

INFLUENCIA DE LA CARGA AXIAL EN RECOLECTORES PIEZOELECTRICOS NO LINEALES

INFLUENCE OF AXIAL LOADS ON NONLINEAR PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTER

Santiago M. Osinaga^a, Sebastián P. Machado^a y Mariano Febbo^b

^a*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, B8000 Bahía Blanca, Argentina, gimap@frbb.utn.edu.ar, <https://www.frbb.utn.edu.ar/>*

^b*Instituto de Física del Sur (IFISUR), Universidad Nacional del Sur (UNS), CONICET, Av. Alem 1253, B8000 Bahía Blanca, Argentina, ifisur@uns.edu.ar, <http://www.ifisur-conicet.gob.ar/>*

Palabras clave: Recolección de energía, piezoelectricidad, método de escalas múltiples.

Resumen. En este trabajo, la influencia de una carga axial en la respuesta de un dispositivo piezoeléctrico tipo viga es estudiada. Para ello, una viga piezoeléctrica bi-empotrada, asumiendo una no linealidad geométrica por grandes deformaciones, es considerada en orden de capturar acoplamiento del desplazamiento axial y flexional. La resolución de las ecuaciones diferenciales, obtenidas luego de la expansión en modos, es llevada a cabo por dos enfoques: un método analítico por perturbación (escalas múltiples) e integración numérica directa. Ambos enfoques son comparados para observar el grado de correlación existente. Las simulaciones demuestran que, la inclusión de una carga axial, permite sintonizar la frecuencia natural del sistema, como así aumentar el ancho de banda de funcionamiento.

Keywords: Energy harvesting, piezoelectricity, method of multiple scales.

Abstract. In this work, the influence of an axial load on the response of a piezoelectric device is modeled. A clamped-clamped piezoelectric beam under an axial load is considered with a geometrical nonlinearity assumed in order to couple the axial and lateral displacement of the beam. Using a modal expansion technique, the solution of the equations of motion is found through two different approaches: a perturbation method (multiple scales) and direct numerical integration. Both approaches are compared in order to observe correlation between them and the influence of the axial load in voltage output of the device. Simulations show that devices axially loaded can tune the natural frequency of the system and also improve the operating bandwidth.

1. INTRODUCCIÓN

La recolección de energía consiste en el aprovechamiento de energía desperdiciada. Diversas tecnologías han sido desarrolladas para distintos tipos de fuentes disponibles (eólica, geotérmica, cinética, etc). Dentro del aprovechamiento de energía basado en vibraciones, el desarrollo de dispositivos piezoeléctricos ha sido ampliamente estudiado (Roundy et al., 2003; Anton y Sodano, 2007) debido a que se tratan de transductores de gran densidad de potencia (permitiendo su escalabilidad).

Gran cantidad de modelos de recolectores lineales han sido propuestos y ensayados (Shu y Lien, 2006; Erturk y Inman, 2008, 2009). En general, para los dispositivos recolectores basados en vibraciones, el fenómeno de resonancia es deseado para la maximización de energía recuperada debido a la maximización de tensiones y desplazamientos que ocurren durante dicho fenómeno. Uno de los inconvenientes, observados en estos tipos de dispositivos, es la gran disminución del voltaje, para frecuencias que se apartan levemente de la natural del sistema (pico resonante). Frente a esto, la posibilidad de sintonizar la frecuencia natural y/o aumentar el ancho de banda de funcionamiento mediante la modificación de los parámetros del recolector, surge como tema de estudio. (Daqaq et al., 2014).

En este trabajo, la influencia de una carga axial en la respuesta de un dispositivo piezoeléctrico es modelada. Para ello una viga piezoeléctrica bi-empotrada es considerada proponiendo una no linealidad geométrica por grandes deformaciones de manera de modelar el acoplamiento axial y flexional. Las ecuaciones diferenciales electromecánicas no lineales son obtenidas mediante la aplicación del principio de Hamilton. Para su resolución, posterior a la expansión en modos, se consideran dos enfoques: el método de perturbación (Nayfeh, 1982) basado en escalas múltiples, e integración numérica directa. Por último, un caso de estudio es presentado donde la verificación del método analítico aproximado es contrastado con la integración numérica directa de las ecuaciones.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las hipótesis de vigas de Bernoulli-Euler, donde los efectos de la inercia rotacional y la deformación por corte son despreciados debido al grado de esbeltez de la viga. El vector desplazamiento de la viga puede ser expresado de acuerdo al campo de desplazamientos lineales como:

$$\mathbf{u} = [u(x, t) - zw'(x, t) \quad 0 \quad w(x, t) + g(t)]^T \quad (1)$$

donde $u(x, t)$, $w(x, t)$ y $g(t) = G \cos(\Omega t)$ representan las funciones de desplazamiento axial, transversal y la excitación donde, para este caso, es modelada como una armónica en la base.

Debido a la necesidad de capturar la influencia de una carga axial estática en el extremo de la estructura en la respuesta transversal de la misma, un campo de deformaciones no lineales es asumido. Las componentes de deformación o relaciones cinemáticas pueden ser obtenidos a partir de la del tensor de Green-Lagrange (Fung, 1994) completo donde solo la componente 1-1 toma valor no nulo como¹:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

lo cual reemplazando (1) en (2), y despreciando la componente no lineal de la deformación

¹Los ejes son notados de forma indistinta como $1 \equiv x$, $2 \equiv y$ y $3 \equiv z$

axial $\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\right)$, el campo de desplazamientos puede ser expresado como:

$$\epsilon_{11} = u' - zw'' + \frac{1}{2}w'^2 \tag{3}$$

donde el primer termino representa la deformación debido al problema axial, el segundo debido al problema flexional lineal y el ultimo es desplazamiento flexional no lineal por asumir grandes deformaciones.

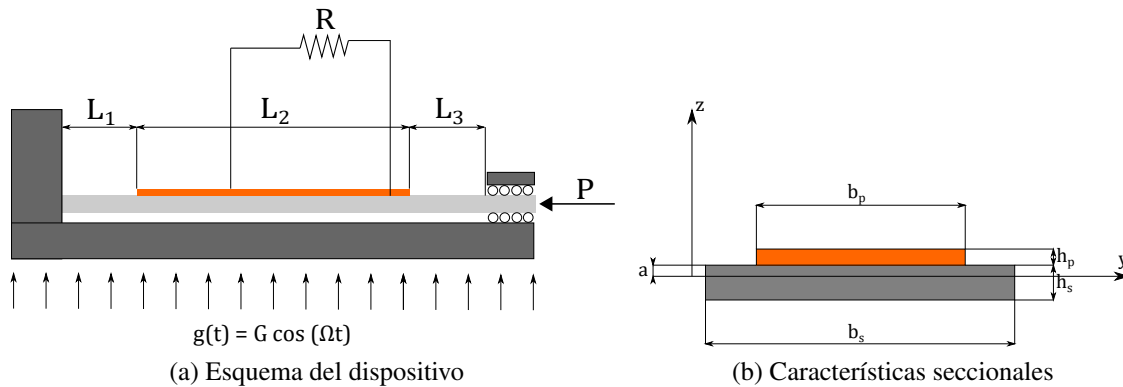


Figura 1

3. ECUACIONES ELECTROMECAÑICAS

La deducción de las ecuaciones diferenciales a derivadas parciales es llevada a cabo mediante la aplicación el principio de Hamilton (Meirovitch, 1970) el cual puede ser enunciado como:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc}) dt = 0 \tag{4}$$

Donde δT , δU y δW_{nc} representan la variación de la energía cinética, la energía interna y el trabajo de las fuerzas no conservativas. Dentro del trabajo de las fuerzas no conservativas se ha tenido en cuenta solamente la disipación de energía del sistema a través de la resistencia eléctrica R conectada al piezoelemento. Un amortiguamiento lineal viscoso será añadido luego a las ecuaciones modales. Resolviendo (4) las ecuaciones de Euler-Lagrange son obtenidas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) + \frac{v}{R} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

donde $L = T - U$ es la función lagrangiana. La expresiones de T y U deben ser obtenidas para la resolución de (5)

3.1. Energía cinética

La energía cinética del sistema puede ser determinada como la sumatoria de la correspondiente a la estructura (T_s) y al piezo (T_p):

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 dV_s + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 dV_p \quad (6)$$

que integrando en todas las direcciones y y z :

$$T_s = \frac{1}{2} m_s \left[\int_0^{L_1} (...) dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} (...) dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} (...) dx \right] \quad (7)$$

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \int_{L_1}^{L_1+L_2} (...) dx \quad (8)$$

donde $m_s = b_s h_s \rho_s$ y $m_p = b_p h_p \rho_p$ corresponden a la masa por unidad de longitud de la estructura y del piezo respectivamente

3.2. Energía interna

La energía interna se obtiene a partir de la integración de las ecuaciones de entalpías específicas. Siguiendo la misma notación que en [IEEE Standards \(1988\)](#), y considerando que la única componente de deformación no nula es la correspondiente a $\epsilon_{xx} \equiv \epsilon_{11}$ y polarización en la dirección de E_3 estas pueden ser escritas como:

$$H_s = \frac{1}{2} c_{11s} \epsilon_{11}^2 \quad (9)$$

$$H_p = \frac{1}{2} c_{11p} \epsilon_{11}^2 - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{33} E_3^2 \quad (10)$$

donde c_{11s} y c_{11p} denotan son los módulos de Young para la estructura y el piezoeléctrico respectivamente, e_{31} una constante piezoeléctrica, E_3 el campo eléctrico en la dirección z y ϵ_{33} la permitividad dieléctrica del piezoeléctrico. La energía interna del sistema puede ser calculada como la sumatoria $U_s + U_p$. La energía interna de la estructura puede ser determinada como:

$$\begin{aligned} U_s &= \int_{V_s} H_s dV_s \\ &= b_s \left[\int_{-h_s/2}^{h_s/2} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} c_{11s} \epsilon_{11}^2 dx dz + \int_{-h_s+a}^a \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{1}{2} c_{11s} \epsilon_{11}^2 dx dz + \int_{-h_s/2}^{h_s/2} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \frac{1}{2} c_{11s} \epsilon_{11}^2 dx dz \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Donde a es la distancia desde la fibra neutra (figura 1b) hasta la zona de unión de ambos materiales cuyo valor es:

$$a = \frac{b_s E_s h_s^2 - b_p E_p h_p^2}{2(b_p E_p h_p + b_s E_s h_s)} \quad (12)$$

Una de las consideraciones importantes a tener en cuenta en la integración de la entalpía del piezo es la utilización de una función $f_1(x)$ cuyo valor sea igual a 1 en la longitud del piezo e igual a 0 fuera de el, cuya expresión es ([Erturk y Inman, 2009](#)):

$$f_1(x) = H(x - L_1) - H(x - L_1 - L_2) \quad (13)$$

la cual su diferenciación respecto a x dará lugar a la función delta Dirac $\delta(x)$. Una propiedad importante a ser implementada será (F. G. Friedlander, 1999):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(n)}\delta(x - x_0)}{dx^{(n)}} \chi(x) dx = (-1)^n \frac{d^{(n)}\chi(x)}{dx^{(n)}} \Big|_{x=x_0} \quad (14)$$

donde $\chi(x)$ es una función de prueba continua y diferenciable. La importancia de la función $f_1(x)$ resulta en la necesidad de que el segundo término de la entalpía específica del piezo, que da lugar al acoplamiento electromecánico, sobreviva a la diferenciación por la coordenada espacial x al aplicar las ecuaciones electromecánicas de Euler-Lagrange. La energía interna del piezo puede ser expresada luego como:

$$\begin{aligned} U_p &= \int_{V_p} H_p dV_p \\ &= \int_a^{a+h_p} \int_{-b_p/2}^{b_p/2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left(\frac{1}{2} c_{11p} \epsilon_{33}^2 - e_{31} c_{11p} E_3 f_1(x) - \frac{1}{2} \epsilon_{33} E_3^2 \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (15)$$

Uno de las hipótesis comúnmente utilizadas en la literatura es que el campo es uniforme a lo largo del espesor del piezo la cual implica que:

$$E_3 = \frac{v(t)}{h_p}. \quad (16)$$

3.3. Ecuaciones diferenciales gobernantes

Resolviendo las ecuaciones (5) a partir de las expresiones de energía cinética y potencial, y agrupando términos según sus extremos de integración:

$$m\ddot{u} - \lambda\ddot{w}' - EA(u'' + w'w'') + \gamma'v = 0 \quad (17)$$

$$m\ddot{w} + \gamma v w'' + \gamma' v w' + \theta_l v - EA \left(\frac{3}{2} w'^2 w'' + w' u'' + w'' u' \right) + EI w^{IV} = -m\ddot{g} \quad (18)$$

$$C_{eq} \dot{v} + \frac{v}{R} + \frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \gamma [2\dot{u}' + 2w'\dot{w}' - (2a + h_p) \dot{w}''] dx = 0 \quad (19)$$

donde λ representa la influencia del giro flexional en la inercial axial y su valor es:

$$\lambda = \frac{A_p A_s (h_p + h_s) (E_s \rho_p - \rho_s E_p)}{2(A_p E_p + A_s E_s)} \quad (20)$$

el cual toma valor nulo cuando la viga es de sección uniforme. Aquí $\gamma(x) = b_p e_{31} f_1(x)$ dará lugar a los acoplamientos no-lineales del sistema, θ_l es una constante que representan el acoplamiento electromecánico lineal entre el desplazamiento y el efecto piezoeléctrico cuyos valores son:

$$\theta_l(x) = \frac{b_p e_{31}}{2} (2a + h_p) [\delta'(x - L_1) - \delta'(x - L_1 - L_2)] \quad (21)$$

En la ecuación eléctrica (19) $C_{eq} = \frac{b_p L \epsilon_{33}}{h_p}$ es la capacidad equivalente del piezo. Por otro lado, m , EA y EI son funciones constantes a tramos.

4. RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE LAS ECUACIONES

4.1. Influencia axial en el problema flexional

La variable $u(x, t)$ puede ser eliminada del problema si se la expresa en relación a $w(x, t)$ ². A partir de la ecuación axial (17), y despreciando tanto la inercia como el efecto piezoeléctrico la siguiente ecuación es obtenida:

$$u'' + w'w'' = 0 \quad (22)$$

lo que implica que: $u'' = -w'w''$. Estas hipótesis pueden ser asumidas sin mucho error debido a que las fuerzas debido a la inercia axial son despreciables frente a las producidas por el desplazamiento transversal. La integración de la ecuación (22) resulta, siguiendo un procedimiento similar al de Mazzilli et al. (2008); Nayfeh (2013):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u' + \frac{1}{2}w'^2 \\ &= \text{const} \\ &= \varepsilon_M \end{aligned} \quad (23)$$

Lo cual implica que la componente de deformación va a ser constante para cada uno de los tres tramos. Para cada tramo se tendrá:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Mj} &= \frac{1}{L_j} \int_{x_{ji}}^{x_{jf}} \varepsilon_{11} dx \\ &= \frac{u(x_{jf}) - u(x_{ji})}{L_j} + \frac{1}{2L_j} \int_0^L w_j'^2 dx \\ &= \frac{P}{E_j A_j} + \frac{1}{2L_j} \int_{x_{ji}}^{x_{jf}} w_j'^2 dx \end{aligned} \quad (24)$$

donde $j = 1, 2, 3$ representa cada uno de los tramos y las coordenadas x_{ji} y x_{jf} las coordenadas de inicio y fin del tramo. De la resolución del problema axial la igualdad es obtenida:

$$\frac{u(x_{jf}) - u(x_{ji})}{L_j} = \frac{P}{E_j A_j} \quad (25)$$

Por ultimo, reemplazando en las expresiones anteriores:

$$u'_j = \frac{P}{E_j A_j} + \frac{1}{2L_j} \int_{x_{ji}}^{x_{jf}} w_j'^2 dx - \frac{1}{2}w_j'^2 \quad (26)$$

y finalmente reemplazando u'' y u' dados por (22) y (26) en la ecuación flexional es obtenida:

$$m\ddot{w} + \gamma v w'' + \gamma' v w' + \theta_l v - P w'' - \frac{EA}{2L} w'' \int_0^L w'^2 dx + EI w^{IV} = -m\ddot{g} \quad (27)$$

Donde el lado derecho representa la excitación de base, el primer termino del lado izquierdo representa la inercia flexional, el segundo y tercero acoplamiento electromecánicos no lineales,

²La ventaja de reducir el problema eliminando dicha variable es evitar la expansión en modos axiales, siendo solo necesarios los modos flexionales

el cuarto termino representa el acoplamiento electromecánico lineal, el quinto la influencia de la carga axial en la respuesta transversal, el sexto termino representa la no linealidad geométrica propuesta y el séptimo la rigidez flexional de la viga.

Debe observarse que la ecuación eléctrica (19) requiere la obtención de \dot{u}' . Para ello se diferencia respecto al tiempo la ecuación (26) de forma que:

$$\begin{aligned} \dot{u}'_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{E_2 A_2} + \frac{1}{2L_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} w'^2 dx - \frac{1}{2} w'^2 \right) \\ &= -w' \dot{w} + \frac{1}{L_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} w' \dot{w}' dx \end{aligned} \quad (28)$$

Y reemplazando en la ecuación electrica se obtiene:

$$C_{eq} \ddot{v} + \frac{v}{R} + b_p e_{31} \int_{L_1}^{L_1+L_2} w' \dot{w}' dx - \frac{b_p e_{31}}{2} (2a + h_p) \int_{L_1}^{L_1+L_2} \dot{w}'' dx = 0 \quad (29)$$

Donde el tercer y cuarto termino representan los acoplamientos no lineales y lineales correspondientemente. Por lo tanto las ecuación (27) y (29) representan el conjunto ecuaciones a resolver.

4.2. Expansión en modos

Para el estudio de la respuesta, cuando la frecuencia de forzamiento se encuentra próxima a la natural ($\Omega \approx \omega$), la aproximación de un solo modo de la forma (Rao, 2007)

$$w_i(x, t) = q_i(t) \phi_i(x) \quad (30)$$

suele ser empleado. Reemplazando (30) en (27), asumiendo una forzante armónica de la forma $\ddot{g} = G \cos(\Omega t)$, donde G y Ω es la amplitud y frecuencia de excitación respectivamente puede escribirse:

$$m \ddot{q}_i \phi_i + \gamma v q_i \phi_i'' + \gamma' v q_i \phi_i' + \theta_1 v - P q_i \phi_i'' - \frac{EA}{2L} q_i^3 \phi_i'' \int_0^L \phi_i'^2 dx + EI q_i \phi_i^{IV} = -mG \cos(\Omega t) \quad (31)$$

que multiplicando por el modo e integrando en la longitud de la viga resulta:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i \int_0^L m \phi_i \phi_i dx + q_i v_i \int_0^L \gamma \phi_i'' \phi_i dx + v q_i \int_0^L \gamma' \phi_i' \phi_i dx + v \int_0^L \theta_1 \phi_i dx - q_i P \int_0^L \phi_i'' \phi_i dx \\ - q_i^3 \int_0^L \left[\frac{EA}{2L} \phi_i'' \phi_i \int_0^L \phi_i'^2 dx \right] dx + q_i EI \int_0^L \phi_i^{IV} \phi_i dx = -\cos(\Omega t) \int_0^L m G \phi_i dx \end{aligned} \quad (32)$$

que puede ser reescrita como:

$$\ddot{q}_i + \dot{q}_i \mu_i + q_i (\omega_i^2 - \tilde{P}_i) + v q_i K_{1i} + v q_i K_{2i} - v \tilde{\theta}_1 - q_i^3 \alpha_i = -\tilde{G}_i \cos(\Omega t) \quad (33)$$

siendo

$$\omega_i^2 = \int_0^{L_1} E_1 I_1 \phi_{i1}^{IV} \phi_{i1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} E_2 I_2 \phi_{i2}^{IV} \phi_{i2} dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} E_3 I_3 \phi_{i3}^{IV} \phi_{i3} dx \quad (34)$$

$$K_{1i} = \int_{L_1}^{L_1+L_2} e_{31} b_p \phi_i'' \phi_i dx \quad (35)$$

$$K_{2i} = b_p e_{31} [\phi_i'(L_1) \phi(L_1) - \phi_i'(L_1 + L_2) \phi(L_1 + L_2)] \quad (36)$$

$$\tilde{\theta}_i = \frac{1}{2} b_p e_{31} (2a + h_p) [\phi_i'(L_1 + L_2) - \phi_i'(L_1)] \quad (37)$$

$$\tilde{P}_i = P \left[\int_0^{L_1} \phi_{i1}'' \phi_{i1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_{i2}'' \phi_{i2} dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \phi_{i3}'' \phi_{i3} dx \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \frac{E_1 A_1}{2L_1} \int_0^{L_1} \left[\phi_{i1}'' \phi_{i1} \int_0^{L_1} \phi_{i1}'^2 dx \right] dx + \frac{E_2 A_2}{2L_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[\phi_{i2}'' \phi_{i2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_{i2}'^2 dx \right] dx \\ & + \frac{E_3 A_3}{2L_3} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \left[\phi_{i3}'' \phi_{i3} \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} \phi_{i3}'^2 dx \right] dx \end{aligned} \quad (39)$$

$$\tilde{G}_i = -G \left[\int_0^{L_1} m_1 \phi_{i1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} m_2 \phi_{i2} dx + \int_{L_1+L_2}^{L_1+L_2+L_3} m_3 \phi_{i3} dx \right] dx \quad (40)$$

donde α_i es el coeficiente de la no linealidad cúbica, ω_i es la frecuencia natural en ausencia de la carga P , \tilde{P}_i es la carga axial modal. Tal como se comentó anteriormente, aquí el *damping* viscoso μ_i ha sido añadido en la ecuación.

La expansión en modos de la ecuación eléctrica se realiza reemplazando (30) en (29) da:

$$C_{eq} \dot{v} + \frac{v}{R} - \tilde{\theta}_i \dot{q} + \tilde{\theta}_{nl} q \dot{q} = 0 \quad (41)$$

donde el tercer termino representa el acoplamiento lineal y el tercero el no lineal donde el valor del parámetro es:

$$\tilde{\theta}_{nl} = \frac{b_p e_{31}}{2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \phi_i' \phi_i' dx \quad (42)$$

La determinación de los parámetros modales previamente presentados requiere la resolución del problema de autovectores y autovalores donde los modos y frecuencias naturales de la viga son encontrados (Shaker, 1975).

4.3. Métodos de escala múltiples

El sistema de ecuaciones a ser resuelto esta dado por las ecuaciones (33) y (41). Despreciando los acoplamientos no lineales el sistema puede ser reducido al siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{q}_i + \dot{q}_i \mu_1 + q_i \tilde{\omega}_i^2 + v \tilde{\theta}_i - \alpha_i q_i^3 = -\tilde{G}_i \cos(\Omega t) \quad (43)$$

$$C_{eq} \dot{v} + \frac{v}{R} - \tilde{\theta}_i \dot{q} = 0 \quad (44)$$

donde $\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 - \tilde{P}_i$ representará la frecuencia flexional modificada por la influencia de la carga axial.

Diversos métodos para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales no lineales han sido desarrollados. Los metodos de perturbación, denominados así debido a que la solución del sistema no lineal es obtenida por perturbación de la respuesta lineal del mismo, son algunos de ellos. Diversos metodos existen y han sido empleados en dispositivos piezoelectricos exitosamente como el método de Lindstedt-Poincaré (Dai et al., 2009), balance armónico, (Leadenham y Erturk, 2014; Sebald et al., 2011), promediación (Soliman et al., 2008) y escalas múltiples (Abdelkefi et al., 2012). En este trabajo, este ultimo sera empleado. El escalamiento de las ecuaciones debe ser realizado mediante un numero adimensional considerado *bookkeeping parameter* denotado por ε :

$$\ddot{q}_i + \varepsilon \mu_i \dot{q}_i + \tilde{\omega}_i^2 q_i + \varepsilon \tilde{\theta}_l v - \varepsilon \alpha_i q_i^3 = -\varepsilon \tilde{G}_i \cos(\Omega t) \tag{45}$$

$$C_{eq} \dot{v} + \frac{v}{R} - \tilde{\theta}_l \dot{q} = 0 \tag{46}$$

Las funciones q y v son expandidas también en términos de este parámetro de forma que:

$$q(t) \approx q_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon q_1(T_0, T_1, \dots) + \dots \tag{47}$$

$$v(t) \approx v_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, \dots) + \dots \tag{48}$$

donde $T_0 = t$ corresponde a la escala de tiempo original $T_1 = \varepsilon t$ la escala mas lenta. Debido a que las ecuaciones diferenciales ordinarias son convertidas en ecuaciones diferenciales a derivadas parciales el operador derivada debe ser redefinido como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 \tag{49}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + \varepsilon D_0 D_1 \tag{50}$$

siendo $D_i^j = \partial^j / \partial T_i^j$. Reemplazando (47) y (48) en (45) y (46) y separando en los distintos ordenes de ε , el siguiente conjunto de ecuaciones es obtenido:

$$D_0^2 q_0 + \omega_i^2 q_0 = 0 \tag{51}$$

$$C_{eq} D_0 v_0 + \frac{v_0}{R} = \tilde{\theta}_l D_0 q_0 \tag{52}$$

$$D_0^2 q_1 + \omega_i^2 q_1 = -\frac{1}{2} e^{iT_0 \Omega} G_i - \frac{1}{2} e^{-iT_0 \Omega} G_i - 2\mu_i D_0 q_0 - 2D_0 D_1 q_0 + \alpha_i q_0^3 - \tilde{\theta}_l v_0 \tag{53}$$

$$C_{eq} D_0 v_1 + \frac{v_1}{R} = \tilde{\theta}_l (D_0 q_1 + D_1 q_0) \tag{54}$$

La resolución de la ecuación (51) puede ser obtenida como:

$$q_0 = A(T_1) e^{iT_0 \omega_i} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0 \omega_i} \tag{55}$$

Donde $\bar{A}(T_1)$ representa el complejo conjugado de $A(T_1)$. Reemplazando (55) en (52) y resolviendo se obtiene:

$$v_0 = B(T_1) e^{-\frac{T_0}{C_{eq} R}} + \frac{A e^{iT_0 \omega} R \tilde{\theta}_l \omega}{-i + C_{eq} R \omega_i} + \frac{\bar{A} e^{-iT_0 \omega} R \tilde{\theta}_l \omega_i}{i + C_{eq} R \omega_i} \tag{56}$$

	Piezoeléctrico	Portante
Ancho	14 mm	18 mm
Alto	0,6mm	0,3mm
Largo	142mm	85mm
Densidad	8050 kg/cm ³	5440 kg/cm ³
Modulo de Young	210 MPa	30.336 MPa
Capacidad	84.04 pF	-
d31	170 pC/m ²	-

Tabla 1: Dimensiones, propiedades mecánicas y electricas

Debido a que se estudia el fenómeno de resonancia primaria, donde la frecuencia de forzamiento se encuentra en cercanía al a natural del sistema se asume que

$$\Omega = \omega_i + \sigma \epsilon \quad (57)$$

donde σ es denominado parámetro de sinterización. Reemplazando (55), (56) y (57) en (53), se toman los términos seculares que son aquellos que multiplican a $e^{iT_0\omega}$:

$$-\frac{1}{2}e^{iT_0\epsilon\sigma}G_i - 2i\mu_i\omega_iA - \frac{R\tilde{\theta}_l^2\omega_iA}{-i + C_{eq}R\omega_i} + 3\alpha_iA^2\bar{A} - 2i\omega A' = 0. \quad (58)$$

La solución a la ecuación (58) es realizada mediante una expansión de la incógnita A en coordenadas polares de forma que:

$$A = a(T_1)e^{i\beta(T_1)} \quad (59)$$

Donde reemplazando (59) en (58) y trabajando algebraicamente la siguiente ecuación de frecuencia versus amplitud es obtenida:

$$\sigma = \frac{1}{8\omega^2(1 + C_{eq}^2R^2\omega_i^2)} \left(-3\alpha_i\omega_i a^4 + C_{eq}R^2\omega_i^3 a^2 (4\tilde{\theta}_l^2 - 3C_{eq}\alpha_i a^2) - 4\sqrt{\omega^2 a^2 \left[(G_i + C_{eq}^2G_iR^2\omega_i^2)^2 - \omega_i^2 (R\tilde{\theta}_l^2 + 2\mu_i + 2C_{eq}^2R^2\mu_i\omega_i^2)^2 a^2 \right]} \right) \quad (60)$$

Una vez obtenido el valor de amplitud, el valor de voltaje puede ser obtenido de (56) observando que el primer termo tiende a desaparecer en estado permanente ($T_0 \rightarrow \infty$)

5. CASO NUMÉRICO DE ESTUDIO

Con el objetivo de convalidar el procedimiento empleado las dimensiones y propiedades expuestas en la Tabla 1 son adoptadas. Los datos corresponden a un piezoeléctrico tipo Macro Fiber Composite (MFC) modelo M-8514-P2 fabricado por [Smart-Materials](#) sobre una portante de acero

5.1. Validación del método con integración numérica

A fines de comparar la respuesta en frecuencia que se obtendría en una formulación lineal con una no lineal la figura 2 muestra las diferentes curvas para cada caso. El parámetro α_i de la no

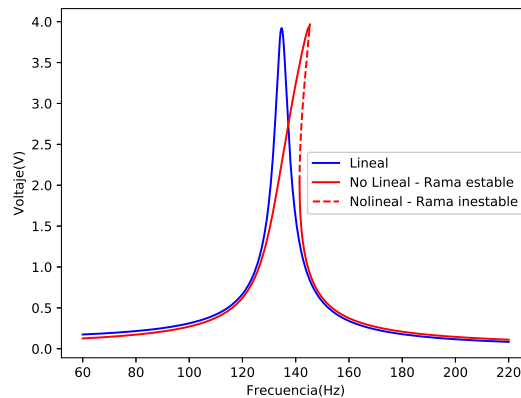


Figura 2: Efecto de la no-linealidad geométrica en la respuesta en frecuencia ($g = 0,5$ y $P = 30N$)

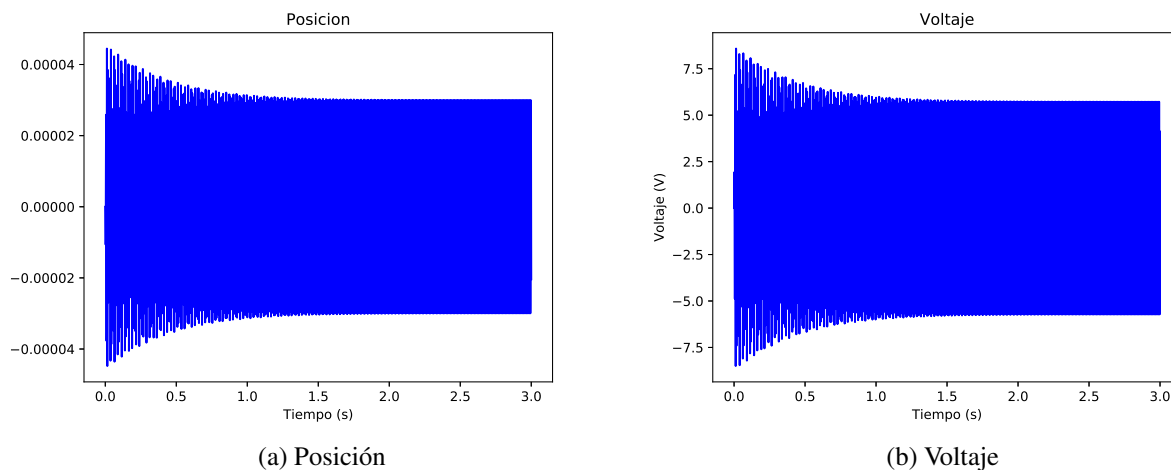


Figura 3: Gráficas temporales de la integración numérica ($g = 1$, $P = 30N$ y $\Omega = \omega$)

linealidad produce un efecto de endurecimiento (o también conocido como *hardening*) dando lugar a una rama inestable, donde la solución en estado permanente que adoptará el sistema dependerá de las condiciones iniciales del mismo. La integración numérica de las ecuaciones fue implementada en *Python* (Rossum, 1995) mediante el método *Runge-Kutta*. La figura 3 muestra las gráficas temporales producto de integrar numérica

La figura 4 muestra la resolución de las ecuaciones para distintos valores de Ω . Se observa una buena correlación entre los resultados donde, debido a que se impusieron condiciones iniciales nulas para la posición, velocidad y voltaje, la solución de menor amplitud es siempre alcanzada.

5.2. Influencia de la excitación y forzamiento

En la figura 5a el sistema es resuelto para distintos valores de amplitud de excitación (G) para estudiar su comportamiento. Como es de esperarse, el efecto de la no linealidad tiende a crecer a medida que G aumenta. Por otro lado, la figura 5b muestra como varía la respuesta para una excitación constante variando el valor de P . En este caso dos fenómenos se ponen en

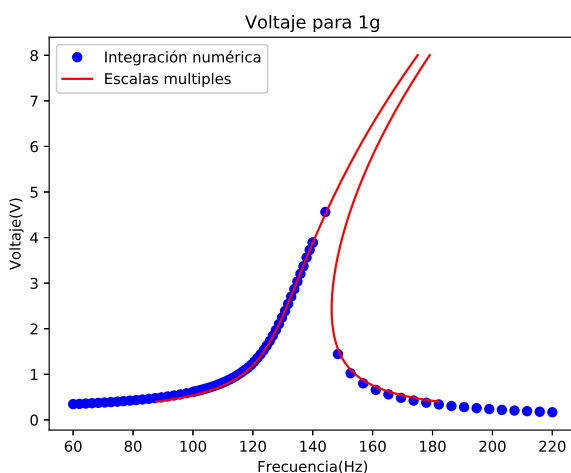
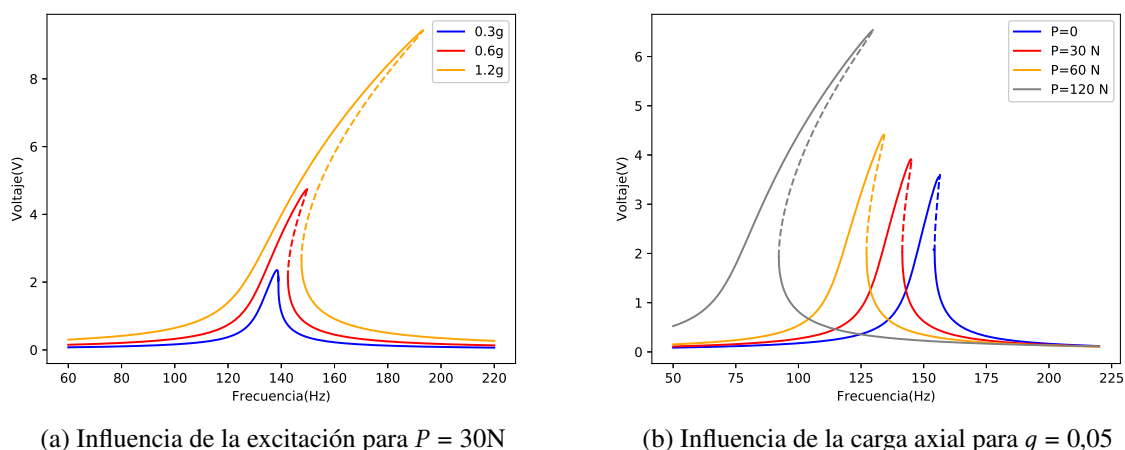


Figura 4: Respuesta en frecuencia para $g = 1$ y $P = 30\text{N}$



(a) Influencia de la excitación para $P = 30\text{N}$

(b) Influencia de la carga axial para $g = 0,05$

Figura 5

manifiesto: por un lado la no linealidad tiende a ser mayor al igual que en el caso anterior pero, a la vez, una disminución de la frecuencia natural es producida por el proceso de rigidización flexional.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo la influencia de una carga axial en la respuesta en frecuencia de una viga con un material piezoeléctrico fue presentada. En base a los resultados mostrados se puede concluir que:

- El método de escalas múltiples es una herramienta útil para la modelación de dispositivos piezoeléctricos no lineales.
- La capacidad de variar la frecuencia natural de un dispositivo tipo viga mediante la aplicación de una carga axial es posible, presentando no solo la posibilidad de sintonizar la frecuencia de excitación con la natural sino también aumentar el ancho de banda de funcionamiento del dispositivo.

7. FUTUROS ESTUDIOS

- Explorar otras fuentes de no linealidad como constitutivas y de amortiguamiento además de las geométricas.
- Análisis multimodal del sistema: estudio de resonancia secundaria e intercambio de energía entre modos (resonancia interna).
- Validación experimental del modelo.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Agencia Nacional de Promoción Científica y Técnica, Comisión de Investigaciones Científicas (CIC), Secretaria de Ciencia y Tecnología UTN FRBB y Secretaria de Ciencia y Tecnología UNS.

REFERENCIAS

- Abdelkefi A., Nayfeh A.H., y Hajj M.R. Global nonlinear distributed-parameter model of parametrically excited piezoelectric energy harvesters. *Nonlinear Dynamics*, 2012. ISSN 0924090X. doi:10.1007/s11071-011-0059-6.
- Anton S.R. y Sodano H.A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006). *Smart Materials and Structures*, 2007. ISSN 09641726. doi:10.1088/0964-1726/16/3/R01.
- Dai X., Wen Y., Li P., Yang J., y Zhang G. Modeling, characterization and fabrication of vibration energy harvester using Terfenol-D/PZT/Terfenol-D composite transducer. *Sensors and Actuators, A: Physical*, 2009. ISSN 09244247. doi:10.1016/j.sna.2009.10.002.
- Daqaq M.F., Masana R., Erturk A., y Dane Quinn D. On the Role of Nonlinearities in Vibratory Energy Harvesting: A Critical Review and Discussion. *Applied Mechanics Reviews*, 2014. ISSN 0003-6900. doi:10.1115/1.4026278.
- Erturk A. y Inman D.J. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008. ISSN 07393717. doi:10.1115/1.2890402.
- Erturk A. y Inman D.J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18(2):025009, 2009. ISSN 0964-1726. doi:10.1088/0964-1726/18/2/025009.
- F. G. Friedlander M.J. *Introduction to the Theory of Distributions*. 2nd edición, 1999.
- Fung Y.c. *A first course in continuum mechanics: for physical and biological engineers and scientists*. 1994.
- IEEE Standards. *IEEE Standard on Piezoelectricity*. 1988. doi:10.1109/IEEESTD.1988.79638.
- Leadenham S. y Erturk A. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation. *Nonlinear Dynamics*, 2014. ISSN 0924090X. doi:10.1007/s11071-014-1770-x.
- Mazzilli C.E., Sanches C.T., Baracho Neto O.G., Wiercigroch M., y Keber M. Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: Analytical and finite-element solutions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008. ISSN 00207462. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2008.04.004.
- Meirovitch L. *Methods of analytical dynamics*. 1970.

- Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. 1982. ISBN 0471310131. doi:10.1137/1024080.
- Nayfeh A.H. Some aspects of modal interactions in the response of beams. 2013. doi:10.2514/6.1987-777.
- Rao S.S. *Vibration of Continuous Systems*. 2007. ISBN 0471771716. doi:10.1002/9780470117866.
- Rossum G.v.C.v.W.e.I.C. Python tutorial. *Python*, 1995.
- Roundy S., Wright P.K., y Rabaey J. A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. 2003. doi:10.1016/S0140-3664(02)00248-7.
- Sebald G., Kuwano H., Guyomar D., y Ducharme B. Experimental Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, 2011. ISSN 1361665X. doi:10.1088/0964-1726/20/10/102001.
- Shaker F.J. Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams. *NASA Technical Note*, 1975.
- Shu Y.C. y Lien I.C. Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Materials and Structures*, 2006. ISSN 09641726. doi:10.1088/0964-1726/15/6/001.
- Smart-Materials. MFC Properties. ????
- Soliman M.S.M., Abdel-Rahman E.M., El-Saadany E.F., y Mansour R.R. A wideband vibration-based energy harvester. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2008. ISSN 09601317. doi:10.1088/0960-1317/18/11/115021.