

## CONDICIÓN DE BORDE ABSORBENTE ALGEBRAICA DISCRETA NO-LOCAL (DNL) UTILIZANDO ELEMENTOS DE BORDE

### ALGEBRAIC DISCRETE NON-LOCAL (DNL) ABSORBING BOUNDARY CONDITION USING BOUNDARY ELEMENTS

**Sofía Sarraf<sup>a,b</sup>, Ezequiel López<sup>a,b</sup>, Laura Battaglia<sup>b</sup>, Gustavo Ríos Rodríguez<sup>b</sup> y Jorge D'Elía<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Investigación en Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería (IITCI (UNCo-CONICET)), Universidad Nacional del Comahue (UNCo). Buenos Aires 1400, Neuquén (Q8300IBX), Argentina  
e-mail: (sofia.sarraf, ezequiel.jose.lopez)@fain.uncoma.edu.ar,  
<http://www.patagonianorte.conicet.gob.ar/iitci>*

<sup>b</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC (UNL-CONICET)), Universidad Nacional del Litoral (UNL). Predio CONICET-Santa Fe, Colectora RN 168, Paraje El Pozo, Santa Fe (3000), Argentina, e-mail: lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar, gusadrr@santafe-conicet.gov.ar, jdelia@cimec.unl.edu.ar, <http://www.cimec.org.ar>*

**Palabras clave:** olas de barcos, fluidos invíscidos incompresibles, teoría potencial, condición de borde absorbente algebraica no-local, método de elementos de borde, técnica de colocación.

**Resumen.** La condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL), propuesta en el problema resistencia de ola usando el método de diferencias finitas (o FDM, por *Finite Difference Method*) y el método de elementos finitos (o FEM, por *Finite Element Method*), es extendida para el método de elementos de borde (o BEM, por *Boundary Element Method*). Como ejemplo numérico se muestra un resultado preliminar de un caso cuasi bidimensional (2D) consistente en un cilindro esbelto sumergido en posición horizontal a una profundidad fija en un flujo potencial que es uniforme corriente arriba, obteniendo por puntos la curva de la resistencia de ola en función del número de Froude, y que es comparada con la obtenida con BEM basado en el esquema de diferencias en contracorriente de alto orden de Dawson.

**Keywords:** ship waves, incompressible inviscid fluids, potential theory, non-local algebraic absorbing boundary condition, boundary element method, collocation technique.

**Abstract.** The algebraic discrete non-local (DNL) absorbing boundary condition, originally proposed for the wave-resistance problem using the finite difference method (FDM) and the finite element method (FEM), is extended to the boundary element method (BEM). As a numerical example, a preliminary result of a quasi two-dimensional (2D) case consisting of a slender cylinder submerged in a horizontal position at a fixed depth in a potential flow that is uniform upstream, obtaining by points the curve of the wave resistance as a function of the number of Froude, and that is compared to that obtained with BEM based on the Dawson upwind difference scheme of high order.

## 1. INTRODUCCIÓN

El empleo de la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL) en problemas de propagación de ondas, como el la resistencia de ola en barcos (Wehausen, 1973), es bien conocido usando ya sea el método de diferencias finitas (o FDM, por *Finite Difference Method*), o el método de elementos finitos (o FEM, por *Finite Element Method*) (e.g. ver Storti et al., 1998, 2000). También se conocen otras aplicaciones de las condiciones de borde absorbentes como, por ejemplo, para la ecuación de Helmholtz (e.g. ver Medvinsky et al., 2008). En el caso del problema de la resistencia de ola, a diferencia de métodos similares al esquema clásico de derivadas finitas en contra-corriente de alto orden de Dawson (1977), evita el uso de viscosidades numéricas en la discretización, de modo que se puede usar un esquema centrado para el operador de superficie libre.

Como es conocido en la teoría de la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL) (Storti et al., 1998), la misma es completamente absorbente en el sentido de que la solución es independiente de la posición de los contornos artificiales ubicados en corriente arriba y en corriente abajo, y se deriva de un análisis directo de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes asociadas al problema del continuo, asumiendo que la malla es parcialmente estructurada, requiriendo la descomposición en autovalores de una matriz con una dimensión menor que la matriz del sistema. Luego, es posible emplear un esquema centrado para el operador de superficie libre, lo cual permite una discretización completa con los métodos más clásicos evitando el uso de derivadas en contrarriente.

Por su parte, el BEM frecuentemente reformula un problema de valores de borde de tipo elíptico mediante una ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*) (e.g. ver Hackbusch, 1995). En este trabajo se explora el uso de la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL) pero esta vez utilizando el BEM con una BIE que será aproximada mediante una técnica de colocación.

## 2. FORMULACIÓN CON FLUJO POTENCIAL

Consideremos un flujo estacionario sobre un cuerpo tridimensional (3D) fijo, cerrado, y completamente sumergido, donde la corriente es uniforme en infinito corriente arriba y de velocidad constante  $\mathbf{U}_{0,\infty} = (U_{0,\infty}, 0, 0)$  que, por simplicidad, lo asimilamos a un canal de sección uniforme consistente en un rectángulo de profundidad  $L_z$  y ancho  $L_y$ . El fluido ocupa la región  $\Omega$  la cual es acotada por las paredes laterales y el fondo del canal  $\Gamma_C$ , las secciones de entrada/salida  $\Gamma_{I/O}$ , la superficie del cuerpo sumergido  $\Gamma_S$  y la superficie libre  $\Gamma_F$ . El eje cartesiano  $x$  es paralelo a la velocidad no-perturbada corriente arriba  $\mathbf{U}_{0,\infty}$ , mientras que el eje cartesiano  $z$  es positivo hacia arriba. La velocidad  $\mathbf{u}$  está dada por  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ , donde  $\Phi$  es el potencial total, el cual satisface la ecuación de Laplace en el dominio del flujo  $\Omega$ , y es separado como  $\Phi = \mathbf{U}_{0,\infty}^T \mathbf{x} + \phi$  donde  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  es la posición y  $\phi$  es el potencial de perturbación. La posición de la superficie libre  $\Gamma_F$  está dada por la función  $z = \zeta(x, y)$ , donde  $\zeta$  es la elevación de la superficie libre con respecto al plano de referencia  $z = 0$  el cual es el plano de equilibrio hidrostático.

### 2.1. Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones para el par solución  $\{\Phi, \zeta\}$  son:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{en } \Omega; \\ \partial_n\Phi = 0 & \text{en } \Gamma_S + \Gamma_C; \\ \zeta = (U_{0,\infty}^2 - |\nabla\Phi|^2)/(2g) & \text{en } \Gamma_F; \\ -\zeta_{,x}\Phi_{,x} - \zeta_{,y}\Phi_{,y} + \Phi_{,z} = 0 & \text{en } \Gamma_F; \\ |\nabla\Phi| < \infty & \text{en } \Gamma_{I,O}. \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2. Expansión de flujo lento

Como parámetro de expansión asintótica elegimos al número de Froude  $Fr = U/\sqrt{Lg}$ , donde  $L$  es alguna longitud característica del flujo, y  $g$  es la aceleración de la gravedad. La linealización de la corriente lenta asume que  $Fr \ll 1$ , cuyo flujo base se obtiene en el límite  $g \rightarrow \infty$  con lo que la superficie libre  $\zeta(x, y)$  colapsa en el plano de equilibrio hidrostático  $z = 0$ , con lo cual desaparece el patrón de olas detrás del cuerpo, y que es equivalente al flujo del cuerpo doble obtenido por imagen especular del dominio con respecto al plano  $z = 0$ . Después de solucionar el flujo básico, la aceleración es restablecida y, si las alturas de ola son lo suficientemente pequeñas, entonces las mismas pueden considerarse como una perturbación del flujo base, cuyo tratamiento conduce a una linealización de las ecuaciones gobernantes, resultando el par potencial y altura  $\{\phi_k, \zeta_k\}$ , respectivamente, donde  $k = 0$  corresponde al flujo base y  $k = 1$  al flujo perturbado. En el problema perturbado hacemos la expansión asintótica  $\{\phi_1, \zeta_1\} = \{\phi_0 + \psi\varepsilon, \zeta_0 + \eta\varepsilon\}$ , a primer orden en  $\varepsilon$ , con  $\varepsilon = Fr$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  para el flujo lento, donde  $\{\psi, \eta\}$  es el par solución incremental dado por el potencial de ola  $\psi$  y la altura de ola  $\eta$ . Ambos potenciales  $\phi_{0,1}$  son armónicos, i.e.  $\Delta\phi_{0,1} = 0$ , en sus respectivos dominios  $\Omega^{0,1}$ , y se asume que las elevaciones  $\zeta_{0,1}$  son univaluadas y suficientemente pequeñas, de modo que el par de soluciones incrementales  $\{\varepsilon\psi, \varepsilon\eta\} = \{(\phi_1 - \phi_0), (\zeta_1 - \zeta_0)\}$  también son suficientemente pequeños cuando  $\varepsilon \ll 1$ .

### 2.3. Potencial de ola linealizado

El sistema de ecuaciones linealizado para el par solución  $\{\psi, \eta\}$  son escritas en la forma (e.g. ver [Storti et al., 1998](#))

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } \Omega; \\ \partial_n\psi = 0 & \text{en } \Gamma_S + \Gamma_C; \\ g\eta = -\mathbf{U}_0^T \nabla\psi - \chi_{01} & \text{en } z = 0; \\ \partial_n\psi = \nabla^T(\mathbf{U}_0\eta) & \text{en } z = 0; \\ |\nabla\psi| < \infty & \text{en } \Gamma_{I,O}. \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{0,\infty} + \nabla\phi_0$  es la velocidad del flujo base en el plano hidrostático  $z = 0$ , mientras que  $\chi_{01}$  es la diferencia en la condición de borde dinámica entre el flujo base (flujo 0) y el flujo perturbado (flujo 1), evaluada en el plano hidrostático, y que da lugar al término fuente del sistema de ecuaciones BEM del flujo perturbado. Reemplazando Ec. (2.c) en Ec. (2.d)

$$\partial_n\psi = -\frac{1}{g}\nabla^T\mathbf{U}_0\mathbf{U}_0^T\nabla\psi - \frac{1}{g}\nabla^T(\mathbf{U}_0\chi_{01}). \quad (3)$$

La diferencia  $\chi_{01}$  se obtiene mediante la ecuación de Bernoulli (con  $\rho = 1$ ) del flujo base

$$\frac{1}{2}U_0^2 + g\zeta_0 = \frac{1}{2}U_{0,\infty}^2 + \chi_{01}; \quad (4)$$

pero en el flujo base la superficie libre coincide con el plano de equilibrio hidrostático, i.e.  $\zeta_0 = 0$ , entonces  $\chi_{01} = (U_0^2 - U_{0,\infty}^2)/2$ . Luego

$$\partial_n \psi = -\frac{1}{g} \nabla^T \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^T \nabla \psi - \frac{1}{2g} \nabla^T \mathbf{U}_0 (U_0^2 - U_{0,\infty}^2) \quad \text{en } z = 0; \quad (5)$$

es una condición de borde no-homogénea de tipo Neumann para el potencial de ola  $\psi$ , y que puede asimilarse a un flujo transpiración  $\sigma' \equiv \partial_n \psi$  que simula el desplazamiento de la superficie libre desde el plano hidrostático  $z = 0$ , i.e.  $\sigma' = D\psi + f$ , con los operadores

$$\begin{aligned} D &= -1/g \nabla^T \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^T \nabla \\ f &= -1/(2g) \nabla^T \mathbf{U}_0 (U_0^2 - U_{0,\infty}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. FORMULACIÓN NUMÉRICA CON BEM

La solución se obtiene en dos etapas, resolviendo primero el problema del flujo básico y, a continuación, el problema del flujo perturbado. En ambos se emplea la misma malla BEM, donde la superficie libre coincide con el plano de equilibrio hidrostático  $z = 0$ . La malla BEM contiene paneles planos abarcando  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_b$ , siendo  $\Gamma_p$  la porción con  $E_p$  paneles sobre el plano,  $\Gamma_b$  la porción con  $E_b$  paneles sobre el cuerpo sumergido. El número total de paneles es  $E = E_p + E_b$ . La numeración de los paneles es correlativa para facilitar un tratamiento por bloques. La formulación numérica con BEM se basa en la formulación integral de Morino (Morino, 1985) e implementada con paneles de bajo orden, con colocación en los centroides de los paneles, dando un sistema de ecuaciones lineales, donde la matriz del sistema es cuadrada y regular de tamaño  $E \times E$  para ambos flujos (Sarraf et al., 2015, 2016).

#### 3.1. BEM para el flujo básico

El sistema de ecuaciones para el flujo básico es escrito como  $\mathbf{A}\psi^0 = \mathbf{b}^0$ , donde  $\mathbf{A}$  es la matriz del sistema, mientras que  $\psi^0$  y  $\mathbf{b}^0$  son el potencial y el vector fuente del flujo básico, respectivamente, evaluados en los centroides de los paneles. El vector fuente  $\mathbf{b}^0 = \mathbf{C}\sigma^0$  es el producto de la matriz monopolar  $\mathbf{C}$  y el vector de flujos  $\sigma^0$  dado por la condición de borde de flujo deslizante en las paredes sólidas  $\sigma^0(\mathbf{x}_j) = -\mathbf{U}_0^T(\mathbf{x}_j)\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)$ , donde  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_j)$  es el versor normal orientado hacia el lado mojado. La matriz del sistema es separado en los bloques como sigue, donde  $p$  denota en el plano y  $b$  en el cuerpo (por *body*):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} \\ \mathbf{A}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_p^0 \\ \psi_b^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pb} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p^0 \\ \sigma_b^0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 3.2. BEM para el flujo perturbado

En el problema de flujo perturbado todas las superficies del flujo básico permanecen fijas, de modo que empleamos la misma malla BEM y escribimos un sistema matricial similar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pb} \\ \mathbf{A}_{bp} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} & \mathbf{C}_{pb} \\ \mathbf{C}_{bp} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_b \end{bmatrix} \quad (8)$$

la condición de borde de tipo Neumann es nula sobre el cuerpo sumergido  $\sigma_b = \mathbf{0}$  mientras que sobre el plano de equilibrio hidrostático

$$\sigma_p = \beta \mathbf{D}_{pp} \psi_p + \mathbf{f}; \quad (9)$$

donde la matriz  $\mathbf{D}_{pp}$  en el plano de equilibrio hidrostático está asociada con el operador  $\nabla^T \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^T \nabla$ , donde  $\mathbf{U}_0$  proviene de la solución del flujo básico, y  $\beta = 1/g$ , mientras que  $\mathbf{D}_{pp} = \text{diag}(D_i)$ , donde  $D_i = D(\mathbf{x}_i)$  es una matriz de diferencias finitas, mientras que  $\mathbf{f} = f(\mathbf{x}_i)$  proviene de la diferencia  $\chi_{01}$  entre los flujos base y perturbado. Reemplazando  $\sigma_p$  y  $\sigma_b$  y reordenando

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{pp} - \mathbf{C}_{pp} \mathbf{D}_{pp}) & \mathbf{A}_{pb} \\ (\mathbf{A}_{bp} - \mathbf{C}_{bp} \mathbf{D}_{pp}) & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_p \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{pp} \mathbf{f} \\ \mathbf{C}_{bp} \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (10)$$

En este sistema hay que introducir, ya sea las condiciones de radiación, o bien un esquema de diferencias finitas en contracorriente en  $\mathbf{D}_{pp}$ , desde que sin las mismas el problema hidrodinámico es incompletamente formulado.

### 3.3. Diferencias finitas en el plano hidrostático

En el método BEM+Dawson se emplea el clásico esquema de diferencias finitas de Dawson que, en una formulación en potencial, es de quinto orden, no-centrado y orientado en contracorriente. En una malla unidimensional (1D) de paso constante  $h_x$  se reduce a

$$D(\psi)_i = \frac{5\psi_i - 14\psi_{i-1} + 14\psi_{i-2} - 6\psi_{i-3} + \psi_{i-4}}{2h_x^2} \quad (11)$$

En cambio, en el método BEM+DNL basta emplear un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden que, en una malla 1D de paso constante  $h_x$ , se reduce al clásico esquema

$$D(\psi)_i = \frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{h_x^2} \quad (12)$$

## 4. CONDICIÓN DE BORDE ABSORBENTE ALGEBRAICA DISCRETA DNL EN BEM

El método basado en la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL) dado en [Storti et al. \(1998\)](#) hace un estudio directo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes en dominios no-acotados en la dirección del flujo, y que sigue de cerca el caso general descrito por [Hagstrom y Keller \(1986\)](#). Se basa en suponer que a partir de cierta coordenada  $|x| > L$  la malla es estructurada unidimensionalmente, y si además la velocidad no perturbada  $\mathbf{u}_0$  es constante y el término fuente es nulo para  $|x| > L$ , entonces puede calcularse en forma cerrada la expresión asintótica de la solución discreta en base a un problema de autovalores para los grados de libertad en cada capa de nodos de la parte estructurada. La condición absorbente se basa en fijar a cero aquellos grados de libertad que corresponden a modos que crecen para  $x \rightarrow \pm\infty$  en  $x = \pm L$ . El problema de flujo potencial con superficie libre se caracteriza por tener soluciones propias en la forma de cosenos y senos, además de las exponenciales habituales, las cuales no se anulan ni divergen en ninguna de las direcciones.

En este trabajo, el problema de autovalores auxiliar se plantea en forma muy cruda mediante el agregado de dos capas de paneles extra a la malla BEM usual, con  $E_c$  paneles ubicados en corriente arriba y otros  $E_c$  paneles en corriente abajo. Cada capa se encuentra sumergida a una profundidad constante  $h_z$  con respecto al plano hidrostático  $z = 0$ . Dentro de cada capa los paneles se encuentran separados entre si con un paso  $h_x$  constante a lo largo de la dirección cartesiana  $x$  y, por simplicidad, se elige  $h_z = h_x$ . Estos  $2E_c$  paneles, junto con los correspondientes paneles enfrentados en el plano hidrostático, permiten definir y resolver por FDM el problema de autovalores asociado con la condición absorbente algebraica discreta no-local (DNL), cuya

solución se incorpora en el sistema BEM como restricciones lineales extra. Las siguientes dos subsecciones es un repaso de lo presentado con FDM en [Storti et al. \(1998\)](#) pero que sirve lo mismo con BEM.

#### 4.1. Problema de autovalores de la condición DNL

El problema de flujo potencial con superficie libre se caracteriza, incluso en una aproximación muy cruda, por tener soluciones propias en la forma de cosenos y senos, además de las exponenciales habituales. Las ecuaciones de gobierno muy lejos del cuerpo, en donde la carga de presión sobre la superficie libre es nula o despreciable, son

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{para } z < 0; \\ \psi_{,n} + K^{-1}\psi_{,xx} = 0 & \text{en } y = 0; \end{cases} \quad (13)$$

donde  $K^{-1} = U_{0,\infty}^2/g$ . Consideremos ahora una semi-discretización en la vertical, según  $z$ , con  $\Delta z$  constante. Sea  $z_j = -j\Delta z$ , para  $j = 0, 1, \dots, Q$ . La aproximación a la Ec. (13.a) es

$$\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{\Delta z^2} + \psi_{j,xx} = 0 \quad . \quad (14)$$

Para (13) podemos aproximar  $\partial_n\psi$  con una aproximación de primer orden en  $\Delta z$  decentrada

$$\frac{\psi_0 - \psi_1}{\Delta z} + K^{-1}\psi_{0,xx} = 0 \quad ; \quad (15)$$

pero, en realidad, es simple desarrollar una aproximación de segundo orden en  $\Delta z$ , si consideramos una aproximación centrada para  $\partial_n\psi$  con un nodo ficticio  $z_{-1} = \Delta z$  e imponiendo la ecuación interior también en  $j = 0$ . Para tal fin, definamos un nodo ficticio ubicado por encima del plano hidrostático en  $z_{-1} = \Delta z$ , y usamos una aproximación de segundo orden para la derivada centrada

$$\frac{\psi_{-1} - \psi_1}{2\Delta z} + \tilde{K}^{-1}\psi_{0,xx} = 0 \quad ; \quad (16)$$

pero hemos agregado una incógnita de manera que debemos sumar una ecuación, para lo cual agregamos la ecuación de los nodos interiores para  $j = 0$

$$\frac{\psi_{-1} - 2\psi_0 + \psi_1}{\Delta z^2} + \psi_{0,xx} = 0 \quad . \quad (17)$$

Después de eliminar la incógnita correspondiente al nodo ficticio queda una ecuación similar

$$\frac{\psi_0 - \psi_1}{\Delta z} + \tilde{K}^{-1}\psi_{0,xx} = 0 \quad ; \quad (18)$$

donde  $\tilde{K}^{-1} = 1/K - \Delta z/2$  es un valor corregido para  $K^{-1}$ , con lo que se recupera el orden  $O(\Delta z^2)$  en una aproximación por diferencias finitas.

#### 4.2. Una aproximación muy cruda

En una aproximación muy cruda suponemos que tenemos sólo dos puntos en la discretización vertical, con un nodo en el plano hidrostático con potencial  $\psi_0$ , y otro nodo sumergido en  $z_1 = -\Delta z$  con potencial  $\psi_1$ . El sistema dado por las Ecs. (14), (18) puede ponerse como

$$\psi_{,xx} + \mathbf{A}\psi = \mathbf{0} \quad ; \quad (19)$$

con el vector  $\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix}$  y la matriz  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{K}/\Delta z & -\tilde{K}/\Delta z \\ -2/\Delta z^2 & 1/\Delta z^2 \end{bmatrix}$  ; (20)

Proponiendo soluciones de la forma  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 e^{\lambda x}$  se llega a la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - (\tilde{K}/\Delta z + 1/\Delta z^2)\lambda - \tilde{K}/\Delta z^3 = 0 \quad . \quad (21)$$

donde el discriminante de su solución

$$\Delta = (\tilde{K}/\Delta z + 1/\Delta z^2)^2 + 4\tilde{K}/\Delta z^3 > 0 \quad ; \quad (22)$$

que al ser positivo, las dos soluciones son reales. Pero como el término independiente es negativo, entonces una raíz es positiva  $\lambda_1 > 0$  y la otra es negativa  $\lambda_2 < 0$ . Ahora sea la descomposición en autovectores

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}^{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \quad ; \quad (23)$$

entonces haciendo el cambio de variables  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\psi}$ , el sistema queda

$$\mathbf{U}_{,xx} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad ; \quad (24)$$

Como  $\boldsymbol{\Lambda}$  es diagonal, el sistema se desacopla en dos ecuaciones escalares

$$\begin{cases} u_{1,xx} + \lambda_1 u_1 = 0 & ; \\ u_{2,xx} + \lambda_2 u_2 = 0 & . \end{cases} \quad (25)$$

Ahora bien, como  $\lambda_2 < 0$  las soluciones de la Ec. (25) cuando  $|x| > L$  son de la forma

$$u_2 = a e^{+k_2 x} + b e^{-k_2 x} \quad ; \quad (26)$$

donde  $k_2 = \sqrt{-\lambda_2}$ . Entonces, la condición absorbente algebraica discreta no-local (DNL) conduce a las restricciones

$$u_{2,x} \pm k_2 u_2 = 0 \quad \text{en } x = \pm L; \quad (27)$$

Para la  $u_1$  la solución general para  $|x| > L$  es de la forma

$$u_1 = c_{\pm} \cos(k_1 x) + d_{\pm} \sin(k_1 x) \quad \text{para } \pm x > L; \quad (28)$$

con  $k_1 = \sqrt{\lambda_1}$ , y las condiciones de contorno apropiadas son

$$u_1 = u_{1,x} = 0 \quad \text{en } x = -L. \quad (29)$$

Ahora, para poner las condiciones de contorno absorbentes en términos de las variables originales  $\psi_0, \psi_1$ , recordemos que  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\psi}$  para poner

$$\begin{aligned} u_1 &= [1 \ 0] \mathbf{U} = [1 \ 0] \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\psi} \quad ; \\ u_2 &= [0 \ 1] \mathbf{U} = [0 \ 1] \mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\psi} \quad . \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^T &= [1 \ 0] \mathbf{S}^{-1} \quad ; \\ \mathbf{w}_2^T &= [0 \ 1] \mathbf{S}^{-1} \quad ; \end{aligned} \quad (31)$$

y las condiciones de borde absorbentes son

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{w}_1^T \boldsymbol{\psi}_{,x} = 0 & \text{en } x = -L; \\ \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\psi}_{,x} \pm k_2 \mathbf{w}_2^T \boldsymbol{\psi} = 0 & \text{en } x = \pm L. \end{cases} \quad (32)$$

en donde se evidencia la asimetría, con 3 condiciones de contorno absorbentes en corriente arriba y una sola en corriente abajo.



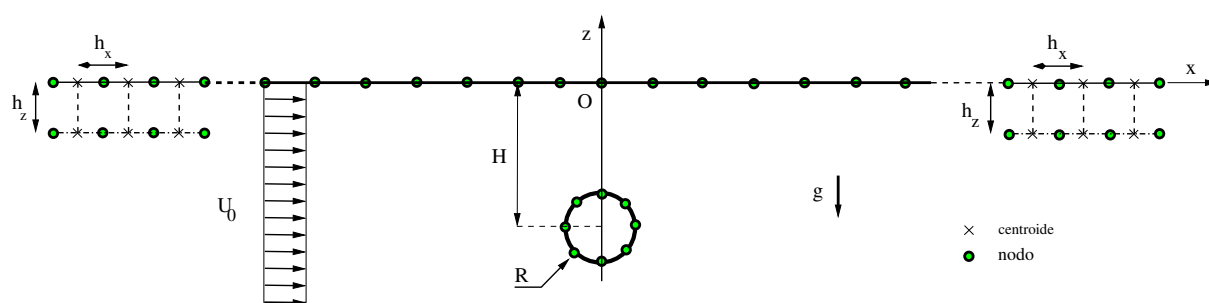


Figura 1: Esquema de una malla BEM+DNL en un cilindro esbelto de radio  $R$  y altura  $L_y$  sumergido a profundidad  $H$  e inmerso en un flujo no-perturbado corriente arriba con velocidad  $U_{0,\infty}$  uniforme, y aceleración  $g$ . Los paneles en los extremos se utilizan en el problema de autovalores de la condición absorbente algebraica discreta no-local (DNL).

## 5. EJEMPLO NUMÉRICO

Consideramos un caso cuasi bidimensional (2D) consistente en un cilindro de radio  $R$  y altura  $L_y$  sumergido en posición horizontal a profundidad  $H$ , en un flujo uniforme en corriente arriba con velocidad no-perturbada  $\mathbf{U}_{0,\infty} = (U_{0,\infty}, 0, 0)$ , ver Fig. 1. La tarea consiste en trazar por puntos la curva de la resistencia de ola en función del número de Froude, donde la rapidez corriente arriba  $U_{0,\infty}$  es la única variable en la simulación. La resistencia de ola analítica  $F_x$  por unidad de longitud está dada por (Landweber, 1961; D'Elía et al., 2002)

$$F_x = \frac{4\pi^2 g^3 \rho R^4}{U_{0,\infty}^4} e^{-2gH/U_{0,\infty}^2} \quad (33)$$

donde  $F_x$  es la fuerza de resistencia de ola según la dirección cartesiana  $x$ ,  $R$  es el radio del cilindro,  $H$  es la profundidad de su eje,  $U_{0,\infty}$  es la rapidez no-perturbada corriente arriba, mientras que  $g$  es la aceleración de la gravedad. El número de Froude representativo en este tipo de flujo se refiere a la profundidad, y es definido como  $Fr = U_{0,\infty}/\sqrt{gH}$ .

En este ejemplo se adoptan los siguientes parámetros: radio  $R = 0.1$ , profundidad  $H = 1$ , aceleración  $g = 1$ , longitud del cilindro  $L_y = 4$ , y densidad del fluido  $\rho = 1$ . Se utiliza BEM+DNL junto con un esquema de diferencias finitas de segundo orden y centrado en el plano hidrostático  $z = 0$ . Antes de empezar con cálculo BEM propiamente dicho, se pre-computa numéricamente en GNU-Octave el problema de autovalores dado por las Ecs. (19-20), obteniendo las condiciones absorbentes expresadas por las restricciones lineales dadas en la Ec. (32).

La malla BEM+Dawson consiste en  $E_x \times E_y = 100 \times 1$  paneles en el plano hidrostático, y  $E_c = 72$  paneles en el cilindro, mientras que la malla BEM+DNL se obtiene de la anterior agregando 2 tiras de paneles sumergidos a una profundidad constante de  $h_z = 0.1$ . En cada tira sumergida hay 3 paneles separados con paso constante  $h_x = 0.10$  a lo largo de la dirección cartesiana  $x$ . Los 6 paneles junto con los correspondientes paneles enfrentados en el plano hidrostático son simétricos con respecto a traslaciones horizontales, por lo que para resolver las Ecs. (19-20) asociadas con la condición absorbente algebraica discreta no-local (DNL) basta considerar una semi-discretización en diferencias según  $z$  en cualquiera de las tiras verticales. No obstante, más adelante, cuando se tengan que imponer en el sistema BEM las restricciones lineales dadas en la Ec. (32), también hace falta una discretización en el sentido horizontal  $x$  para una aproximación de la primera derivada en ambos extremos. Por practicidad se elige un esquema en diferencias de primer orden centrada con 3 paneles en cada extremo. Como una primera implementación, la definición y solución del problema de autovalores asociado con



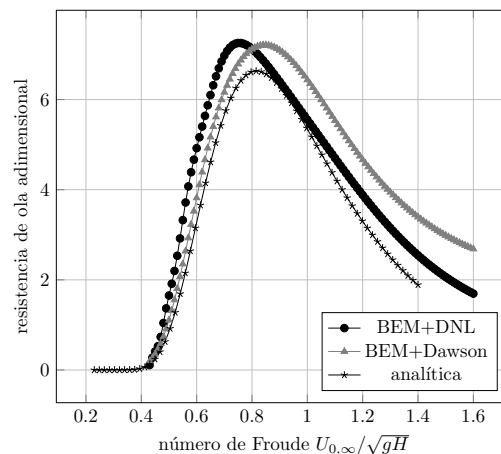


Figura 2: Resistencia de ola adimensional sobre el cilindro mostrado en la Fig. 1 en función del número de Froude  $Fr = U_{0,\infty}/\sqrt{gH}$ .

la condición absorbente algebraica discreta no-local (DNL) se realiza con un pre-cómputo en GNU–Octave, dando lugar a restricciones lineales que en el ensamblaje se agregan en el sistema BEM estándar, con las cuales es posible emplear el esquema en diferencias centrado de segundo orden dado por la Ec. (12).

En la Fig. 2 se muestra el arrastre de ola adimensional  $C_w = F_x/F_0$ , donde  $F_0 = (\rho/2)RU_{0,\infty}^2$ , en función del número de Froude, y obtenidos con: (i) solución numérica BEM+DNL; (ii) solución numérica BEM+Dawson; y (ii) solución analítica.

## 6. CONCLUSIONES

Para el problema de la resistencia de ola en hidrodinámica potencial 3D se ha presentado un resultado preliminar de un esquema BEM+DNL en un caso cuasi-2D basado en un método de elementos de borde (BEM) y en la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL). La implementación BEM+DNL requiere agregar capas de paneles adicionales a una malla BEM+Dawson tradicional, a los efectos de definir un problema de autovalores auxiliar que surge de una semi-discretización en vertical mediante diferencias finitas. El problema auxiliar de autovalores depende paramétricamente de la rapidez no-perturbada, por lo cual debe resolverse uno para cada rapidez. De todos modos, el tamaño del problema auxiliar es mucho menor al de la malla completa porque involucra únicamente las capas de paneles en los extremos en corriente arriba y abajo. A continuación se prosigue con el esquema habitual en la condición de borde absorbente algebraica discreta no-local (DNL), donde las condiciones de borde absorbentes son impuestas como restricciones adicionales al sistema de ecuaciones tradicional BEM, y que son resueltas mediante superposición. Como trabajo a futuro se proyecta que el problema de autovalores auxiliar sea incorporado en el código computacional que hace el cómputo BEM. Si bien se tiene un resultado preliminar, se estima que el método BEM+DNL pueda complementar a los esquemas más tradicionales tales como BEM+Dawson, BEM+Fourier (D'Elia et al., 2000), FDM+DNL, o FEM+DNL.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, Argentina, proyecto PIP 112-201501-00588CO), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, Argentina, proyecto PICT 2660-2014), la

Universidad Nacional del Litoral (UNL, Argentina, proyecto CAI+D 2016 (504-201501-00112-LI)), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, y así como otros recursos de código abierto, tales como L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, PGFPlots, TikZ, y Xfig.

## REFERENCIAS

- Dawson C.W. A practical computer method for solving ship-wave problems. En *Proceedings 2nd International Conference on Numerical Ships Hydrodynamics*, páginas 30–38. Berkeley, C. A., 1977.
- D'Elía J., Storti M., y Idelsohn S. A panel-Fourier method for free surface flows. *J Fluids Eng-Trans ASME*, 122(2):309–317, 2000.
- D'Elía J., Storti M., y Idelsohn S. Applied hydrodynamic wave-resistance computation by Fourier transform. *Ocean Engineering*, 29:261–278, 2002.
- Hackbusch W. *Integral equations*. Birkhäuser, 1995.
- Hagstrom T. y Keller H.B. Exact boundary conditions at an artificial boundary for partial differential equations in cylinders. *SIAM J. Math. Anal.*, 17:322–341, 1986.
- Landweber L. Motion of immersed and floating bodies. En V.L. Streeter, editor, *Handbook of Fluid Dynamics*, páginas 13.1–13.50. McGraw-Hill, New York, 1961.
- Medvinsky M., Turkel E., y Hetmaniuk U. Local absorbing boundary conditions for elliptical shaped boundaries. *J. Comp. Physics*, 227(18):8254–8267, 2008. ISSN 0021-9991. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.05.010>.
- Morino L. *Computational Methods in Potential Aerodynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- Sarraf S., López E., Battaglia L., Ríos Rodríguez G., y D'Elía J. An improved assembling algorithm in boundary elements with Galerkin weighting applied to three-dimensional Stokes flows. *J Fluids Eng-Trans ASME*, 11:111102–111117, 2016.
- Sarraf S., López E., Ríos Rodríguez G., Battaglia L., y D'Elía J. Implementación de elementos triangulares isoparamétricos curvos en el código GBEM. En *Revista MACI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial V MACI 2015*, volumen 5, páginas 197–200. 2015.
- Storti M.A., D'Elía J., Bonet Chaple R.P., Nigro N.M., y Idelsohn S.R. The DNL absorbing boundary condition. applications to wave problems. *Comp. Meth. in App. Mech. and Engng.*, 182(3-4):483–498, 2000.
- Storti M.A., D'Elía J., y Idelsohn S. Algebraic Discrete Non-Local (DNL) absorbing boundary condition for the ship wave resistance problem. *J. Comp. Physics*, 146(2):570–602, 1998.
- Wehausen J.W. *The Wave Resistance of Ships*. Advances in Applied Mechanics, 1973.