^f = \sigma^i \quad (24)$$

Se utiliza un modelo elasto-plástico unidimensional para describir el deslizamiento en la interfaz. La rama elástica muestra una deformación por deslizamiento proporcional al nivel de tensión de acuerdo al módulo  $E^i$ . La rama con plasticidad perfecta indica que se ha perdido toda la adherencia, para un nivel de tensión  $\sigma_{adh}$ . La ecuación constitutiva tangente se puede escribir como:

$$\dot{\sigma}^i = E_{tg}^i \cdot \dot{\varepsilon}^i \quad \text{donde,} \quad (25)$$

$$E_{tg}^i = \begin{cases} E^i & \text{(elastico/descarga)} \\ 0 & \text{(carga)} \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación constitutiva del modelo de fibra deslizante se puede escribir como:

$$\dot{\sigma}^{fi} = E_{tg}^{fi} \cdot \dot{\varepsilon}^{fi} \quad \text{donde,} \quad (26)$$

$$E_{tg}^{fi} = \begin{cases} \left( \frac{1}{1/E^f + 1/E^i} \right) & \text{(elastico/descarga)} \\ 0 & \text{(carga)} \end{cases}$$

El instante de carga inelástica está determinado por el menor valor entre la tensión de fluencia  $\sigma_y$  y la tensión límite de adherencia  $\sigma_{adh}$ .

Cuando el módulo de deslizamiento  $E^i$  tiende a infinito y la tensión límite de adherencia es igual a la tensión de fluencia se recupera el modelo constitutivo de la fibra y por lo tanto la condición de adherencia perfecta.

En el hormigón armado, los ensayos de arrancamiento pueden proporcionar los parámetros del modelo de deslizamiento como se muestra en la Figura 4. En este ensayo, una barra de diámetro  $d$  está embebida en el hormigón una distancia  $L_s$ . La relación entre la fuerza aplicada en el extremo libre de la barra y el deslizamiento producido permiten construir la curva tensión de la fibra versus deformación de deslizamiento.

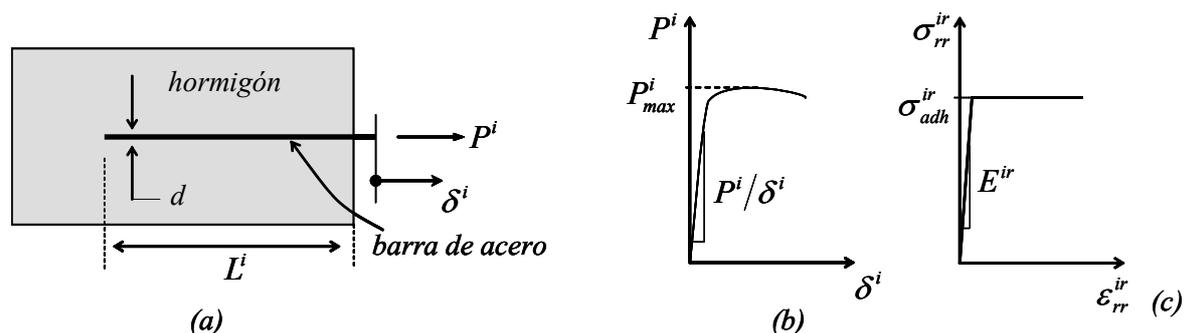


Figura 4: (a) esquema del ensayo de arrancamiento, (b) relación experimental entre fuerza aplicada y deslizamiento en el ensayo de arrancamiento, (c) modelo de deslizamiento: relación tensión – deformación.

Los valores aproximados del módulo de deslizamiento y de la tensión límite de adherencia son:

$$E^i = \left( \frac{P}{\delta} \right) \cdot \left( \frac{A^f}{L_s} \right), \quad \sigma_{adh} = \frac{P_{max}}{A^f} \leq \sigma_y \quad (27)$$

donde  $A^f = \pi d^2/4$

## 2.4 Modelo constitutivo del comportamiento a cortante de las fibras

El comportamiento a cortante del acero de refuerzo en hormigón armado ha sido ampliamente estudiado (Park & Paulay 1975). Su inserción en modelos de numéricos se puede ver en los trabajos de Kollergger & Mehlhorn (1990), Belletti y otros (2001), Pietruszczak y Winnicki (2003).

En una pieza de hormigón armado al producirse una fisura en modo II de fallo, la fuerza cortante es resistida por el trabazón interno entre las partículas de agregado del hormigón (*aggregate interlock*) y por la capacidad del acero de refuerzo al cortante en las caras de una fisura, este último efecto se denomina acción de dovela (*dowel action*).

La resistencia de dovela a través del plano de cortante se desarrolla por medio de mecanismos como la flexión de las barras de refuerzo o la resistencia a cortante a través de las barras (Park & Paulay 1975). El primer mecanismo se produce cuando la separación entre las caras de una fisura permiten el comportamiento a flexión en una porción libre de la barra  $l$  (para  $d \ll l$ ). Se supone que el desplazamiento paralelo al plano de la fisura se transmite a una viga doblemente empotrada de luz igual a la apertura de la fisura como lo indica la Figura 5(a).

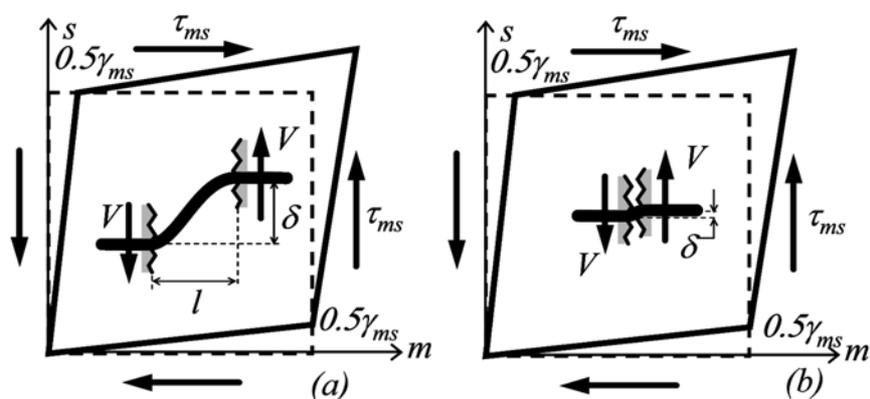


Figura 5: Acción de dovela: (a) flexión de las barras en las caras de una fisura, (b) corte directo de la barra en las caras de una fisura.

En el rango elástico y de acuerdo con la teoría de vigas de Timoshenko, el desplazamiento  $\delta$  transmite una fuerza cortante  $V$  en la barra igual a:

$$V = \frac{12E^f I}{l^3} \delta \quad (28)$$

donde el segundo momento de inercia  $I = \pi d^4/64$  para una sección transversal circular de diámetro  $d$ .

El comportamiento elástico de la viga ocurre siempre y cuando el momento flector máximo  $M=Vl/2$  sea inferior al momento plástico  $M_y = \sigma_y \cdot (d^3/6)$ , donde  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia del acero a tracción o compresión. Por lo tanto, la fuerza cortante en el límite elástico se puede escribir de la forma:

$$V_y = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d}{l} \cdot A^f \sigma_y^f \quad (29)$$

Cuando la apertura de la fisura es muy pequeña comparada con el deslizamiento tangencial se impone la capacidad a cortante a través de las barras. La fuerza cortante transmitida por el refuerzo es igual a:

$$V = \frac{G^f A^f}{l} \delta \quad \text{donde} \quad G^f = \frac{E^f}{2(1+\nu)} \quad (30)$$

Aplicando el criterio de fluencia de von Mises para un estado de cortante puro, la fuerza a cortante de fluencia es igual a:

$$V_y = \frac{\sigma_y^f}{\sqrt{3}} A_f \quad (31)$$

Como se verá mas adelante, después de iniciado el daño en la matriz se produce un estado de fisura distribuida donde la apertura de cada una de ellas es pequeña. Por lo tanto el segundo mecanismo es el más apropiado para simular los ensayos aquí incluidos.

La acción de dovela se describe mediante un modelo constitutivo unidimensional elasto-plástico similar al indicado en la sección anterior. En este caso, relaciona a la deformación angular  $\gamma^f = \gamma_{ms}$  con la tensión cortante de la fibra  $\tau_{ms}^f$  en el plano  $ms$ , como lo muestra la Figura 5 y las siguientes expresiones:

$$\tau_{ms}^f = G^{f\tau} (\gamma^f - \gamma_p^f) \quad (32)$$

$$\dot{\alpha}^\tau = \lambda^\tau \quad (33)$$

$$f(\tau_{ms}^f, \alpha) = |\tau_{ms}^f| - (\tau_y + H^{f\tau} \alpha^\tau) \quad (34)$$

$$f \leq 0 \quad , \quad \lambda^\tau \geq 0 \quad , \quad \lambda^\tau f = 0 \quad , \quad \lambda^\tau \dot{f} = 0 \text{ for } f = 0 \quad (35)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\gamma_p^f$  es la deformación angular plástica,  $G^{f\tau}$  es el módulo elástico del modelo de cortante,  $\tau_{ms}^f$  es la tensión cortante y  $\tau_y$  es la tensión cortante de fluencia. El endurecimiento está determinado por la variable interna  $\alpha^\tau$  y el módulo  $H^{f\tau}$ .

La ecuación constitutiva tangente será de la forma:

$$\dot{\tau}_{ms}^f = G_{ig}^{f\tau} \dot{\gamma}_{ms}^f \quad (36)$$

donde el módulo tangente a cortante es igual a:

$$G_{ig}^{f\tau} = \begin{cases} G^{f\tau} & (\text{elástico / descarga}) \\ \frac{G^{f\tau} H^{f\tau}}{G^{f\tau} + H^{f\tau}} & (\text{carga}) \end{cases} \quad (37)$$

Se puede considerar que  $\tau_{ms}^f = 4V/3A^f$  para secciones circulares y que la deformación angular es aproximadamente igual a  $\gamma_{ms} = \delta/l$ .

El módulo elástico del modelo constitutivo  $G^{f\tau}$  se evalúa a partir de los mecanismos indicados anteriormente en las ecuaciones 28 o 30. La tensión cortante de fluencia  $\tau_y$  se calcula con las ecuaciones 29 o 31.

### 3 MODELO DEL MATERIAL COMPUESTO

La teoría de mezclas establece que cada volumen infinitesimal de material compuesto es la suma de las sustancias que lo conforman. En un sistema en paralelo, la contribución de cada componente a la tensión del compuesto es función de su volumen de participación, al mismo tiempo que la deformación es común en todos ellos (Oller 2003). Sin embargo, es necesario evaluar la deformación en una dirección específica cuando se trata de establecer el comportamiento unidimensional de las fibras.

Las deformación en la matriz  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  es igual al tensor de deformaciones común  $\boldsymbol{\varepsilon}$  definido en un espacio bi o tridimensional. El comportamiento axial de la fibra en dirección  $\mathbf{m}$  está asociado con la componente  $mm$  del tensor de deformaciones. De igual forma, el comportamiento de la fibra en  $\mathbf{s}$  está determinado por la componente  $ss$  de la deformación. Si además, se considera la capacidad de las fibras al cortante es necesario tener en cuenta la deformación angular en el plano  $ms$ .

Las siguientes ecuaciones indican las componentes de la tasa de deformación utilizadas en el modelo constitutivo de cada material.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ (matriz)} \quad (38)$$

$$\dot{\varepsilon}^{fm} = \dot{\varepsilon}_{mm} = \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{m} \text{ (fibra } m) \quad (39)$$

$$\dot{\epsilon}^{fs} = \dot{\epsilon}_{ss} = \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{fibra } s) \quad (40)$$

$$\dot{\gamma}^f = \dot{\gamma}_{ms} = 2 \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{acción cortante en } ms) \quad (41)$$

Dado el estado de deformaciones del material compuesto, las tensiones se obtienen de la suma ponderada de las tensiones de los componentes evaluadas mediante leyes constitutivas particulares.

En la matriz se aplica una ley constitutiva de daño isotrópico, que permite obtener las tensiones en el espacio bidimensional. En las fibras se consideran tres leyes constitutivas unidimensionales desacopladas, dos asociadas con el comportamiento axial de cada familia de fibras y otra asociada al comportamiento a cortante de las fibras después de iniciado el daño en la matriz.

El tensor de tensiones del material compuesto corresponde a la suma de los tensores de tensiones de matriz y fibras multiplicados por sus respectivos coeficientes de participación en volumen así:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + k^{fm} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \dot{\sigma}_{mm}^f + \\ & + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\sigma}_{ss}^f + 2(k^{fm} + k^{fs}) (\mathbf{m} \otimes \mathbf{s})^S \dot{\tau}_{ms}^f \end{aligned} \quad (42)$$

En el caso especial en el cual las fibras en  $\mathbf{m}$  son perpendiculares a las fibras en  $\mathbf{s}$  el tensor de tensiones tendrá las siguientes componentes en una base  $ms$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{mm} &= k^m \sigma_{mm}^m + k^{fm} \sigma_{mm}^f \\ \sigma_{ss} &= k^m \sigma_{ss}^m + k^{fs} \sigma_{ss}^f \\ \tau_{ms} &= k^m \tau_{ms}^m + (k^{fm} + k^{fs}) \tau_{ms}^f \end{aligned} \quad (43)$$

Se observa la contribución axial de las fibras, así como también, la capacidad a cortante de las mismas al incluir la acción de dovela.

En virtud de la compatibilidad de las deformaciones entre los componentes se puede definir la ecuación constitutiva del material compuesto como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (44)$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}_{tg}$  se puede evaluar sustituyendo las ecuaciones constitutivas de los componentes que define la de tasa de la tensión del compuesto, obteniendo una expresión de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{tg} = & k^m \mathbf{C}_{tg}^m + k^{fm} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) E_{tg}^f + \\ & + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{tg}^f + \\ & + 4(k^{fm} + k^{fs}) (\mathbf{m} \otimes \mathbf{s})^S \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{s})^S G_{tg}^{f\tau} \end{aligned} \quad (45)$$

#### 4 ALGUNOS INGREDIENTES DE LA METODOLOGÍA DE DISCONTINUIDADES FUERTES DE CONTINUO (CSDA)

A continuación se indican algunos de los ingredientes de la CSDA en los que se basa la formulación aquí presentada, partiendo de los trabajos realizados por Oliver y colaboradores

(Oliver 1996a,b), (Oliver et al. 2000,2003,2004).

**4.1 Descripción cinemática del material compuesto**

En la CSDA se establece la existencia de un salto en el campo de desplazamientos a través de la superficie de fallo, capaz de generar valores no acotados (en sentido distribucional) en el campo de las deformaciones.

Sea un cuerpo  $\Omega$  que exhibe una discontinuidad fuerte sobre la superficie  $S$  de normal  $\mathbf{n}$ , la cual divide al cuerpo en los dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  como lo muestra la Figura 1(a). Se define el campo de velocidad en un punto  $\mathbf{x}$  y para un instante  $t$  como:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + M_S(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$$

donde  $M_S(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$  , (46)

$$H_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \text{ y } \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- / \Omega^h \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ / \Omega^h \end{cases}$$

$\dot{\bar{\mathbf{u}}}$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  son la parte continua y el salto de la velocidad, respectivamente.  $M_S(\mathbf{x})$  es la función elemental de salto unitario en el continuo calculada como la diferencia entre la función de Heaviside y la función continua  $\varphi(\mathbf{x})$  definida en una pequeña banda  $\Omega^h$  contenida en  $S$  como se indica en la Figura 6.

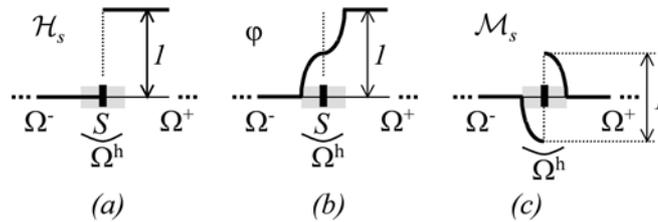


Figura 6: (a) función de Heaviside, (b) función  $\varphi$  y (c) función salto unitario.

El campo tasa de deformaciones se evalúa aplicando el operador diferencial simétrico sobre el campo de velocidad, de tal forma que la deformación se puede dividir en una parte compatible en función de la velocidad en el continuo y una parte mejorada en términos del salto de la velocidad. Dado que el gradiente de la función de Heaviside produce un valor no acotado, la tasa de deformación se puede expresar como la suma de la parte regular o acotada más una parte singular o no acotada, como se indica a continuación.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\bar{\mathbf{u}}}}_{\text{regular}} - \underbrace{(\nabla \varphi \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])}_{\text{mejorada acotada}} + \underbrace{(\delta_s^k \mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])}_{\text{mejorada no acotada}} \text{ singular} \tag{47}$$

donde,  $\delta_s^k(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow 0} \mu_S(\mathbf{x}) \frac{1}{k}$ ;  $\mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in S^k \\ 0 & \mathbf{x} \notin S^k \end{cases}$

en general el salto del campo ( $\bullet$ ) se indica de la forma:

$$[[\bullet]] = (\bullet)_{\Omega^+/S} - (\bullet)_S \quad (48)$$

De acuerdo con la ecuación anterior la diferencia entre la tasa de deformación dentro y fuera de la superficie de discontinuidad  $S^k$  es igual a:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^+/S} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{k} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^{sym} \right] \quad (49)$$

En el modelo numérico se utilizan elementos finitos que puedan capturar los saltos agregando modos enriquecidos de deformación, los cuales están controlados por grados de libertad adicionales. Estos elementos especiales capaces de incluir la discontinuidad del desplazamiento en su interior se denominan *elementos finitos con discontinuidades embebidas* (Figura 7). Adicionalmente, cada elemento tiene soporte elemental de la función de enriquecimiento, permitiendo la condensación a nivel del elemento, de los grados de libertad relacionados con el salto.

La velocidad dentro de un elemento finito, obtenido de la discretización espacial de la Ecuación (46), se puede escribir como:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \sum_{e=1}^{ne} M_S^e(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}^e(t) \quad (50)$$

donde,  $\dot{\mathbf{d}}_i = [\dot{u}_i \quad \dot{v}_i]^T$   $\dot{\boldsymbol{\beta}} = [\dot{\beta}_x \quad \dot{\beta}_y]^T$

$N_i$  es la función de forma del elemento en el nodo  $i$ ,  $\dot{\mathbf{d}}_i$  es el vector de velocidad compatible del nudo  $i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}^e$  es el vector de saltos de velocidad en el punto especial  $e$ ,  $nn$  es el número de nodos compatibles y  $ne$  es el número de puntos especiales para describir la discontinuidad. La Figura 7(c) muestra la función elemental discreta de salto unitario para un elemento triangular lineal.

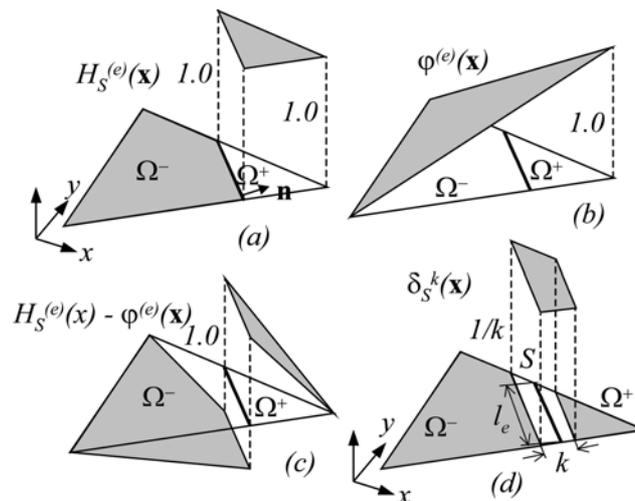


Figura 7: Elemento triangular lineal con discontinuidades embebidas: (a) función de Heviside, (b) función  $\varphi$ , (c) función salto unitario y (d) función delta de Dirac regularizada.

A partir de la ecuación anterior se puede expresar el campo de la tasa de deformación de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \overbrace{\sum_{i=1}^{nn} (\nabla N_i \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^s}^{\text{parte compatible}} + \overbrace{\sum_{e=1}^{ne} [ -(\nabla \varphi \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^e)^s + \delta_S^k (\mathbf{n} \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^e)^s ]}^{\text{parte mejorada}} \quad (51)$$

$$\text{donde, } \delta_S^k(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow 0} \mu_S(\mathbf{x}) \frac{1}{k} \quad ; \quad \mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in S^k \\ 0 & \mathbf{x} \notin S^k \end{cases}$$

Para elementos en los cuales sólo hay un punto especial para definir la discontinuidad, como el elemento triangular lineal, se puede omitir la sumatoria en el segundo término de la ecuación anterior.

#### 4.2 Condiciones de equilibrio en el material compuesto

Todos los puntos materiales del medio continuo, a excepción de los pertenecientes a la superficie de discontinuidad  $S$ , verifican la condición de equilibrio en el contorno y la ecuación de equilibrio interno a partir del postulado de balance de la cantidad de movimiento, expresadas como:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{en } \Omega/S \quad (52)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_t = \dot{\mathbf{t}}^* \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (53)$$

donde  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{t}^*$  es el vector de tracciones prescritas y  $\mathbf{n}_t$  es la normal al contorno  $\Gamma_\sigma$ .

En la superficie de discontinuidad  $S$  se deben cumplir dos condiciones de continuidad de tracciones. La primera exige continuidad entre las tracciones en  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  en la vecindad de  $S$ , y la segunda requiere continuidad entre la tracción sobre la discontinuidad y la tracción muy cerca de ella, bien sea en  $\Omega^+$  o en  $\Omega^-$ .

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } S \quad (54)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } S \quad (55)$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar en forma débil mediante la formulación variacional indicada a continuación. Sea un campo de variaciones admisibles de la deformación del tipo:

$$\boldsymbol{\gamma} = \underbrace{\nabla^s \bar{\boldsymbol{\eta}}}_{\text{parte compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{\text{parte mejorada}} \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \bar{V}_u \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \in \tilde{V}_\varepsilon \quad (56)$$

donde  $\bar{V}_u, \tilde{V}_\varepsilon$  representan los espacios de la variación admisibles de  $\bar{\boldsymbol{\eta}}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  respectivamente. Para el cual se cumple que:

$$\int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla^s \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega - \left[ \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{\mathbf{t}}^* \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Gamma \right] = 0 \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \bar{V}_u \quad (57)$$

La continuidad interna de tracciones impuesta en forma fuerte en la Ecuación (55) se puede expresar aproximadamente en términos de valores promedios de la forma:

$$\frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \overbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}^{\text{valor medio en } \Omega/S} d\Omega - \frac{1}{l^e} \int_{S^e} \overbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}}^{\text{valor medio en } S} dS = 0 \quad (58)$$

donde  $\Omega^e$  es la superficie del elemento y  $l^e$  es la longitud de la discontinuidad dentro del elemento como se indica en la Figura 7(d).

## 5 ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DEL MATERIAL COMPUESTO

En materiales compuestos donde las fibras embebidas en la matriz se distribuyen uniformemente, se puede considerar que la dirección y el instante de localización estarán determinados por las propiedades mecánicas de todos los constituyentes.

En la superficie de discontinuidad de normal  $\mathbf{n}$  la tasa de tracciones del material compuesto es continua, por lo tanto:

$$[[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]] = [[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (59)$$

Sustituyendo las ecuaciones (44) y (49) en la expresión anterior se obtiene:

$$\mathbf{Q}_{tg}(t, \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}] \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (60)$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}$  es una condición suficiente para la existencia de la discontinuidad. Por lo tanto, se puede determinar el instante de localización  $t_{loc}$  y la dirección de la discontinuidad  $\mathbf{n}_{loc}$  mediante la evaluación del tensor de localización tangente del material compuesto  $\mathbf{Q}_{tg}$  como se indica a continuación:

$$\mathbf{Q}_{tg}(t_{loc}, \mathbf{n}_{loc}) = \mathbf{n}_{loc} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}_{loc} = \mathbf{0} \quad \forall t = t_{loc} \quad (61)$$

El tensor de segundo orden  $\mathbf{Q}_{tg}$  debe ser nulo, por lo tanto, el determinante de la matriz cuadrada  $[\mathbf{Q}_{tg}]$  debe ser igual a cero, es decir:

$$\det[\mathbf{Q}_{tg}(t_{loc}, \mathbf{n}_{loc})] = \det[\mathbf{n}_{loc} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}_{loc}] = 0 \quad \forall t = t_{loc} \quad (62)$$

Sustituyendo la ecuación (45) en la ecuación (61) se puede expresar el tensor de localización tangente del material compuesto como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{tg} = & k^m \mathbf{Q}_{tg}^m + k^{fm} E_{tg}^f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \\ & + k^{fs} E_{tg}^f (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})^2 (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \\ & + 4(k^{fm} + k^{fs}) G_{tg}^f [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{m} \otimes \mathbf{s})^s \cdot \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (63)$$

donde el tensor de localización tangente de la matriz para un modelo de daño isótropo de tracción y compresión diferenciada es igual a:

$$\mathbf{Q}_{lg}^m = \frac{q}{r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^m \cdot \mathbf{n}) - \left( \frac{q - H^m r}{r^3} \right) \left( \frac{r^2}{\alpha} (\bar{\boldsymbol{\tau}}^m \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}^A) + \alpha^2 (\bar{\boldsymbol{\tau}}^m \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}}^m) \right) \quad (64)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^m = \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m$  ,  $\bar{\boldsymbol{\tau}}^A = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$

El instante de localización y la dirección de la discontinuidad se calculan mediante un proceso de búsqueda (en cada instante de pseudo-tiempo), de los valores mínimos del determinante de  $[\mathbf{Q}_{lg}]$  con respecto a  $\mathbf{n}$ . Este procedimiento puede ser muy costoso en problemas tridimensionales, sin embargo, en el campo bidimensional el coste es mucho menor, primero porque el determinante a calcular es de orden dos y segundo, porque el vector  $\mathbf{n}$  se puede definir a partir de un solo ángulo  $\theta_n$ , tal que  $\mathbf{n} = [\cos \theta_n, \sin \theta_n]$ . La Figura 8 muestra la variación del determinante de  $[\mathbf{Q}_{lg}]$  con respecto al ángulo  $\theta_n$  entre la dirección principal  $l$  y el vector  $\mathbf{n}$  para diferentes pasos de pseudo-tiempo hasta conseguir el instante de localización.

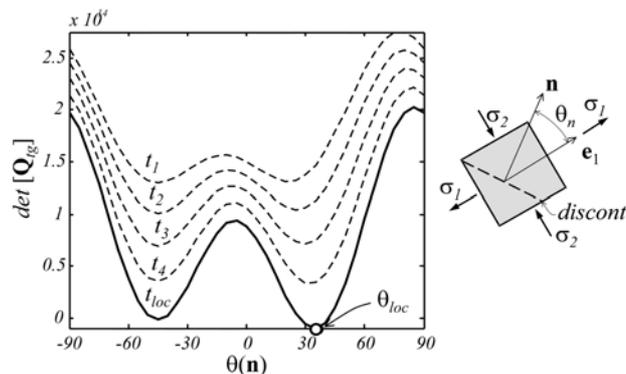


Figura 8: Análisis de bifurcación para material compuesto

## 6 APLICACIÓN AL HORMIGÓN ARMADO. ENSAYO DE UN PANEL REFORZADO EN DOS DIRECCIONES SOMETIDO A CORTANTE

Con la formulación descrita anteriormente se simulaban ensayos experimentales de cortante en probetas de hormigón armado realizados por algunos investigadores. Para este tipo de problemas es válido suponer que el hormigón armado es un material compuesto conformado por fibras de acero distribuidas uniformemente en una matriz de hormigón.

La trayectoria de las fisuras para los diferentes estados de carga se puede establecer a partir de las líneas de igual desplazamiento. La formación de una fisura ocurre debido a un proceso de localización de las deformaciones, el cual se puede observar en las zonas donde hay menos separación entre líneas de igual desplazamiento.

Si se produce la bifurcación del equilibrio aumentan las deformaciones en un punto material en carga inelástica y disminuyen en un punto vecino en descarga manteniendo la continuidad de tracciones. Por lo tanto, los elementos en condición de carga inelástica rodeados de zonas en descarga son un indicador de la región fisurada.

Cuando se generan muchas fisuras paralelas entre sí y repartidas por toda la probeta no hay un proceso claro de localización en la escala de estudio. En este caso la simulación numérica

mostrará un estado de carga inelástica sobre toda la probeta y una distancia constante entre líneas de igual desplazamiento.

Este apartado muestra los resultados numéricos de la simulación del ensayo PV27 realizado por Collins, Vecchio y Mehlhorn (Collins et al.1985). Este ensayo un panel de hormigón armado con barras de acero en dos direcciones es sometido a cortante en el plano  $xy$  a través de un sistema de 5 anclajes por cada cara, adheridos al hormigón y al acero.

La probeta de 890mm de lado y 70mm de espesor, está reforzada por 40 barras de acero en la dirección  $x$  que representan el 1.785% del volumen total y otras 40 barras en dirección  $y$  con la misma cuantía. En la Figura 9(a) se muestra un esquema del problema.

La distribución de las fibras hace adecuado el análisis en la escala de material compuesto, es decir, considerando en la simulación elementos finitos de material homogéneo.

El hormigón tiene módulo de Young  $E^m = 20$  GPa, relación de Poisson  $\nu = 0.2$ , energía de fractura de  $G_f = 100$  N/m y resistencia a la tracción  $\sigma_u^m = 2$  MPa y a la compresión  $\sigma_{u(c)}^m = 20$  MPa. Las barras de acero de refuerzo tienen un comportamiento elasto-plástico perfecto con un módulo de Young  $E^f = 200$  GPa y una tensión de fluencia  $\sigma_y^f = 402$  MPa.

Se han utilizado dos mallas de elementos finitos: la primera con 2736 elementos finitos como lo muestra la Figura 9(b) y la segunda aproximadamente el doble de fina con 5370 elementos indicada en la Figura 9(c). En ambas mallas los elementos del panel tenían participación de acero de refuerzo  $k^m = 0.01785$  en la dirección  $x$  y  $k^s = 0.01785$  en la dirección  $y$ .

Como se ha descrito con anterioridad, la trayectoria de las fisuras en el panel se observa a través de los gráficos de líneas de igual desplazamiento y de elementos en carga inelástica.

La Figura 10 muestra la relación entre la deformación angular media y la tensión cortante aplicada para las dos mallas, como también, los elementos finitos en carga inelástica y las líneas de igual desplazamiento para el último paso de carga.

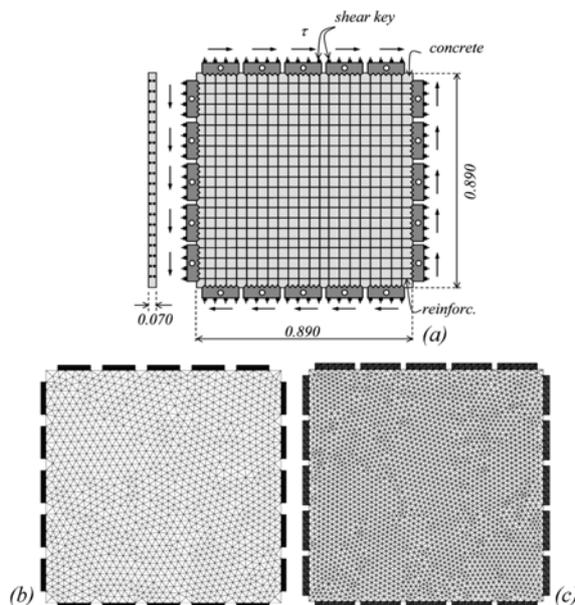


Figura 9: Panel de hormigón armado sometido a cortante: (a) esquema descriptivo, (b) malla de 2736 elementos, (c) malla de 5370 elementos.

De la comparación de resultados entre ambas mallas se puede indicar que la respuesta

estructural es similar y que la trayectoria de las fisuras mantiene la misma dirección y forma a pesar que aparece en lugares diferentes del panel. Se considera que para una condición de tensión uniforme la posición de la fisura es aleatoria, por lo tanto, esta diferencia en el resultado es aceptable.

A continuación se describen los resultados obtenidos con la malla de 2736 elementos y sus comparación con los valores experimentales. En la Figura 11 se muestra la relación entre la deformación angular media y la tensión cortante aplicada al panel, donde la línea continua corresponde al resultado numérico y la línea a trazos a los valores experimentales. Los elementos en carga inelástica y las líneas de igual desplazamiento para algunos pasos de carga se ilustran en la Figura 12(a) y Figura 12 (b). La Figura 13(a) tiene una reproducción esquemática de la trayectoria de fisuras al final del experimento tomada de la referencia (Collins et al.1985).

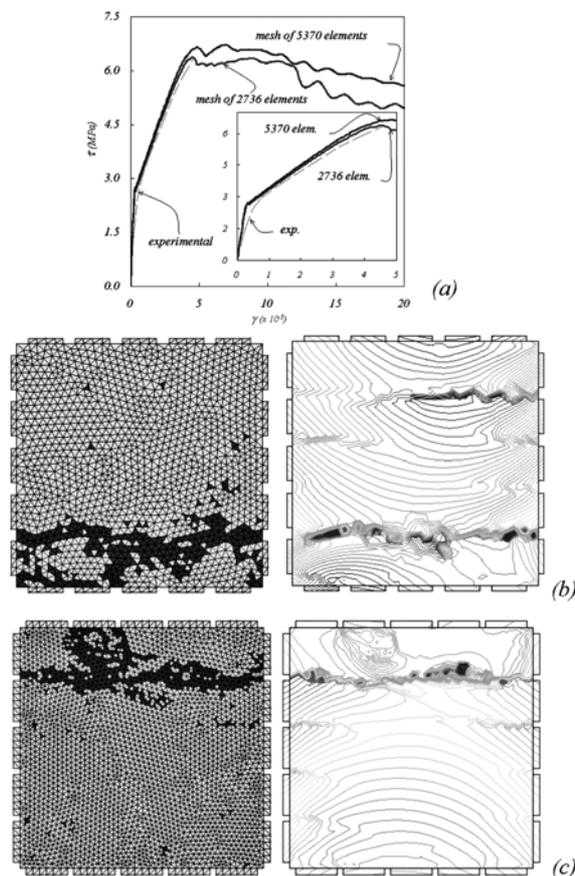


Figura 10: Panel de hormigón armado sometido a cortante: (a) relación entre la deformación angular y la tensión cortante aplicada. Elementos en carga inelástica y líneas de igual desplazamiento en el último paso de carga: (b) para una malla de 2736 elementos y (c) para una malla de 5370 elementos.

Durante los instantes 1 y 2 se observa un estado de carga inelástica de todo el panel sin localización de la deformación, esto significa que a pesar del daño producido en la matriz no se produce una activación del campo de saltos de desplazamiento y por lo tanto el tensor de localización tangente no es nulo. Es importante recordar que en el cálculo de este tensor interviene la rigidez de la matriz, de las fibras y de los efectos de interacción entre ambas. En esta fase del experimento se observan muchas fisuras en la dirección principal de poca

apertura y distribuidas por todo la probeta.

En el instante 3 comienza la localización de la deformación en tres zonas de la probeta. En el paso 4 solo se conforman dos fisuras y en el instante final queda una sola discontinuidad en dirección  $x$  en la zona inferior del panel. El ensayo indica que la fisura principal también es paralela a  $x$  pero se produce en la parte superior de la probeta. Dada la condición de cortante puro del ensayo se considera que esta fisura se puede presentar a cualquier altura de la muestra.

La superposición de las trayectorias de localización observadas en el modelo numérico durante todo el proceso de carga se ajusta al distribución real de fisuras en el estado final.

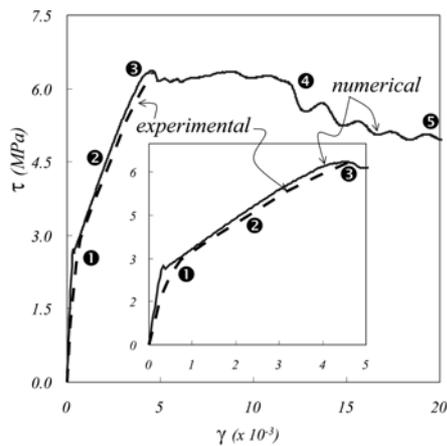


Figura 11: Panel de hormigón armado sometido a cortante: relación experimental y numérica entre la deformación angular y la tensión cortante aplicada

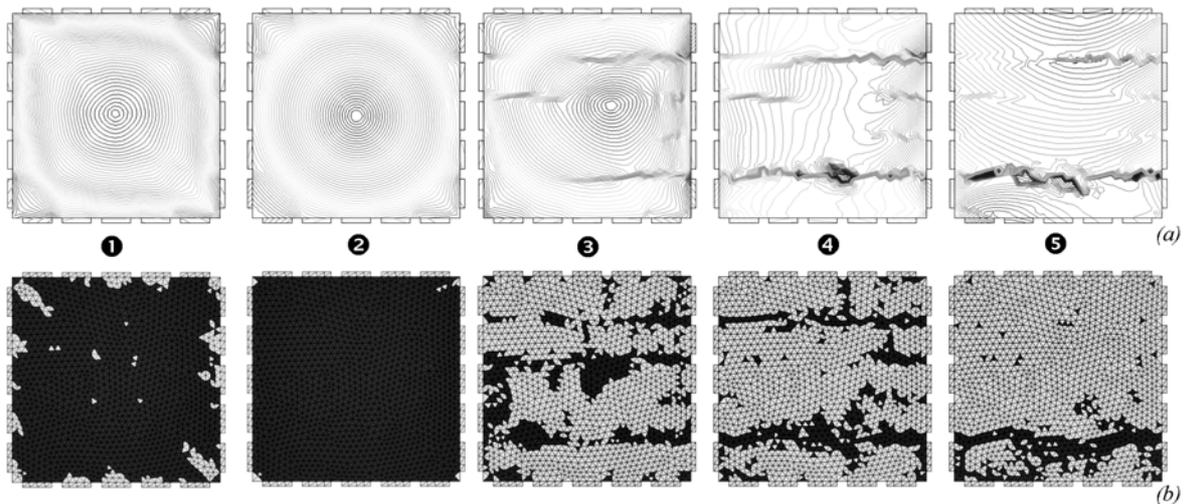


Figura 12: Panel de hormigón armado sometido a cortante: (a) líneas de igual desplazamiento, (b) zonas de carga inelástica, para diferentes instantes de tiempo.

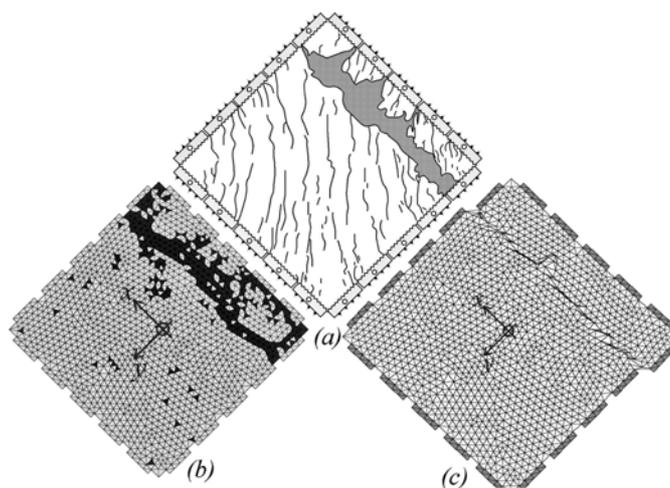


Figura 13: Panel de hormigón armado sometido a cortante. Comparación de resultados: (a) esquema de la distribución de fisuras obtenidas de forma experimental, (b) zonas en carga inelástica y (c) deformada, en el instante final

## 7 CONCLUSIONES

Una de las bondades de esta formulación reside en definir al material compuesto en cada punto del continuo mediante un modelo constitutivo. De esta forma una deformación común determina el comportamiento de la matriz, de las fibras y de los mecanismos de interacción de acuerdo con su ley constitutiva particular. Esto evita altos costos computacionales y facilita la implementación en un código estándar de elementos finitos.

A diferencia del hormigón simple, existe un estado de fisuración distribuida estable observable en algunos ensayos en hormigón armado. Esto indica que el instante de bifurcación depende de las propiedades de la matriz, de las fibras y de los mecanismos de interacción entre ambas. Por esta razón en el trabajo aquí presentado se realizó un análisis de localización del material compuesto.

En un panel reforzado por fibras orientadas en las mismas direcciones del plano de cortante, la acción de dovela de las barras en las caras de una fisura representa un aporte importante a la respuesta estructural del material compuesto.

## REFERENCES

- Z. Bazant and J. Planas. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press. 1998.
- B. Belletti, R. Cerioni, & I. Iori. Physical approach for reinforced-concrete (PARC) membrane elements. *Journal of Structural Engineering*. 127(12):1412-1426, 2001.
- M. Collins, , F. Vecchio and G. Mehlhorn. An International competition to predict the response of reinforced concrete panels. *Canadian Journal of Civil Engineering*. 12:624-644. 1985.
- A. Naaman, G. Namur, J. Alwan and H. Najm. Fiber pullout and bond slip. II Experimental validation. *Journal of Structural Engineering ASCE*. 117(9):2791-2800, 1991.
- J. Oliver and A. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

- 193:2987-3014, 2004.
- J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 39:3575-3600, 1996a
- J. Oliver. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part II: Numerical Simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 39:3601-3623. 1996b
- J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solid and Structures*. 37:7207-7229, 2000.
- J. Oliver, M. Cervera, S. Oller and J. Lubliner, Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete, In: N. Bicanic et al. (Eds.), *Proc. SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. 945-958, 1990.
- J. Oliver, A. Huespe & E. Samaniego, A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 56:2135-2161, 2003.
- S. Oller, *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Barcelona: CIMNE. 2003.
- R. Park & T. Paulay. *Reinforced Concrete Structures*. Wiley. 1975.
- S. Pietruszczak & A. Winnicki. Constitutive model for concrete with embedded sets of reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics – ASCE*. 129 (7):725-738, 2003.
- J. Simó & T. Hughes. *Computational inelasticity*. Berlin: Springer. 1998.
- J. Simó & J. Ju, Strain and stress based continuum damage models. I. Formulation. *International Journal of Solid and Structures*. 23:821-840, 1987.
- C. Trusdell and R. Toupin, *The classical field theories*. *Handbuch der Physik III/I*. Berlín: Springer. 1960.