

DESARROLLO DE UN ELEMENTO FINITO DE VIGA CON MATERIAL PIEZOELÉCTRICO PARA COSECHA DE ENERGÍA

DEVELOPMENT OF A FINITE ELEMENT BEAM MODEL FOR PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTING

Emmanuel Beltramo^{a,b}, José Enrique Stuardi^a y Sergio Preidikman^{a,b}

^a*Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. depestructuras@fcecyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

^b*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

Palabras clave: Elementos Finitos, Cosecha de Energía, No Linealidad Geométrica, Materiales Piezoeléctricos.

Resumen. En las últimas décadas el aprovechamiento de las vibraciones mecánicas para generar energía eléctrica ha sido un tema de investigación creciente. La motivación tiene su origen en la posibilidad de alimentar a pequeños dispositivos electrónicos a partir de la energía disponible en el medio ambiente. Las fuentes naturales se caracterizan por ser inagotables y resultan una alternativa viable a las baterías tradicionales que suelen ser bastante voluminosas, almacenan una cantidad finita de energía, tienen vida limitada y poseen productos químicos que pueden ser peligrosos. En este trabajo, se desarrollan las ecuaciones de movimiento de un elemento finito de viga tridimensional usando el principio de Hamilton generalizado. Se adopta un modelo viga de Rayleigh y se incorporan términos no lineales en el tensor de deformaciones para considerar el acoplamiento entre la carga axial y la flexión. El elemento incorpora dos láminas piezoeléctricas embebidas y dos resistencias eléctricas que se utilizan para disipar energía. Este elemento resulta útil para modelar cosechadores aeroelásticos de energía y se implementará en futuros trabajos para modelar estructuras alares multifuncionales. Adicionalmente se presentan las ecuaciones rectoras de un elemento finito con actuadores piezoeléctricos.

Keywords: Finite Elements, Energy Harvesting, Geometric Nonlinearity, Piezoelectric Materials.

Abstract. In recent decades the use of mechanical vibrations to generate electrical energy has been a subject of growing research in the field of engineering. The main idea is the possibility of feeding low-power devices from the energy available in the environment. Natural sources of energy are characterized by being inexhaustible, so they represent a better alternative to traditional batteries that store a finite amount of energy, are usually quite bulky and may contain dangerous chemical constituents. In this work, the equations of motion of a three-dimensional beam finite element are developed using Generalized Hamilton's Principle. A Rayleigh beam model is adopted, and non-linear terms are included in the strain tensor to consider the coupling between the axial load and bending. The element incorporates two embedded piezoelectric sheets and two electrical resistances that are used to dissipate energy. This element is useful for modeling aeroelastic energy harvesters and will be implemented in future work to model multifunctional wing structures. As a complement, the governing equations for a finite element with piezoelectric actuators are presented.

1 INTRODUCCIÓN

La cosecha de energía es el proceso por el cual la energía cinética, las vibraciones mecánicas o la energía de deformación son convertidas en energía eléctrica. En los últimos años, los dispositivos electrónicos sufrieron una reducción de tamaño y de consumo energético, lo que motivó tanto a los científicos como a la industria a investigar si es factible alimentarlos a partir de energía disponible en la naturaleza. Tradicionalmente, eran abastecidos a través de baterías electroquímicas, las cuales presentan ciertas desventajas. Entre ellas se destaca un costo de mantenimiento elevado puesto que deben sustituirse o recargarse con periodicidad; contienen productos químicos que pueden resultar dañinos, lo cual va en contra de la tendencia de energías limpias y son voluminosas (Rafique, 2018). Igualmente, los avances tecnológicos no fueron suficientes para satisfacer la necesidad de una mayor durabilidad. No obstante, las dificultades mencionadas pueden ser mitigadas utilizando fuentes de energía renovables autónomas (Yang et al., 2018).

En la literatura de cosecha de energía, la transducción se define como la transformación de las vibraciones mecánicas o de la energía de deformación en energía eléctrica aprovechable. Los transductores piezoeléctricos son ampliamente elegidos frente a otro tipo de transductores ya que poseen ciertas ventajas. Puede mencionarse su facilidad de aplicación, disponibilidad en diversas geometrías, alta densidad de potencia, entre otras. (Elvin and Erturk, 2013). La mayoría de los modelos expuestos en la literatura se representan a partir de una viga en voladizo con láminas piezoeléctricas que recubren la superficie superior y/o inferior de ella. Generalmente, la excitación proviene de un movimiento de base que simula el efecto vibratorio de la estructura sobre la cual se ubica. Sin embargo, en los últimos años se desarrollaron modelos matemáticos de diversa complejidad. Du Toit et al. (2005) expusieron un modelo de parámetro concentrado de un grado de libertad, en tanto Erturk e Inman (2008) clarificaron temas de modelado para este tipo de representación. También, se introdujeron modelos analíticos de viga de parámetro distribuido basados en la teoría de Euler-Bernoulli (Erturk and Inman, 2009) que han sido validados experimentalmente. Erturk (2012) y Sodano et al. (2004) determinaron soluciones aproximadas empleando el método de modos asumidos. Ambos estudiaron cosechadores en voladizo, pero el primero de ellos introdujo soluciones para la teoría de viga de Euler-Bernoulli, de Rayleigh y de Timoshenko, considerando en forma simultánea el efecto axial y flexional. De Marqui Junior et al. (2009) desarrolló un elemento finito de placa lineal, mientras que Tsushima y Su (2016) presentaron una formulación de viga altamente no lineal. Por otra parte, Beltramo et al. (2018) evaluaron aspectos estructurales de un cosechador y obtuvieron una expresión para determinar la resistencia que maximiza la cosecha.

Una de las aplicaciones de esta tecnología viene de la mano con el desarrollo de estructuras multifuncionales (Thomas, J. P. y Qidway, M. A., 2005). En la aeronáutica, resulta posible construir alas de gran alargamiento y extremadamente flexibles para aviones no tripulados que incluyan diversos subsistemas, entre ellos uno de cosecha y almacenaje de energía. Su finalidad consiste en alimentar a dispositivos electrónicos de baja potencia, como sensores y actuadores empleando como fuente energética del cosechador a las vibraciones generadas por ráfagas de viento o por inestabilidades de origen aeroelástico (Zhao and Yang, 2015).

En este trabajo se presenta la formulación de un elemento finito de viga tridimensional que reviste utilidad para modelar alas esbeltas con cosechadores integrados en su estructura y busca ser una alternativa que se ubique entre los tradicionales modelos lineales y los altamente no lineales. Se adopta la teoría de viga de Rayleigh (Han, S. M. and et al., 1999) y se introduce un término adicional en la componente axial de deformación que le da carácter no lineal. Las ecuaciones de movimiento se calculan a través del principio generalizado de Hamilton. Como complemento, se presentan las ecuaciones de movimiento de un elemento finito con actuadores

piezoeléctricos embebidos y para un elemento estructural puro. Finalmente, cabe mencionar que en otro esfuerzo presentado en esta reunión científica (Beltramo et al, 2019) se muestran una serie de resultados obtenidos con los elementos desarrollados.

2 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

2.1 Descripción del elemento

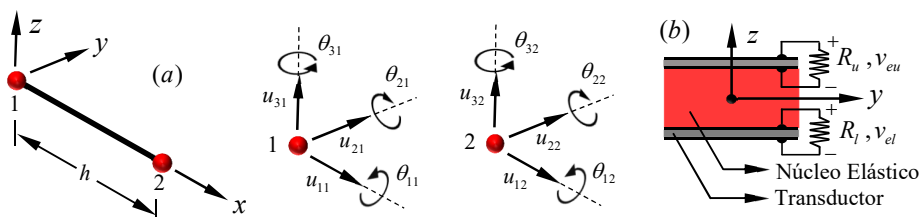


Figura 1. Elemento finito de viga: (a) grados de libertad nodales, (b) sección transversal.

En la Figura 1a se muestra un elemento finito de longitud h con dos nodos de seis grados de libertad en cada uno de ellos, tres traslaciones u_{jk} y tres giros θ_{jk} ($j = 1, 2, 3$ y $k = 1, 2$), asociados al sistema de referencia xyz . Éste tiene su origen en el primer nodo y su eje x es coincidente con el del elemento y atraviesa el centro de masa de la sección. En la Figura 1b se exhibe la sección transversal cuya geometría es arbitraria, pero se considera por simplicidad que los ejes yz son principales de inercia. El elemento se encuentra constituido por un sustrato elástico y dos láminas piezoeléctricas ubicadas simétricamente respecto de los ejes yz , las cuales pueden estar embebidas o adheridas a la cara superior e inferior del núcleo elástico. Existen dos coordenadas eléctricas generalizadas v_{ei} que representan el voltaje que se manifiesta entre cada uno de los pares de electrodos. Una práctica común en la literatura es incluir una carga resistiva en el dominio eléctrico para estimar la energía disipada. En este trabajo, se adoptan dos resistencias R_i por elemento tal como se indica en la Figura 1b. El subíndice i se empleará para referir al transductor superior ($i = u$) o inferior ($i = l$) según corresponda.

Una hipótesis adoptada en este modelo es asumir que los transductores y el núcleo elástico constituyen una estructura continua que satisfacen las suposiciones de la teoría de Rayleigh para flexión de vigas.

2.2 Ecuaciones constitutivas

2.2.1 Sustrato elástico

El núcleo del elemento está compuesto de un material elástico, isótropo y homogéneo. Las ecuaciones constitutivas adoptadas poseen un comportamiento lineal, por lo cual es válida la ley de Hooke y se expresa mediante,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ó} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 2G_b & 0 \\ 0 & 0 & 2G_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ es el vector tensión mecánica, $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$ el vector de deformaciones, \mathbf{D}_b el tensor de elasticidad, E_b el módulo de Young y G_b el módulo de elasticidad transversal.

2.2.2 Transductor piezoeléctrico

Los materiales piezoeléctricos forman parte de los denominados materiales inteligentes. Se caracterizan por generar un campo eléctrico al ser deformados o deformarse mecánicamente cuando son expuestos a la acción de un campo eléctrico externo. Estos fenómenos se conocen

como efecto piezoeléctrico directo e inverso respectivamente. Si los campos eléctricos y las deformaciones no adoptan magnitudes elevadas (Chopra y Sirohi, 2013), su comportamiento puede estudiarse por medio de relaciones constitutivas lineales, dadas por las ecs. (2).

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbb{E}_z ; D_z = \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^\sigma \mathbb{E}_z \quad (2)$$

Donde \mathbf{D}_c es el tensor de elasticidad, \mathbf{e} un vector que contiene parámetros electromecánicos, ε^σ es un parámetro electromecánico, D_z el desplazamiento eléctrico y \mathbb{E}_z el campo eléctrico. En las ecs. (3) se indican las componentes de las ecs. (2).

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_z/2(1+\nu_{zx}) & 0 \\ 0 & 0 & E_z/2(1+\nu_{zx}) \end{bmatrix} ; \mathbf{e} = [E_x d_{zx} \quad 0 \quad 0] ; \varepsilon^\sigma = -E_x d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma \quad (3)$$

E_x y E_z son el módulo de Young en las direcciones x y z , ν_{zx} el coeficiente de Poisson, d_{zx} el coeficiente piezoeléctrico y e_{zz}^σ la permitividad eléctrica.

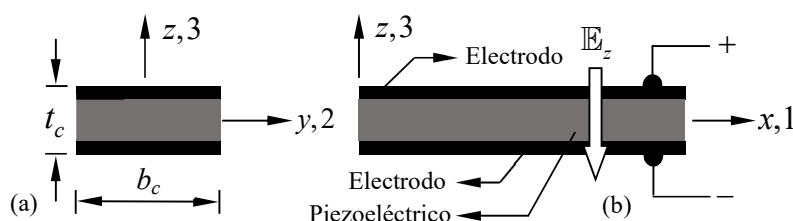


Figura 2. Transductor piezoeléctrico junto a su sistema de referencia (a) sección transversal, (b) vista longitudinal.

Los transductores piezoeléctricos se fabrican en grandes cantidades y en forma de cilindros, discos o láminas. En este trabajo, se emplean de tipo laminar como el que se exhibe en la Figura 2, donde xyz es el sistema de referencia local respecto del cual se expresan las ecs. (2) y, t_c y b_c denotan al ancho y al espesor de la lámina respectivamente. Se asume que sus electrodos tienen un espesor despreciable y son perfectamente conductores. Además, se puede notar que ellos constituyen un capacitor de placas paralelas con el piezoeléctrico actuando de dieléctrico.

Cuando el transductor se utiliza como sensor, la variable de entrada es una tensión mecánica y la de salida es un desplazamiento eléctrico, lo cual origina un campo eléctrico orientado según el eje z . La relación entre éste y el voltaje v_e entre los electrodos es $\mathbb{E}_z = -\partial v_e / \partial z$. El sentido que \mathbb{E}_z tiene en la Figura 2 obedece a un desplazamiento de cargas negativas con dirección al electrodo inferior, lo que produce que el electrodo superior se encuentre a un potencial mayor. En contraste, si el transductor se emplea como actuador, la variable de entrada es un campo eléctrico y la salida una deformación mecánica. Si el voltaje aplicado es tal que el electrodo superior se encuentre a un mayor potencial, el efecto resultante es un desplazamiento de cargas negativas hacia dicho electrodo. Por lo tanto, la relación entre la intensidad del campo y el voltaje aplicado viene dada por $\mathbb{E}_z = \partial v_e / \partial z$.

2.3 Aproximación del campo de desplazamientos y del campo de deformaciones

El campo de desplazamiento $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ se basa en la hipótesis fundamental que establece que la sección transversal permanece plana y perpendicular al eje del elemento cuando la viga se somete simultáneamente a esfuerzos axial, torsión y flexión. El desplazamiento de un punto arbitrario de la sección será función de las coordenadas x, y, z y del tiempo t y queda definido mediante la ec. (4). En ella, $u_k(x, t)$ denota a los desplazamientos de un punto ubicado sobre el

eje del elemento en las direcciones x, y, z respectivamente. $\theta_k(x, t)$ ($k = 1, 2, 3$) indica los giros de la sección alrededor de los ejes x, y, z respectivamente.

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} v_1(x, y, z, t) \\ v_2(x, y, z, t) \\ v_3(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -y\theta_3(x, t) + z\theta_2(x, t) \\ -z\theta_1(x, t) \\ y\theta_1(x, t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

El campo $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ se aproxima mediante un conjunto de funciones de forma que lo interpolan a partir de los grados de libertad nodales. Los polinomios cúbicos de Hermite H_k ($k = 1, 2, 3, 4$) se adoptan para los desplazamientos transversales, mientras que los polinomios de Lagrange de primer grado L_k ($k = 1, 2$) se emplean para el giro por torsión y para el desplazamiento axial. En consecuencia, el campo $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ se puede aproximar como,

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{H}\mathbf{q}_e \quad (5)$$

Donde \mathbf{H} es la matriz de interpolación constituida por las funciones de forma, sus derivadas y las variables x, y, z tal como se expresa en la ec. (6).

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2]$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} L_1 & -y \frac{\partial H_1}{\partial x} & -z \frac{\partial H_1}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial H_2}{\partial x} & -y \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ 0 & H_1 & 0 & -zL_1 & 0 & H_2 \\ 0 & 0 & H_1 & yL_1 & -H_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} L_2 & -y \frac{\partial H_3}{\partial x} & -z \frac{\partial H_3}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial H_4}{\partial x} & -y \frac{\partial H_4}{\partial x} \\ 0 & H_3 & 0 & -zL_2 & 0 & H_4 \\ 0 & 0 & H_3 & yL_2 & -H_4 & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{q}_e es un vector que contiene los grados de libertad geométricos nodales como indica la ec. (7).

$$\mathbf{q}_e = [u_{11} \quad u_{21} \quad u_{31} \quad \theta_{11} \quad \theta_{21} \quad \theta_{31} \quad u_{12} \quad u_{22} \quad u_{32} \quad \theta_{12} \quad \theta_{22} \quad \theta_{32}]^T \quad (7)$$

El campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t)$ se aproxima a partir de la ec. (5). Se considera el tensor lineal de Cauchy y se incorpora un término no lineal en la deformación axial para incluir la contribución de la carga axial en la flexión (Przemieniecki, J. S., 1968). Por lo tanto, resulta,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1(x, y, z, t) \\ v_2(x, y, z, t) \\ v_3(x, y, z, t) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left[\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} \right]^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

A partir de la ec. (5) se puede expresar a la ec. (8) de manera compacta como,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_L \mathbf{H} \mathbf{q}_e + \left[\mathbf{q}_e^T \left(S_{NL} \mathbf{H}_{u_2} S_{NL} \mathbf{H}_{u_2}^T + S_{NL} \mathbf{H}_{u_3} S_{NL} \mathbf{H}_{u_3}^T \right) \mathbf{q}_e \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_e^T \mathbf{B}_{NL} \mathbf{q}_e & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)\end{aligned}\quad (10)$$

Donde \mathbf{S}_L y \mathbf{S}_{NL} son operadores diferenciales que actúan sobre \mathbf{H} y \mathbf{H}_{ui} ($i=2, 3$) respectivamente. \mathbf{H}_{u2} y \mathbf{H}_{u3} denotan la representación vectorial de las funciones de forma que aproximan a los desplazamientos transversales del eje del elemento $u_2(x, t)$ y $u_3(x, t)$. \mathbf{B}_L es la matriz de interpolación de deformaciones lineal y \mathbf{B}_{NL} la matriz de interpolación de deformaciones no lineales. Las aproximaciones dadas por las ecs. (5) y (10) son utilizadas en la obtención de las ecuaciones de movimiento.

2.4 Ecuaciones de movimiento para un elemento finito con dos cosechadores de energía

El principio de Hamilton para sistemas electromecánicos adopta dos variantes en función de la coordenada eléctrica seleccionada. Según lo expuesto por Crandall et al. (1968), una alternativa es adoptar a las cargas eléctricas y la otra opción es utilizar a los flujos eléctricos, los cual están relacionados con el voltaje en los componentes eléctricos. No obstante, en el presente trabajo se emplean a estos últimos y el principio generalizado de Hamilton viene dado por,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_e + \overline{\delta W_{nc}}) dt = 0 \quad (11)$$

T es la coenergía cinética, V es la energía potencial elástica, W_e la coenergía eléctrica y $\overline{\delta W_{nc}}$ el trabajo efectuado por las fuerzas no conservativas. La coenergía cinética es,

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_e^T \int_{V_b} \mathbf{H}^T \rho_b \mathbf{H} dV_b \dot{\mathbf{q}}_e + \frac{1}{2} \sum_i \dot{\mathbf{q}}_e^T \int_{V_{ci}} \mathbf{H}^T \rho_c \mathbf{H} dV_{ci} \dot{\mathbf{q}}_e \quad (12)$$

donde V_b es el volumen del núcleo estructural de la sección, V_{ci} representa al volumen de la lámina superior o inferior según corresponda, ρ_b y ρ_c simbolizan a las densidades del núcleo elástico y del piezoeléctrico respectivamente y, el punto sobre \mathbf{q}_e indica derivación temporal. Note que la formulación presentada tiene en cuenta la inercia rotacional de la sección. La energía potencial elástica se expresa como,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} \int_{V_b} [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)]^T \mathbf{D}_b^* [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)] dV_b + \\ &+ \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_{ci}} [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)]^T \mathbf{D}_c^* [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)] dV_{ci} + \frac{1}{2} \int_{V_{ci}} [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)]^T \mathbf{e}^T \mathbb{E}_{z_i} dV_{ci} \right\} \quad (13)\end{aligned}$$

Los tensores de elasticidad \mathbf{D}_b^* y \mathbf{D}_c^* son los dados en las ecs. (1) y (3) pero con los términos de corte multiplicados por dos para facilitar la expresión de energía elástica. La coenergía eléctrica y el trabajo no conservativo vienen dados por,

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \int_{V_{ci}} \mathbb{E}_{z_i} \mathbf{e} [\mathbf{B}_L \mathbf{q}_e + \mathbf{B}_{NL}^* (\mathbf{q}_e)] dV_{ci} + \int_{V_{ci}} \mathbb{E}_{z_i} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{E}_{z_i} dV_{ci} \right\} \quad (14)$$

$$\overline{\delta W_{nc}} = \delta \mathbf{q}_e^T \int_0^h \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_d dx + \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_n + \sum_i q_i \delta v_{e_i} \quad (15)$$

\mathbf{Q}_d es un vector que contiene cargas distribuidas sobre el elemento, \mathbf{Q}_n un vector que contiene cargas externas nodales y q_i denota a la carga eléctrica almacenada sobre los electrodos del transductor correspondiente. Posteriormente se relacionará la resistencia R_i con el voltaje v_{ei} mediante la ley de Ohm.

$$\mathbf{Q}_d^T = [q_x(x) \quad q_y(x) \quad q_z(x)] \tag{16}$$

$$\mathbf{Q}_n^T = [F_{11} \quad F_{21} \quad F_{31} \quad M_{11} \quad M_{21} \quad M_{31} \quad F_{12} \quad F_{22} \quad F_{32} \quad M_{12} \quad M_{22} \quad M_{32}]$$

A partir de lo expuesto y reemplazando las ecs. (12) a (14) en la ec. (11) se obtiene el siguiente sistema acoplado electromecánicamente de ecuaciones de movimiento,

$$\begin{cases} \mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\mathbf{q}_e + (\boldsymbol{\theta}_{L_u} + \boldsymbol{\theta}_{NL_u})v_{e_u} + (\boldsymbol{\theta}_{L_l} + \boldsymbol{\theta}_{NL_l})v_{e_l} = \mathbf{f}(t) \\ -(\boldsymbol{\theta}_{L_u} + \boldsymbol{\theta}_{NL_u})^T \dot{\mathbf{q}}_e - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{NL_u}\mathbf{q}_e + C_u \dot{v}_{e_u} + R_u v_{e_u} = 0 \\ -(\boldsymbol{\theta}_{L_l} + \boldsymbol{\theta}_{NL_l})^T \dot{\mathbf{q}}_e - \dot{\boldsymbol{\theta}}_{NL_l}\mathbf{q}_e + C_l \dot{v}_{e_l} + R_l v_{e_l} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

\mathbf{m} (12×12) es la matriz de masa, \mathbf{k}_e (12×12) la matriz de rigidez elástica, \mathbf{k}_g (12×12) la matriz de rigidez geométrica, $\boldsymbol{\theta}_{L_i}$ (12×1) y $\boldsymbol{\theta}_{NL_i}$ (12×1) los vectores de acoplamiento lineal y no lineal respectivamente, $\mathbf{f}(t)$ (12×1) el vector de cargas, C_i y R_i la capacitancia y resistencia del i -ésimo circuito. Cada uno de estos términos se calculan mediante,

$$\mathbf{m} = \int_{V_b} \mathbf{H}^T \rho_b \mathbf{H} dV_b + \sum_i \int_{V_{c_i}} \mathbf{H}^T \rho_c \mathbf{H} dV_{c_i}$$

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_b} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_b^* \mathbf{B}_L dV_b + \sum_i \int_{V_{c_i}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_c^* \mathbf{B}_L dV_{c_i} ; \mathbf{k}_g = (N_b + N_{c_u} + N_{c_l}) \int_0^h \mathbf{B}_{NL} dx \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{L_i} = \frac{1}{t_{c_i}} \int_{V_{c_i}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{e}^T dV_{c_i} ; \boldsymbol{\theta}_{NL_i} = \frac{\mathbf{b}\mathbf{e}^T}{t_{c_i}} \int_{V_{c_i}} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{q}_e dV_{c_i} ; \mathbf{b} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^h \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_d dx + \mathbf{Q}_n ; C_i = \frac{\epsilon^\sigma}{t_{c_i}^2} \int_{V_{c_i}} dV_{c_i}$$

N_b y N_{c_i} denotan las fuerzas axiales sobre el núcleo elástico y sobre la lámina piezoeléctrica respectivamente. Es importante notar que la expresión utilizada para el cálculo de la matriz \mathbf{k}_g surge de desprestigiar derivadas de alto orden en la energía potencial elástica y asumir carga axial constante dentro del elemento. Tal como se observa, las matrices de masa y de rigidez reciben contribuciones del núcleo estructural y de los transductores. Por otro lado, el vector $\boldsymbol{\theta}_{L_i}$ posee términos axiales y flexionales. Ambos son función del módulo de elasticidad, del espesor del transductor y del coeficiente piezoeléctrico, pero el axial a su vez depende del área transversal y los flexionales de los momentos estáticos. Asimismo, el vector $\boldsymbol{\theta}_{NL_i}$ es un término geométrico que representa la contribución de la componente axial del acoplamiento lineal a la flexión.

El sistema de ecuaciones diferenciales de las ecs. (17) está constituido por doce ecuaciones estructurales acopladas con dos ecuaciones eléctricas, una de ellas asociada a la lámina superior y la otra a la inferior. Las ecuaciones eléctricas son propias de un circuito del tipo resistivo capacitivo con una fuente de corriente no lineal dada por el acoplamiento y dependiente del desplazamiento y de la velocidad de la estructura. Si bien en la literatura (Erturk and Inman, 2009; Erturk, 2012; Anton and Inman, 2012; Tsushima and Su, 2016) es común encontrar circuitos de este tipo, la fuente de corriente dependerá del modelo adoptado. Concretamente, su

origen viene dado a partir de las ecuaciones constitutivas del piezoeléctrico y del campo de deformaciones.

3 ANEXO

A partir del modelo presentado en la Figura 1 y de lo expuesto en la sección anterior se pueden calcular de manera sencilla las ecuaciones de movimiento para un elemento finito con dos actuadores piezoeléctricos (Figura 3a) y para un elemento estructural (Figura 3b). De este modo se dispone de tres tipos de elementos finitos que permiten modelar estructuras multifuncionales.

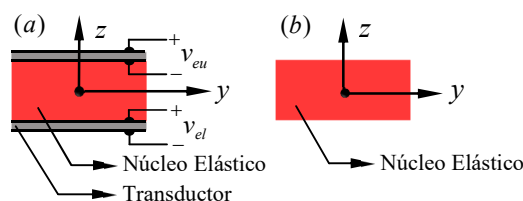


Figura 3. Elemento finito con dos actuadores piezoeléctricos (a) y (b) elemento finito estructural.

3.1 Ecuaciones de movimiento para un elemento finito con dos actuadores piezoeléctricos

La diferencia sustancial entre este elemento y el desarrollado en la sección anterior radica en que el voltaje deja de ser una coordenada generalizada para transformarse en una variable de entrada. Por esta razón cambia la relación entre el campo eléctrico y el voltaje según se indica en 2.2.2. Las expresiones de T , V y W_e dadas por las ecs. (12), (13) y (14) resultan válidas, pero debe eliminarse la disipación eléctrica en la expresión de δW_{nc} . En virtud de ello, las ecuaciones de movimiento resultan,

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g - \mathbf{k}_a^u - \mathbf{k}_a^l)\mathbf{q}_e = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_a^u(t) + \mathbf{f}_a^l(t) \quad (19)$$

Las matrices de masa \mathbf{m} , de rigidez elástica \mathbf{k}_e , de rigidez geométrica \mathbf{k}_g y el vector de cargas $\mathbf{f}(t)$ se calculan utilizando las ecs. (18). La presencia de los actuadores se exterioriza mediante la aparición de un sistema de cargas (fuerzas y momentos) $\mathbf{f}_a^u(t)$ (12×1) y $\mathbf{f}_a^l(t)$ (12×1) y en matrices geométricas \mathbf{k}_a^u (12×12) y \mathbf{k}_a^l (12×12) asociadas a cada lámina. Sus expresiones se calculan mediante,

$$\mathbf{f}_a^i(t) = \frac{v_{e_i}}{t_{c_i}} \int_{V_{c_i}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{e}^T dV_{c_i} \quad ; \quad \mathbf{k}_a^i = \frac{\mathbf{b}\mathbf{e}^T}{t_{c_i}} v_{e_i} \int_{V_{c_i}} \mathbf{B}_{NL} dV_{c_i} \quad (20)$$

Nótese que existe una relación directa entre el sistema de cargas $\mathbf{f}_a^i(t)$ y el vector acoplamiento lineal $\boldsymbol{\theta}_{Li}$ y, entre la matriz de rigidez geométrica del actuador \mathbf{k}_a^i y el acoplamiento no lineal $\boldsymbol{\theta}_{NLi}$. Esto se debe a que se originan de los mismos términos en la formulación Hamiltoniana. Finalmente es importante destacar que este elemento permite evaluar la influencia que tienen los actuadores piezoeléctricos en la carga crítica de pandeo de una estructura, ya que a través de su matriz geométrica generan incrementos o decrementos en la rigidez según el signo del voltaje aplicado entre los electrodos.

3.2 Ecuaciones de movimiento para un elemento finito puramente estructural

Las ecuaciones rectoras para este elemento pueden obtenerse directamente de las ecs. (17) o (19) eliminando los términos asociados a los cosechadores y/o actuadores según corresponda. De ello se obtiene,

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\mathbf{q}_e = \mathbf{f}(t) \quad (21)$$

La matriz de masa \mathbf{m} y las matrices de rigidez \mathbf{k}_e y \mathbf{k}_g se calculan a partir de las ecs. (18).

4 CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrollaron las ecuaciones de movimiento de un elemento finito de viga tridimensional formado por un núcleo elástico y dos transductores piezoeléctricos laminares embebidos para modelar cosechadores de energía. El elemento posee dos circuitos eléctricos independientes con una resistencia eléctrica en cada uno de ellos utilizada para disipar energía. Se incorporó, a través de la componente axial del tensor de deformación, una no linealidad de origen geométrico que, por un lado, produce un acoplamiento electromecánico no lineal entre las ecuaciones estructurales y eléctricas. Y, por otro lado, da origen a la matriz de rigidez geométrica que es función de la carga axial del elemento y permite evaluar la estabilidad del equilibrio de la estructura. El objetivo es posicionar a este elemento como una alternativa viable entre los tradicionales modelos lineales y los altamente no lineales.

Como complemento se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para un elemento finito de características idénticas al anterior, pero con los transductores trabajando como actuadores. La única diferencia entre ambos está en el voltaje, en uno es una coordenada generalizada y en el otro una variable de entrada. Además, se presentaron las ecuaciones rectoras para un elemento estructural, las cuales surgen de eliminar los términos eléctricos de las anteriores. En síntesis, los tres elementos finitos expuestos permiten modelar estructuras multifuncionales que integren cosechadores de energía y actuadores piezoeléctricos. Actualmente, se está trabajando en la implementación computacional de los tres elementos.

REFERENCIAS

- Anton, S. y Inman, D., Multifunctional Unmanned Aerial Vehicle Wing Spar for Low-Power Generation and Storage, *Journal of Aircraft*, 49: 292-301, 2012.
- Beltramo, E., Stuardi, J. E., Preidikman, S., Análisis paramétrico de un cosechador aeroelástico de energía: aspectos estructurales, *Mecánica Computacional*, XXXVI: 1879-1888, 2018.
- Beltramo, E., Stuardi, J. E. y Preidikman, S., Modelado de una estructura multifuncional mediante elementos finitos de viga. *Mecánica Computacional*, XXXVII, Aceptado para su publicación, 2019.
- Chopra, I. y Sirohi, J., *Smart Structures Theory*, Cambridge University Press, 2013.
- Crandall, S., Karnopp, D., Kurtz Jr, E. y Pridmore-Brown, D., *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, McGraw-Hill, 1968.
- De Marqui Junior, C., Erturk, A. y Inman, D., An electromechanical finite element model for Piezoelectric energy harvester plates. *Journal of Sound and Vibration*, 327: 9-25, 2009.
- Du Toit, N., Wardle, B. y Kim, S., Design considerations for MEMS-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters, *Integrated Ferroelectrics*, 71: 121-160, 2005.
- Elvin, N. y Erturk, A., *Advances in Energy Harvesting Methods*, Springer, 2013.
- Erturk, A. y Inman, D., Issues in mathematical modeling of Piezoelectric energy harvesters, *Journal of Smart Materials and Structures*, 17: 14 pp., 2008.
- Erturk, A y Inman, D., An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations, *Journal of Smart Materials and Structures*, 18: 18 pp., 2009.
- Erturk, A., Assumed-modes modeling of piezoelectric energy harvesters: Euler-Bernoulli, Rayleigh, and Timoshenko models with axial deformations, *Journal of Computers and Structures*, 106-107: 214-227, 2012.

- Han, S., Benaroya, H., Wei, T., Dynamics of transversely vibrating Beams using four engineering theories, *Journal of Sound and Vibrations*, 225: 935-988, 1999.
- Przemieniecki, J., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
- Rafique, S., *Piezoelectric Vibration Energy Harvesting*, Springer, 2018.
- Sodano, H., Park, G., Inman, D., Estimation of Electric Charge Output for Piezoelectric Energy Harvesting, *Blackwell Publishing*, 40: 49-58, 2004.
- Thomas, J. y Qidway, M., The Design and Application of Multifunctional Structure-Battery Materials Systems, *Journal of The Minerals, Metals and Materials Society*, 71: 1543-1851, 2005.
- Tsushima, N y Su, W., Modeling of highly flexibile multifunctional wings for energy harvesting. *Journal of Aircraft*, 53: 1033-1044, 2016.
- Yang, Z., Zhou, S., Zu, J., y Inman, D., High-Performance Piezoelectric Energy Harvesters and Their Applications, *Joule*, 2: 1-56, 2018.
- Zhao, L., Yang, Y., Enhanced aeroelastic energy harvesting with a beam stiffener, *Journal of Smart Materials and Structures*, 24: 11 pp, 2015.