

APLICACIÓN DE UN MODELO CON ASIGNACIÓN ALEATORIA DE PROPIEDADES MECÁNICAS A DISTINTOS PROBLEMAS DE FISURACIÓN EN ELEMENTOS DE HORMIGÓN

APPLICATION OF A RANDOM MECHANICAL PROPERTIES ASSIGNATION MODEL TO CRACKING PROBLEMS IN CONCRETE ELEMENTS

M. Paula Zappitelli, E. Ignacio Villa y Claudio Rocco

Departamento de Construcciones, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata. Calle 48 y 115 s/n, (B1900TAG) La Plata, Buenos Aires, República Argentina.

Palabras clave: Asignación aleatoria de propiedades mecánicas, contracción térmica, ensayo de tracción directa.

Resumen. En trabajos anteriores se presentó un algoritmo desarrollado en MATLAB, basado en números aleatorios, que permite considerar la heterogeneidad presente en el hormigón mediante la asignación aleatoria de las propiedades mecánicas del material de acuerdo con una distribución probabilística. El interés en el desarrollo del mencionado algoritmo consiste en que al querer analizar numéricamente el proceso de fisuración de un elemento estructural con un estado tensional uniforme no es posible localizar la aparición de fisuras. En el presente trabajo se propone estudiar el proceso de fisuración por contracción térmica en una base de fundación de grandes dimensiones y en una viga de hormigón, y el proceso de fisuración en un ensayo de tracción directa. Como modelo constitutivo se empleó un modelo de plasticidad con daño disponible en el código de análisis por el método de elementos finitos Abaqus/standard. En los resultados obtenidos se observa como la presencia de propiedades aleatorias permite localizar fisuras en distintas zonas y medir su tiempo de aparición, a pesar de que los elementos analizados se encuentran inicialmente intactos.

Keywords: random mechanical properties assignation, thermal shrinkage, direct tensile test.

Abstract. In previos papers a random numbers algorithm developed in MATLAB which considers concrete heterogeneity was presented. This algorithm assings mechanical material properties randomly according to a probabilistic distribution. The importance of the development is related to the fact that it is not possible to localice cracks in a numerical analysis of structural elements under uniform stress states. This paper studies thermal shrinkage in a great size concrete foundation basement and in a concrete beam and a direct tensile test. A plasticity and damage based model available in the finite element analysis code Abaqus/standard was used as constitutive model. The results obtained show that the random properties allow to localice cracks in different areas and measure cracking time although the structural elements are in the beinnig intact.

1. INTRODUCCIÓN

En el caso de estructuras inicialmente intactas y sometidas a un estado tensional homogéneo, puede considerarse la heterogeneidad presente en el hormigón, como un criterio para determinar zonas de fisuración preferentes. Esta heterogeneidad se evidencia ya que ensayos mecánicos en muestras de hormigón nominalmente idénticas presentarán variaciones en los valores de las propiedades obtenidas para cada una de dichas muestras, [Mindess et al. \(2003\)](#). Por este motivo la resistencia del hormigón puede representarse mediante diferentes funciones de distribución de probabilidad, como por ejemplo la distribución de Weibull, [Tumidajski et al. \(2006\)](#) o la distribución Gaussiana, [van Mier \(1997\)](#).

Existen dos enfoques para tener en cuenta la heterogeneidad del hormigón en los modelos numéricos. El primero de ellos se denomina enfoque directo, [Yang et al. \(2009\)](#), y consiste en modelar todas las fases del hormigón a nivel de meso escala (matriz de cemento, agregados e interfaces), asignando a cada una de ellas sus correspondientes propiedades mecánicas. El otro enfoque se denomina enfoque indirecto, [Yang et al. \(2009\)](#), y considera la variación en el dominio analizado de las propiedades mecánicas del material, tales como la resistencia a la tracción y compresión. Lo cual puede modelarse en el marco del método de los elementos finitos estocásticos (SFEM), [Stefanou \(2009\)](#), o considerando otros métodos.

En este trabajo se presentan aplicaciones del algoritmo desarrollado por los autores en Matlab que permite tener en cuenta la aleatoriedad existente en las propiedades mecánicas del hormigón. Esto puede considerarse como un criterio de localización para el estudio de fisuración en estructuras inicialmente intactas. Las aplicaciones incluyen el estudio del proceso de fisuración en un ensayo de tracción directa en hormigón y el proceso de fisuración debido a contracción térmica en una base de fundación de grandes dimensiones y en una viga de hormigón sometida a gradientes de temperatura.

2. ASIGNACIÓN ALEATORIA DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

En general en los modelos numéricos se utiliza la resistencia media a tracción o compresión en lugar de una distribución probabilística de las mismas. Además en problemas de fractura en hormigón, con propiedades mecánicas y estados tensionales uniformes, no es posible localizar fisuras empleando un modelo continuo.

En este contexto se ha desarrollado un algoritmo, el cual fue implementado en Matlab, que permite asignar a diferentes regiones del modelo numérico diferentes valores de la resistencia a tracción o compresión del material y del módulo de elasticidad, de acuerdo con una distribución como la de Weibull. El algoritmo emplea como criterio la heterogeneidad del hormigón, para determinar zonas de fisuración preferentes en estructuras inicialmente intactas y sometidas a un estado tensional homogéneo. Esta asignación se realiza definiendo dos mallas, una denominada malla de material y otra denominada malla convencional de elementos finitos. Esta última es la obtenida a partir de cualquier código de elementos finitos, por ejemplo Abaqus.

El algoritmo desarrollado en Matlab permite agrupar los elementos de la malla de elementos finitos en la cercanía de los nodos de la malla de material, con el objetivo de definir zonas a las cuales se asignarán diferentes valores de la resistencia a la tracción de acuerdo con la distribución de Weibull empleando números aleatorios. El usuario puede realizar distintos sorteos de números aleatorios y obtener para cada uno de ellos configuraciones no uniformes de la resistencia a tracción o compresión en la estructura para una dada distribución de probabilidad.

En la Figura 1 se observa a la izquierda la malla de elementos finitos convencional para distintas geometrías y a la derecha la malla de material. La separación nodal en la malla de

material queda determinada considerando 3 veces el tamaño máximo del agregado, Bažant y Pang (2007).

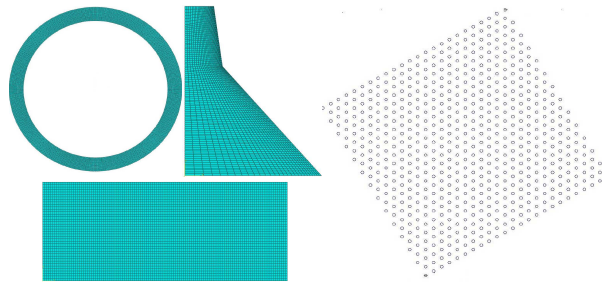


Figura 1: Malla de elementos finitos convencional (izq.), malla de material (der.)

En la Figura 2 se observan cuatro configuraciones de distribución de resistencia en el plano obtenidas con el algoritmo desarrollado para una geometría rectangular.

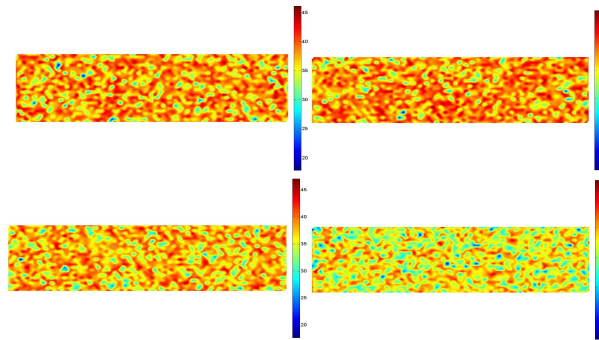


Figura 2: Configuraciones de distribución de resistencia en el plano para una geometría rectangular, obtenidas a partir de la aplicación del algoritmo desarrollado

El objetivo de realizar esta asignación aleatoria de las propiedades del material utilizando una distribución probabilística de la resistencia, es definir un criterio que permita localizar la aparición de una fisura en una estructura inicialmente intacta, es decir, sin ningún tipo de fisura o entalla que defina una zona de debilidad preferente. Esto también permite realizar un análisis más realista, ya que en general en las simulaciones convencionales empleando elementos finitos se utilizan propiedades uniformes en toda la geometría. Además al resolver el mismo problema empleando diferentes configuraciones no uniformes de resistencia se puede llevar a cabo un análisis estadístico de los resultados.

3. MODELO CONSTITUTIVO

Se utilizó un modelo de plasticidad con daño disponible en el código de análisis por el método de los elementos finitos Abaqus/standar denominado Concrete Damaged Plasticity (CDP). Este modelo considera la existencia de dos mecanismos de rotura: fisuración cuando el hormigón se encuentra sometido a tensiones de tracción y aplastamiento cuando se encuentra bajo la acción de tensiones de compresión. La evolución de la superficie de fluencia está controlada por dos variables de endurecimiento, $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ y $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$, las cuales se encuentran vinculadas a los mecanismos de falla bajo cargas de tracción y compresión respectivamente. Las variables $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ y $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$ se definen como deformaciones plásticas equivalentes en tracción y compresión, ABAQUS (2013).

Este modelo considera que la respuesta uniaxial del hormigón en tracción y compresión se encuentra caracterizada por el daño en la zona de comportamiento plástico del material. La respuesta tensión-deformación bajo cargas uniaxiales sigue una relación elástica lineal hasta alcanzar el valor de la tensión de rotura (σ_{t0}), la cual se corresponde con el inicio de la microfisuración en el hormigón. Superada la tensión de rotura, la formación de microfisuras se representa macroscópicamente a través de un ablandamiento en la respuesta tensión-deformación, el mismo induce la localización de las deformaciones en la estructura del hormigón. Bajo la acción de compresión uniaxial la respuesta es de tipo lineal hasta que se alcanza la tensión de fluencia inicial (σ_{c0}). En régimen plástico la respuesta se encuentra caracterizada por un endurecimiento de las tensiones seguido por un ablandamiento en las deformaciones luego de superada la tensión última (σ_{cu}), [ABAQUS \(2013\)](#).

4. MODELO NUMÉRICO

4.1. Generalidades

Con el objetivo de ejemplificar la aplicación del algoritmo desarrollado se estudió el proceso de fisuración en tres problemas: un ensayo de tracción directa y una base de fundación y una viga sometidas a contracción térmica, en el caso de la viga debido a gradientes de temperatura. En la Tabla 1 se indican las propiedades mecánicas del hormigón considerado.

Propiedades Mecánicas del hormigón	
f_{c28}	38 MPa
f_{ct28}	2.9 MPa
E_{28}	34000 MPa
α	$1e-5 \frac{1}{^{\circ}C}$
ν	0.2
δ	$2.45e-5 Kg/m^3$
w_c	0.0655 mm
K	0.67

Tabla 1: Propiedades mecánicas del hormigón considerado

En cuanto a los parámetros de la distribución de Weibull se utilizó un coeficiente de forma igual a 12 y un parámetro de escala igual a 39.46 MPa, [Bažant y Planas \(1998\)](#).

En el problema analizado las fisuras se originan exclusivamente por tensiones de tracción, por lo que se consideró que en compresión el material se comporta en régimen elástico. Para el comportamiento en tracción se adoptó una ley tensión-desplazamiento de tipo lineal. Además el modelo CDP requiere la adopción de una ley daño-desplazamiento, que en este trabajo se consideró de tipo lineal.

4.2. Ensayo de tracción directa en hormigón

Se simuló un ensayo de tracción directa sobre una probeta de hormigón simple de 10x20x50cm a la que se le aplicó un desplazamiento de 2mm en sus extremos. Para la simulación del ensayo se utilizaron propiedades mecánicas uniformes y distribuidas aleatoriamente. En este último caso fueron simuladas 15 configuraciones de distribución de propiedades en el plano. En cada uno de los casos analizados se determinó la carga de rotura y los patrones de fisuración.

4.3. Base de fundación sometida a contracción térmica

La geometría analizada consiste en un bloque rectangular empotrado de 6m de largo y 2m de alto, el estado de cargas corresponde a una variación de temperatura igual a $-40^{\circ}C$, la cual

representa una contracción térmica. El análisis se realizó en dos dimensiones con una duración de 5 días. Para mejorar las condiciones de convergencia se adoptó un factor de amortiguamiento igual a $2E^{-8}$, por lo que se verificó que la disipación de energía viscosa fuera menor al 10 % de la energía interna del modelo, [ABAQUS \(2013\)](#).

La base se simuló numéricamente empleando un mallado cuadrado con dos tamaños de elementos distintos, 50mm y 100mm, y con propiedades mecánicas uniformes y distribuidas aleatoriamente, en este último caso considerando 10 configuraciones de distribución de propiedades en el plano. Se utilizaron dos tamaños de elementos con el objetivo de analizar el efecto de la aplicación del algoritmo en el tamaño de malla. En cada uno de los casos analizados se determinó la edad de fisuración.

4.4. Viga de hormigón sometida a contracción térmica debido a gradientes de temperatura

Para analizar numéricamente un problema de contracción térmica en el cual las fisuras se generan como resultado de gradientes de masa y de superficie, son necesarios dos tipos de análisis. En primer lugar se debe llevar a cabo un análisis térmico para obtener la evolución de la temperatura en el tiempo en toda la estructura analizada. Luego estas temperaturas constituyen el estado de carga del análisis mecánico, a partir del cual se determinan los niveles tensionales y el tiempo de aparición de cada una de las fisuras.

La geometría analizada consistió en una viga de hormigón simple de 2.5m de largo, 0.5m de alto y 0.2m de ancho. Como condición de contorno para el análisis térmico se consideró la convección entre el hormigón y el aire, adoptando un coeficiente de convección igual a $1,6 * 10^{-9} \text{ Kcal/mmseg}^{\circ}\text{C}$. La temperatura ambiente se consideró constante e igual a 15°C y la temperatura de colocación del hormigón igual a 30°C .

Para el análisis mecánico se empleó el mismo mallado que para el análisis térmico y como condición de contorno se aplicaron empotramientos en los extremos de la viga. En todos los casos la duración de ambos análisis fue de 28 días.

La viga se simuló numéricamente empleando propiedades mecánicas uniformes y distribuidas aleatoriamente, en este último caso considerando 10 configuraciones de distribución de propiedades en el plano. En cada uno de los casos analizados se determinó la edad y los patrones de fisuración.

5. RESULTADOS

5.1. Ensayo de tracción directa en hormigón

Para el caso de la probeta con propiedades mecánicas uniformes, la carga de rotura fue de 57.90 KN, correspondiente a una resistencia de 2.89 MPa. En la Tabla 2 se presenta la carga de rotura y la tensión correspondiente para cada uno de los casos analizados con distribución aleatoria de las propiedades del material. La tensión se determina como el cociente entre la carga de rotura y la sección transversal de la probeta. A partir de los resultados que se muestran en la Tabla 2 puede observarse que la desviación obtenida en la resistencia a tracción como resultado de la simulación numérica del ensayo de tracción directa es muy baja, correspondiente al 2.93 %. Este valor se encuentra dentro de los límites establecidos por los reglamentos para considerar válido un ensayo de laboratorio, [ACI \(2011, 2014\)](#). Por este motivo puede verificarse que los parámetros adoptados para la curva de distribución de Weibull utilizada al asignar aleatoriamente las propiedades mecánicas del hormigón son correctos.

En la Figura 3 se muestra los resultados del ensayo de tracción directa. La curva corres-

Caso	Carga de rotura [kN]	Resistencia a la tracción [MPa]
1	50.76	2.54
2	49.83	2.49
3	48.73	2.44
4	48.70	2.43
5	48.84	2.44
6	50.59	2.53
7	51.11	2.56
8	52.01	2.60
9	50.97	2.55
10	49.12	2.46
11	48.98	2.45
12	51.65	2.58
13	49.72	2.49
14	52.94	2.65
15	52.94	2.65
Promedio	50.46	2.52
Desviación	1.48	0.07

Tabla 2: Carga de rotura y resistencia a tracción para el ensayo de tracción directa obtenidas aplicando distribución aleatoria de las propiedades mecánicas

pendiente a las propiedades mecánicas homogéneas difiere de la obtenida en un ensayo real, a diferencia de lo que ocurre al asignar aleatoriamente las propiedades mecánicas. Esto es de suma importancia, ya que si no se asignaran las propiedades mecánicas en forma aleatoria los resultados obtenidos a partir de la simulación numérica del ensayo no serían correctos aplicando el modelo de plasticidad con daño.

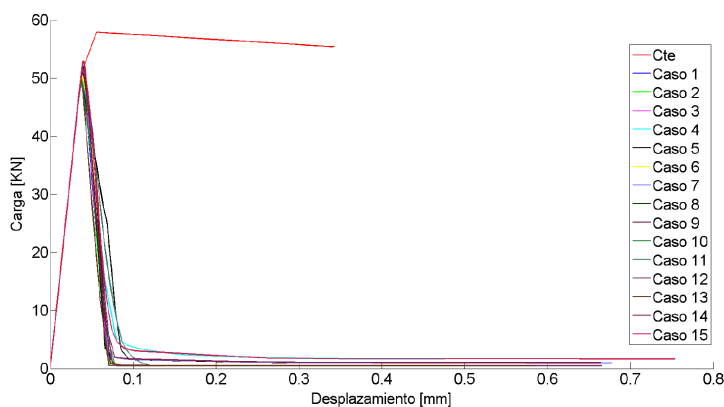


Figura 3: Curva carga-desplazamiento del ensayo de tracción directa para cada uno de los casos analizados

Finalmente en las Figuras 4 y 5 se presentan las zonas dañadas obtenidas al considerar distribución uniforme de las propiedades mecánicas del material y distribución aleatoria de las mismas, respectivamente. En el caso de distribución aleatoria de las propiedades se presentan 5 de los 15 casos analizados.

En la Figura 4 pueden observarse dos zonas dañadas simétricas cercanas a los apoyos debido a la utilización de distribución uniforme de las propiedades mecánicas, esto no es representativo del comportamiento observado en un ensayo de laboratorio. Por otro lado en la Figura 5 se observa que en cada uno de los casos analizados existe una única zona dañada ubicada en distintas posiciones a lo largo de la probeta, lo cual es más representativo de lo que ocurre en un ensayo de laboratorio.

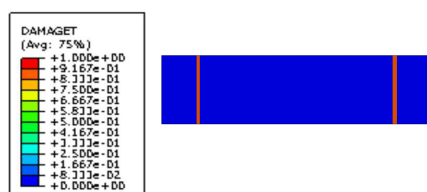


Figura 4: Zonas dañadas correspondientes a la probeta de 10x20x50cm simulada considerando distribución uniforme de las propiedades mecánicas

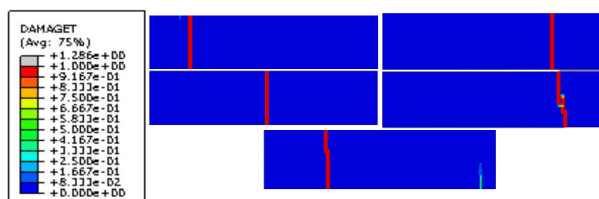


Figura 5: Zonas dañadas correspondientes a la probeta de 10x20x50cm simulada considerando distribución aleatoria de las propiedades mecánicas para 5 de los 15 casos simulados

5.2. Base de fundación sometida a contracción térmica

Para determinar la edad de fisuración se obtuvo la deformación plástica equivalente en tracción, de acuerdo con establecido por Lubliner et al. (1989).

El tiempo de aparición de la fisura para el mallado de elementos cuadrados de 50mm de lado es de 32.16 horas. En el caso de una malla de elementos cuadrados de 100mm, la edad de aparición de la fisura es 42.24 horas. La diferencia entre los resultados obtenidos utilizando la malla fina y la gruesa es de 23.86 %.

En las Tablas 3 y 4 se muestran las edades de fisuración para las mismas mallas que fueron analizadas considerando distribución uniforme de las propiedades del material, pero en este caso considerando distribución aleatoria, para 10 configuraciones diferentes de distribución de resistencia en el plano. A su vez también se indica el valor medio. A partir de las tablas 3

Caso	Edad de fisuración [horas]					
	Fisura 1	Fisura 2	Fisura 3	Fisura 4	Fisura 5	Fisura 6
1	28.8	34.8	61.68	103.68	-	-
2	25.2	27.12	77.52	79.44	-	-
3	30	52.32	58.32	75.12	83.04	-
4	27.6	32.88	33.84	88.8	-	-
5	30.24	35.52	49.92	54.48	92.4	-
6	24.24	35.28	54.24	63.36	91.44	-
7	28.08	34.8	49.92	61.92	92.88	-
8	28.56	29.28	42.48	61.44	89.76	101.76
9	27.84	42	46.32	90.48	-	-
10	30.24	36.72	54.96	93.6	-	-
Promedio	28.08	36.07	52.92	77.23	89.90	101.76

Tabla 3: Edad de fisuración para al base con distribución de propiedades mecánicas aleatoria para una malla cuadrada con elementos de 50mm de lado

y 4, puede observarse que la edad de fisuración obtenida utilizando una malla con elementos cuadrados de 50mm presenta una diferencia en comparación con la malla de elementos cuadrados de 100mm de 3.62 % para la primera fisura, 15.90 % para la segunda fisura y 14.10 % para la tercera fisura. Estos porcentajes son menores que los obtenidos utilizando propiedades mecánicas uniformes.

Caso	Edad de fisuración [horas]				
	Fisura 1	Fisura 2	Fisura 3	Fisura 4	Fisura 5
1	30.48	31.44	85.44	112.8	-
2	29.76	47.04	48	66.72	75.6
3	28.08	42.48	53.52	105.6	-
4	32.16	53.04	82.56	104.4	119.28
5	28.08	40.32	54.96	85.2	91.2
6	29.28	30	78.72	116.64	-
7	28.08	47.76	50.64	-	-
8	31.2	48.24	56.16	89.28	110.88
9	28.08	32.40	43.68	69.36	104.4
10	26.16	45.36	50.16	74.16	-
Promedio	29.14	41.81	60.38	91.57	100.27

Tabla 4: Edad de fisuración para la base con distribución de propiedades mecánicas aleatoria para una malla cuadrada con elementos de 100mm de lado

Es importante mencionar que al aplicar el modelo de plasticidad con daño CDP a estructuras sin armadura o con poca armadura, la especificación de una relación tensión-deformación luego de la falla introduce sensibilidad de malla en los resultados, ya que dichos resultados no convergen a una solución única a medida que la malla se refina debido a que este refinamiento conduce a bandas de fisuración más estrechas. Esto ocurre si la fisuración tiene lugar solo en regiones localizadas de la estructura y el refinamiento de la malla no resulta en la formación de fisuras adicionales. Si la fisuración se distribuye uniformemente, debido a la presencia de armaduras, la sensibilidad de malla es menos preocupante, [ABAQUS \(2013\)](#). Para resolver este problema [ABAQUS \(2013\)](#) propone caracterizar el comportamiento en tracción del hormigón mediante una respuesta tensión-desplazamiento en el caso de estructuras de hormigón sin armar.

Sin embargo en la base analizada con mallado cuadrado a pesar de haber utilizado una curva tensión-desplazamiento se observa dependencia del tamaño de malla con los resultados, pero al considerar propiedades mecánicas distribuidas aleatoriamente esa dependencia no tiene lugar. La razón de este comportamiento puede estar relacionado con que la aleatoriedad permite una localización más uniforme de las fisuras en la estructura.

5.3. Viga de hormigón sometida a contracción térmica debido a gradientes de temperatura

Se simuló una viga con propiedades mecánicas uniformes y diez vigas considerando propiedades mecánicas distribuidas aleatoriamente.

La viga con propiedades mecánicas uniformes presenta fisuras a la edad de 3.95 días, ya que a esa edad las tensiones principales desarrolladas superan el valor medio de la resistencia a tracción, el cual se encuentra asignado a toda la estructura. Sin embargo al observar la zona dañada en este caso, Figura 6, la misma se encuentra cercana a los bordes, donde se presenta una fuerte restricción por efecto de la condición de contorno, y en forma simétrica, lo cual se relaciona con la distribución uniforme de la propiedades mecánicas.

En los casos simulados con propiedades mecánicas distribuidas aleatoriamente se presentan fisuras a distintas edades, como se observa en la Tabla 5. Esto ocurre porque se presentan zonas que alcanzan el criterio de inicio de daño de tensiones principales máximas antes que otras ya que debido al carácter aleatorio que le imprime el algoritmo a la asignación de resistencias a las distintas zonas de la estructura, en cada caso varían en el plano de la geometría las zonas con un determinado valor de resistencia a tracción. Esto da lugar a distintas edades de fisuración para cada uno de los casos analizados.

En la Figura 7 se observan las zonas dañadas para 5 de las 10 vigas simuladas con distribu-

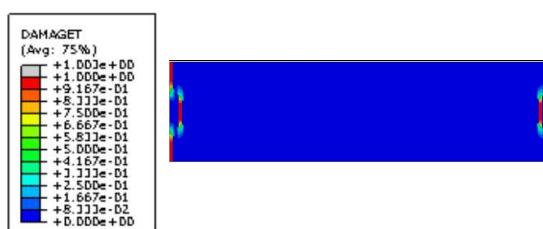


Figura 6: Variable de daño para la viga de 0.2x0.5x2.5m biempotrada simulada con propiedades mecánicas uniformes

Caso	Edad de fisuración [días]
1	3.60
2	3.25
3	3.59
4	3.34
5	2.93
6	3.51
7	3.43
8	3.23
9	3.43
10	3.34
Promedio	3.37

Tabla 5: Edad de fisuración para una viga de 0.5x0.2x2.5m biempotrada con distribución de propiedades mecánicas aleatoria sometida a gradientes de temperatura

ción aleatoria de las propiedades mecánicas. Estas zonas se encuentran en distintos lugares de la viga, en particular las fisuras crecen desde los bordes extremos al centro de la viga. Esto se debe a que las fisuras se generan por gradientes de superficie debido a la forma de la geometría analizada.

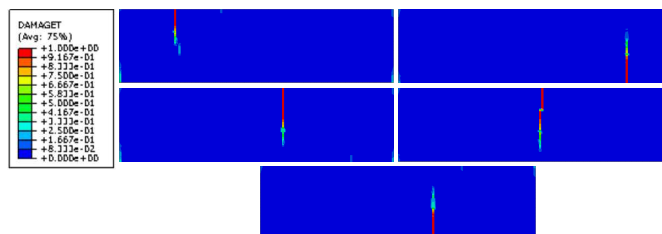


Figura 7: Variable de daño para la viga de 0.2x0.5x2.5m biempotrada con propiedades mecánicas aleatorias para 5 de las 10 vigas simuladas

Finalmente es interesante mencionar que si bien la edad de fisuración calculada empleando distribución uniforme de propiedades mecánicas (3.95 días) es similar al valor promedio obtenido aplicando distribución aleatoria de las propiedades (3.37 días), los resultados del análisis con propiedades uniformes no es correcto, ya que el patrón de fisuración resultante de la aplicación de propiedades mecánicas uniformes es diferente al obtenido con propiedades mecánicas distribuidas en forma aleatoria.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudiaron aplicaciones del algoritmo desarrollado en MATLAB que permite considerar la aleatoriedad existente en las propiedades mecánicas del hormigón presentado en trabajos anteriores. A partir de los distintos problemas estudiados se concluye que:

- Utilizando propiedades mecánicas distribuidas aleatoriamente se obtienen resultados numéricos del ensayo de tracción directa con una dispersión similar a la que presentan los ensayos de laboratorio
- Se logra independencia de malla para un mallado cuadrado utilizando el modelo de plasticidad con daño CDP, lo cual no ocurre al emplear propiedades mecánicas distribuidas uniformemente.
- Los patrones de fisuración dejan de presentar simetría e influencia de las condiciones de contorno al emplear propiedades mecánicas distribuidas aleatoriamente.
- La asignación de propiedades aleatorias a la estructura le otorga un enfoque más realista al análisis.
- La generación de distintos patrones de fisuración para una misma geometría permite realizar un análisis estadístico del tiempo de aparición de fisuras a partir del análisis numérico.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *ABAQUS 6.13 Analysis User's Manual Volume III: Materials*. Dassault Systèmes Simulia Corp., 2013.
- ACI. *ACI 214R-11: Guide to evaluation of strength test results of concrete*. ACI committee 214, 2011.
- ACI. *ACI 318S-14: Building code requirements for structural concrete*. ACI committee 318, 2014.
- Bažant Z. y Pang S. Activation energy based extreme value statistics and size effect in brittle and quasibrittle fracture. *Journal of mechanics and physics of solids*, 55 (1):91–131, 2007.
- Bažant Z.P. y Planas J. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, 1998.
- Lubliner J., Oliver J., Oller S., y Oñate E. A plastic-damage model for concrete. *Solid Structures*, 25:299–236, 1989.
- Mindess S., Young J.F., y Darwin D. *Concrete*. Prentice Hall, 2003.
- Stefanou G. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 198:1031–1051, 2009.
- Tumidajski P.J., Fiore L., Khodabocus T., Lachemi M., y Pari R. Comparison of Weibull and normal distributions for concrete compressive strengths. *Canadian journal of civil engineering*, 33:1287–1292, 2006.
- van Mier J.G.M. *Fracture processes of concrete*. CRC Press, 1997.
- Yang Z.J., Su X.T., Chen J.F., y Liu G.H. Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials. *International journal of solid and structures*, 46:3222–3234, 2009.