

EVALUACIÓN DE ESQUEMAS DE RECONSTRUCCIÓN HIDROSTÁTICA LOCAL PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO DE GASES Y PLASMAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS

EVALUATION OF LOCAL HYDROSTATIC RECONSTRUCTION SCHEMES FOR THE NUMERICAL SIMULATIONS OF GAS AND PLASMA FLOWS IN STRATIFIED MEDIUMS

Gustavo J. Krause^{a,b} y Andrés M. Cimino^a

^a*Departamento de Aeronáutica; Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; Universidad Nacional de Córdoba; Argentina, gustavo.krause@unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu/>*

^b*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, IDIT-CONICET-UNC, Córdoba, Argentina, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

Palabras clave: Atmósferas estratificadas, Esquemas well-balanced, Reconstrucción MUSCL.

Resumen. Muchos problemas de flujo de plasmas de interés en astrofísica son fuertemente inestacionarios y ocurren en medios gravitacionalmente estratificados donde la distribución hidrostática de presión puede presentar fuertes gradientes en ciertas regiones de la atmósfera estelar. El análisis numérico de este tipo de fenómenos por medio de esquemas explícitos convencionales es deficiente debido a que la clásica aproximación polinómica de las variables no es capaz de capturar la variación exponencial de la presión con la altura, generándose así velocidades espurias que perturban numéricamente la condición hidrostática. Existen diferentes técnicas para satisfacer numéricamente el equilibrio hidrostática, entre las cuales se destaca la de reconstrucción hidrostática local por su relativa simplicidad de implementación. En este trabajo comparamos diferentes alternativas de un esquema de reconstrucción hidrostática local de segundo orden para evaluar su desempeño en problemas de flujo que se desarrollan en medios gravitacionalmente estratificados.

Keywords: Stratified atmospheres, Well-balanced schemes, MUSCLE reconstruction.

Abstract. Many plasma flow problems of astrophysical interest are strongly unsteady and occur in gravitationally stratified mediums where the hydrostatic pressure distribution can present very strong gradients in certain regions of the stellar atmosphere. The numerical analysis of these problems by means of standard explicit schemes is deficient, since the classic polynomial approximation of the variables within the cell is not able to capture the exponential variation of pressure, therefore producing spurious velocities that numerically perturb the hydrostatic condition. There are different techniques that allow to numerically satisfy the equilibrium of the hydrostatic condition, among which the local hydrostatic reconstruction technique stands out due to its relative simplicity. In this work we compare different choices of a second order local hydrostatic reconstruction scheme in order to evaluate its performance in problems of flows that develop in gravitationally stratified mediums.

1. INTRODUCCIÓN

Numerosos procesos astrofísicos que involucran el flujo de plasmas, como por ejemplo muchos de los eventos que se registran en la atmósfera solar, pueden modelarse utilizando las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD). Las ecuaciones de la MHD surgen del acoplamiento entre las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los gases y las ecuaciones de Maxwell, permitiendo así modelar el movimiento de los plasmas bajo ciertas condiciones. Como es sabido, las ecuaciones de la MHD no poseen solución analítica, por lo tanto deben resolverse utilizando técnicas alternativas, de modo que las simulaciones numéricas cobran gran importancia. Existen múltiples métodos numéricos desarrollados específicamente para obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones MHD (Colella y Woodward, 1984; Balsara y Spicer, 1999; Powell et al., 1999; Gardiner y Stone, 2005), los cuales han sido introducidos en numerosos códigos computacionales con diferentes características y capacidades que continúan en desarrollo (Fryxell et al., 2000; Pen et al., 2003; Ziegler, 2004, entre otros). En general, estos códigos numéricos están basados en el esquema de Godunov aplicado sobre una grilla de volúmenes finitos dentro de cada uno de los cuales deben satisfacerse las leyes de conservación de la masa, la cantidad de movimiento, el flujo magnético y la energía, es decir, que debe satisfacerse el balance entre los flujos entrantes y salientes de cada propiedad conservativa, el cambio de la misma dentro de cada volumen de control y la acción de los términos fuente presentes en el problema. Este enfoque integral permite obtener soluciones discontinuas, haciendo posible capturar fenómenos como ondas de choque y otras discontinuidades que pueden presentarse en flujos de alta energía como los que se producen regularmente en las atmósferas estelares en forma de *blasts*, eyecciones coronales de masa, etc.

Normalmente, el desafío para resolver numéricamente las ecuaciones MHD radica en la correcta modelación del campo magnético, ya que la condición de divergencia nula del campo ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) no se satisface estrictamente a nivel de la discretización aun cuando se parte de una condición inicial con campo analíticamente solenoidal. Por lo tanto, numerosos esfuerzos se han llevado a cabo con el objetivo de obtener esquemas numéricos que mantengan la divergencia del campo en niveles muy bajos. Para esquemas de tipo Godunov existen diferentes técnicas que permiten un tratamiento consistente del campo magnético las cuales, junto a alguno de los *solvers* de Riemann desarrollados para las ecuaciones MHD (Powell, 1994; Cargo y Gallice, 1997; Gurski, 2004; Miyoshi y Kusano, 2005, entre otros), son utilizadas para el análisis numérico de las ecuaciones MHD en una forma similar que en el caso de las ecuaciones de dinámica de los gases.

Muchos eventos astrofísicos de gran interés que se registran en la atmósfera solar se producen en un medio de fuerte estratificación gravitacional. Esto se debe a que dentro de la atmósfera solar existen zonas donde los gradientes térmicos son extremadamente intensos haciendo que las condiciones del plasma varíen fuertemente en pequeñas regiones. El análisis numérico de este tipo de problemas mediante esquemas basados en el método de Godunov con reconstrucciones polinómicas tipo MUSCL convencionales, como los que son usados habitualmente por la comunidad astrofísica, puede fallar o ser muy deficiente debido a que este tipo de formulación no es capaz de preservar numéricamente el equilibrio hidrostático del medio. Por este motivo, se han desarrollado técnicas especiales para el tratamiento de flujos en medios estratificados que permiten obtener resultados numéricos libres de velocidades espurias bajo ciertas condiciones. Esto se conoce como la propiedad *well-balanced* de un esquema numérico, la cual hace referencia de manera general a los esquemas que son capaces de reproducir exactamente (a nivel de la discretización) una condición estacionaria. El objetivo

de este trabajo consiste en presentar y evaluar una técnica de reconstrucción hidrostática local que fue recientemente propuesta (Krause, 2019) para satisfacer la propiedad *well-balanced* en condiciones de equilibrio hidrostático isotérmico o con gradiente térmico constante, tanto para gravedad constante como variable.

El tratamiento del equilibrio hidrostático, tanto en el caso del flujo de plasmas como en el flujo de gases, es un problema eminentemente gasdinámico, ya que el acoplamiento del campo magnético con las variables del flujo en las ecuaciones MHD se da únicamente en términos de las componentes de velocidad. Por lo tanto, durante este trabajo consideraremos solamente las ecuaciones de Euler, las cuales pueden considerarse como un caso particular de las ecuaciones MHD cuando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Además, para simplificar el análisis, asumimos una condición de flujo bidimensional, sabiendo que la extensión al caso tridimensional es directa. Las ecuaciones de Euler escritas en forma conservativa en presencia de un campo gravitacional \mathbf{g} son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E + p) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \quad (3)$$

donde ρ es la densidad del gas (o plasma), $\mathbf{u} = (u, v, w)$ su velocidad, p es la presión y E es la energía total (por unidad de volumen) dada por

$$E = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2),$$

donde ϵ es la energía interna específica.

Las ecuaciones de Euler pueden escribirse en forma compacta por medio del vector de variables conservativas \mathbf{U} y los vectores de flujo \mathbf{F} y \mathbf{G} asumiendo un problema bidimensional (la extensión al caso tridimensional es trivial):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S}, \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ (E + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Para expresar el término fuente gravitatorio escogemos un sistema de coordenadas donde el eje y se orienta paralelo a la dirección de la gravedad con sentido opuesto, por lo tanto, para una gravedad de magnitud g se tiene:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \\ -\rho g v \end{bmatrix}. \quad (6)$$

La forma no conservativa del sistema (1)-(3) se escribe en términos de las matrices jacobianas \mathbf{A}_x y \mathbf{A}_y , y del vector de variables primitivas \mathbf{V} :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \mathbf{S}_V, \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}}, \quad \mathbf{A}_y = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}}, \quad \mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ \rho g v (\gamma - 1) \end{bmatrix}.$$

1.1. Equilibrio hidrostático

La condición de equilibrio hidrostático es aquella donde las fuerzas de presión compensan las fuerzas gravitatorias de modo que, en ausencia de perturbaciones, la atmósfera permanece en reposo. Anulando la velocidad ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) y asumiendo que las variables no cambian en el tiempo, el conjunto de ecuaciones de Euler se reduce a la conocida ecuación de altura para la presión:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g. \quad (8)$$

La solución de esta ecuación está determinada por la distribución prescrita de alguna variable termodinámica que debe fijarse para que el sistema quede cerrado. En general, en las atmósferas estelares, particularmente el sol, suele prescribirse la variación de la temperatura T en función de la altura (en dirección y), ya que esta variación es muchas veces conocida o estimable. El vínculo entre la temperatura y la ecuación de altura se da a través de la ecuación de estado, que aquí asumimos igual a la ecuación de estado de los gases ideales que puede suponerse válida en múltiples problemas de la atmósfera solar (Aschwanden, 2005):

$$p = \rho R T = (\gamma - 1) \rho \epsilon, \quad (9)$$

siendo R la constante particular del gas y γ la relación de calores específicos. Con esta suposición, la ecuación (8) queda

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{pg}{RT}, \quad (10)$$

donde la distribución $T(y)$ se asume conocida. Integrando esta última expresión se obtiene

$$p(y) = p_0 \exp \left(- \int_{y_0}^y \frac{g(y')}{RT(y')} dy' \right), \quad (11)$$

donde p_0 es una presión conocida a la altura de referencia y_0 .

Esta última ecuación representa la condición de equilibrio hidrostático para una distribución de temperatura $T(y)$ dada. En las regiones donde la velocidad sea nula y las variables termodinámicas satisfagan esta condición, el gas (o plasma) permanecerá en equilibrio en ausencia de perturbaciones. Bajo ciertas condiciones, como ser la presencia de fuertes gradientes de presión, grandes escalas de altura o en fenómenos de larga duración, los esquemas numéricos convencionales fallan en preservar el equilibrio hidrostático, ya que la variación exponencial de la presión en dirección de la gravedad no puede ser capturada por los métodos clásicos de reconstrucción-evolución, aun cuando se utilicen formulaciones de alto orden. Esto hace que aparezcan flujos de cantidad de movimiento espurios que inducen velocidades en dirección vertical. Aunque estas velocidades espurias pueden reducirse incrementando la resolución de la grilla (siempre que los métodos empleados sean convergentes), en ocasiones esta solución no es posible debido a la fuerte penalización en cuanto al costo computacional que implica un refinamiento excesivo de la grilla, especialmente en problemas multidimensionales. Por lo tanto, es necesario reformular las aproximaciones numéricas de modo que el esquema sea capaz de mantener la atmósfera en reposo cuando ésta se encuentre en equilibrio hidrostático.

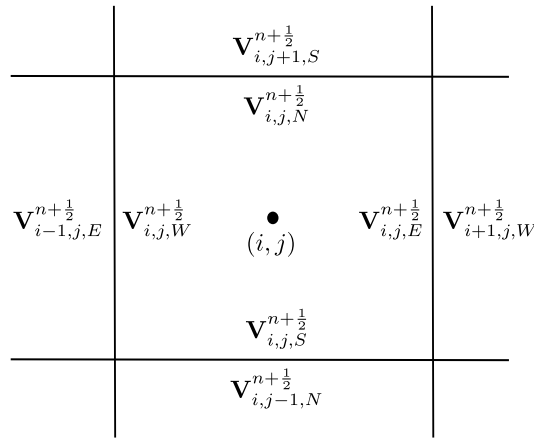


Figura 1: Esquema de la grilla estructurada cartesiana y definiciones en una celda genérica i, j .

2. ESQUEMAS TIPO GODUNOV

Los métodos de volúmenes finitos co-locados asumen que, dentro de cada subvolumen de control o celda, las variables son constantes e iguales a una cantidad promediada de la misma sobre dicha porción del dominio. Es decir, que dentro de una celda identificada con los índices i, j , cuyas coordenadas x_i, y_j de su centro definen la posición de la misma en una grilla estructurada y cartesiana (ver Figura 1), el vector de variables (discretas) para un instante de tiempo está dado por

$$\mathbf{U}_{i,j}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \mathbf{U}(x, y, t^n) dy dx, \quad (12)$$

donde Δx y Δy indican el tamaño de la celda en dirección x e y , respectivamente.

La evolución de la variable discreta $\mathbf{U}_{i,j}$ desde el tiempo t^n al tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ se obtiene considerando la forma integral de la ley de conservación (4), de donde resulta:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{S}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (13)$$

donde los flujos discretos son promediados sobre las caras de la celda y el paso de tiempo Δt , es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i \mp \frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \mathbf{F}(x_i \mp \frac{\Delta x}{2}, y, t) dy dt, \\ \mathbf{G}_{i,j \mp \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \mathbf{G}(x, y_j \mp \frac{\Delta y}{2}, t) dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Los flujos son aproximados por flujos numéricos que definen los distintos métodos de volúmenes finitos, los cuales deben satisfacer la propiedad de conservación de las ecuaciones. En los esquemas tipo Godunov, los flujos numéricos se evalúan considerando los problemas de Riemann (RP) que se generan en las interfaces de las celdas donde, de manera general, existen discontinuidades de las variables promediadas en cada celda. Los estados del problema de Riemann a cada lado de las interfaces resultan de proyectar o extrapolar los valores centrados de las variables a las caras de las celdas de modo que (Toro, 2009, por ejemplo):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{i \mp \frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{F} \left(\tilde{\mathbf{V}}_{i \mp \frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \tilde{\mathbf{G}}_{i,j \mp \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{G} \left(\tilde{\mathbf{V}}_{i,j \mp \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

siendo $\tilde{\mathbf{V}}_{i \mp \frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}}$ y $\tilde{\mathbf{V}}_{i, j \mp \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ las respectivas soluciones de los problemas de Riemann sobre cada interfaz:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_{i-\frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}} &= \text{RP} \left\{ \mathbf{V}_{i-1, j, E}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{V}_{i, j, W}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, & \tilde{\mathbf{V}}_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+\frac{1}{2}} &= \text{RP} \left\{ (\mathbf{V}_{i, j, E}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{V}_{i+1, j, W}^{n+\frac{1}{2}}) \right\}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_{i, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \text{RP} \left\{ \mathbf{V}_{i, j-1, N}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{V}_{i, j, S}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, & \tilde{\mathbf{V}}_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \text{RP} \left\{ \mathbf{V}_{i, j, N}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{V}_{i, j+1, S}^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

La forma de evaluar las variables promediadas en $n+\frac{1}{2}$ depende del orden y del tipo de esquema de integración temporal. Los subíndices E , W , N y S denotan las posiciones *este*, *oeste*, *norte* y *sur* de las caras de una celda, de acuerdo a la nomenclatura convencionalmente utilizada (ver Figura 1). Debe observarse que la notación $\tilde{}$ se utiliza para indicar que se trata de flujos numéricos.

La estimación de las variables en las interfaces de las celdas para obtener los valores que constituyen los estados del problema de Riemann en cada cara, determinan el orden de aproximación espacial del esquema. Los métodos tipo MUSCL (*monotone upwind scheme for conservation laws*) propuestos inicialmente por van Leer (1979), hacen una reconstrucción de la variable dentro de la celda utilizando los valores de las variables en las celdas vecinas para definir una función interpolante. Mediante esta función, la cual debe tener una forma tal que satisfaga las definiciones (12) y con ello la propiedad de conservación del método, se extrapola la variable desde el centro a las caras de cada celda. Adicionalmente, se suele emplear una función limitadora (FL) para forzar la preservación de monotonicidad del esquema en aproximaciones de orden superior (Toro, 2009, por ejemplo). Una vez definidos los estados del problema de Riemann, la solución del mismo se obtiene generalmente por medio de algún solver aproximado. El solver empleado debe satisfacer la propiedad de consistencia que exige que, ante un estado constante a través de la discontinuidad, el flujo numérico debe ser igual al flujo físico. Por otro lado, como veremos más adelante, para poder preservar el equilibrio hidrostático es necesario que el solver sea capaz de capturar discontinuidades de contacto, de modo que en cada dirección se obtenga:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \left(\text{RP} \left\{ \begin{bmatrix} \rho_{E^-} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho_{W^+} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \right\} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} \left(\text{RP} \left\{ \begin{bmatrix} \rho_{N^-} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho_{S^+} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \right\} \right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Esto significa que ante una condición de velocidad nula y presión constante a través de la discontinuidad, el flujo numérico debe ser igual al flujo físico. Los *solvers* de Riemann más utilizados (Roe, HLLC, HLLD, etc.) satisfacen esta propiedad.

Finalmente, resta evaluar el término fuente, que al igual que con las variables conservativas, se aproxima considerando una cantidad promediada en la celda y en el intervalo de tiempo, es decir:

$$\mathbf{S}_{i, j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t \Delta x \Delta y} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{x_i - \frac{\Delta x}{2}}^{x_i + \frac{\Delta x}{2}} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \mathbf{S}(x, y, t) \, dy dx dt. \quad (17)$$

Teniendo en cuenta nuestro caso particular de \mathbf{S} dado por la ecuación (6) y que la gravedad es sólo función de la coordenada y , el término fuente gravitatorio suele ser aproximado mediante

(Zingale et al., 2002):

$$\mathbf{S}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} g(y_j) \\ -(\rho v)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} g(y_j) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

donde la estimación de las variables conservativas ρ y ρv promediadas en el tiempo depende del orden de integración temporal.

2.1. Preservación del equilibrio hidrostático

Consideremos un problema cuya distribución inicial de presión y densidad satisface una condición de equilibrio hidrostático con velocidad nula ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) en todo el dominio. Naturalmente, éste es un problema estacionario en el cual sólo persiste la ecuación (8) que expresa el balance entre el gradiente de presión y el término fuente gravitatorio. Numéricamente, esta condición se manifiesta de la siguiente manera. En la dirección x el flujo numérico neto ($\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$) es nulo ya que la presión es constante en dirección horizontal y la velocidad es nula, por lo tanto, los problemas de Riemann asociados a esa dirección son triviales (estados constantes a través de la interfaz). Entonces, siendo que no existen términos fuente en dirección horizontal, la ecuación (13) indica que no se producen cambios en la componente ρu de cantidad de movimiento y consecuentemente la componente u de la velocidad permanece nula. En dirección paralela al eje y la situación es diferente debido a la acción de la gravedad. En este caso, la presión no es constante sino que responde a la ecuación (11), por lo tanto el flujo numérico neto ($\tilde{\mathbf{G}}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{G}}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$) no es nulo, y el equilibrio numérico será satisfecho sólo si dicho flujo neto y la aproximación del término fuente verifican la siguiente relación:

$$\frac{1}{\Delta y} \left(\tilde{\mathbf{G}}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{G}}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{S}_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que en la condición de equilibrio hidrostático la velocidad es nula en todo momento, todos los términos asociados a ella del vector de \mathbf{G} se anulan, con lo cual sólo persiste el término de la presión en la ecuación de cantidad de movimiento. De esta manera, la ecuación anterior se reduce a la forma discreta de la ecuación (8):

$$\frac{1}{\Delta y} \left(\tilde{p}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \tilde{p}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) = -\rho_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} g(y_j), \quad (20)$$

donde $\tilde{p}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ son las presiones resultantes de la solución de los problemas de Riemann en las interfaces $i, j \pm \frac{1}{2}$.

Estas últimas expresiones resumen los problemas que se presentan en los esquemas numéricos convencionales para satisfacer la condición de equilibrio hidrostático. En primer lugar, la componente de cantidad de movimiento paralela a la gravedad del flujo numérico debe ser consecuencia solamente de los términos de presión, lo cual implica que la solución de los problemas de Riemann en las interfaces no deben producir componentes de velocidad $\tilde{v}_{i,j\mp\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ distintas de cero, ya que de lo contrario la ecuación (19) no se reduce a la ecuación de equilibrio discreta (20). En segundo lugar, la evaluación numérica del término fuente gravitatorio en cada celda debe ser igual al flujo neto de cantidad de movimiento en dirección de la gravedad cuando el gas se encuentra en equilibrio hidrostático.

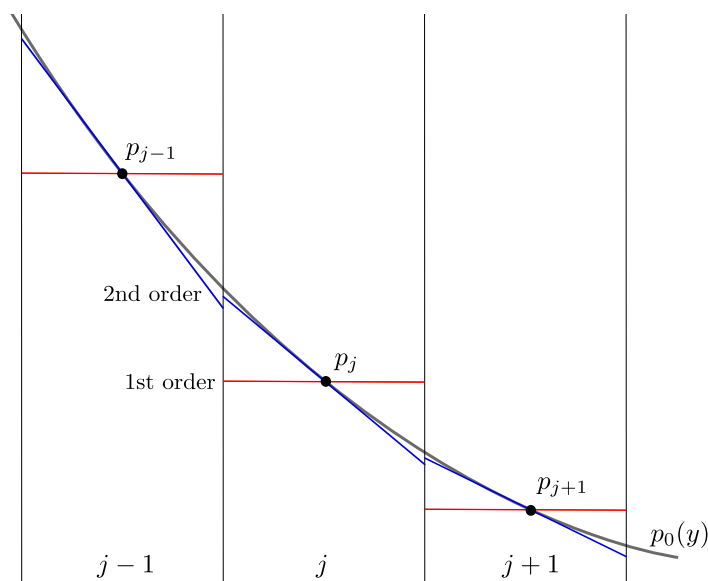


Figura 2: Esquema de reconstrucción de la presión en una grilla de volúmenes finitos.

En el primer caso, los métodos de reconstrucción MUSCL convencionales no permiten obtener la solución del problema de Riemann requerida por la ecuación (20) para satisfacer el equilibrio hidrostático, ya que una solución que de manera general mantenga las componentes de velocidad nulas bajo dicha condición se produce solamente cuando los estados de Riemann tienen, además de velocidad nula, presión constante a través de la discontinuidad, tal como expresa la ecuación (16). Utilizando una reconstrucción polinómica convencional no es posible capturar la distribución exponencial de la presión sobre las celdas para alcanzar el mismo valor, correspondiente a esa distribución, a cada lado de las interfaces. Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 2 para una reconstrucción de primer orden (presión constante sobre cada celda) y de segundo orden (variación lineal). Como puede verse, en la aproximación de primer orden la diferencia entre los estados de Riemann es evidente ya que los valores promediados de las variables obviamente son diferentes en cada celda. Al aumentar el orden de la aproximación por medio de una reconstrucción lineal el “salto” de presión disminuye en la interfaz aunque todavía persiste y no podrá eliminarse aun cuando se utilicen reconstrucciones polinómicas de mayor orden. Debido a esto, se inducen componentes de velocidad espurias en el vector de flujo correspondiente a la dirección de la gravedad que destruyen el equilibrio analítico que existe inicialmente. La magnitud de estas velocidades es proporcional al error de truncamiento del método, por lo tanto, puede en principio reducirse aumentando la resolución de la grilla hasta un punto donde su influencia sea despreciable. Sin embargo, esta estrategia no siempre es posible ya que la presencia de grandes gradientes de presión pueden requerir muy fuertes refinamientos que incrementan excesivamente el costo computacional.

El otro aspecto en el cual los esquemas convencionales presentan problemas es la evaluación del término fuente gravitatorio. Teniendo en cuenta que bajo una condición de equilibrio la densidad sólo depende de la coordenada y cuando la dirección de la gravedad se encuentra alineada con esa dirección, la promediación de la ecuación (17) para el término fuente $-\rho g$ es simplemente:

$$\overline{(\rho g)}_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \rho g \, dy. \quad (21)$$

Nótese que esta expresión puede diferir considerablemente del segundo miembro de la ecuación (20) ya que, en general, la densidad varía exponencialmente con la altura y además la gravedad también puede presentar una variación no lineal. Al igual que en el caso anterior, dicha discrepancia se reduce al refinar la grilla y la solución numérica converge al equilibrio.

De acuerdo a lo anterior, resulta claro que las definiciones convencionales de los métodos de volúmenes finitos tipo Godunov no son capaces de reproducir exactamente la condición de equilibrio hidrostático. La capacidad de un esquema numérico de satisfacer numéricamente una condición de equilibrio dio origen al concepto de esquemas *well-balanced*, que fue introducido por Greenberg y Leroux (1996) para caracterizar a los esquemas capaces de satisfacer exactamente en forma numérica un estado estacionario. En el caso particular del equilibrio hidrostático, numerosos esquemas *well-balanced* han sido desarrollados para modelar diferentes tipos de problemas que involucran dicha condición (Fuchs et al., 2010; Miyoshi et al., 2010; Käppeli y Mishra, 2016; Krause, 2019, entre otros). Entre estos esquemas, los más simples son aquellos basados en una *reconstrucción hidrostática local*, mediante la cual es posible definir los estados de Riemann a cada lado de las interfaces considerando la acción de la gravedad, permitiendo así que el esquema numérico reproduzca la ecuación discreta (19). Con este enfoque, las ecuaciones de gobierno y el esquema numérico no se ven afectados ya que la característica *well-balanced* se alcanza a través de la correcta extrapolación de las variables (fundamentalmente la presión) a las caras de las celdas. Esto permite que la implementación del método en códigos existentes sea relativamente simple.

3. ESQUEMA DE RECONSTRUCCIÓN HIDROSTÁTICA LOCAL

El esquema *well-balanced* más simple para modelar problemas asociados a condiciones de equilibrio hidrostático consiste en considerar el logaritmo natural de las variables termodinámicas para llevar a cabo la reconstrucción, tal como se propone en Fuchs et al. (2010). Esto equivale a asumir que el equilibrio hidrostático es isotérmico con aceleración de la gravedad constante, ya que bajo esa situación la distribución de presión y densidad es exponencial en función de la altura. Naturalmente, para distribuciones de temperatura arbitrarias o frente a grandes escalas de altura, como es usual en múltiples aplicaciones de la física solar, dichas condiciones de equilibrio hidrostático ya no se cumplen y el esquema numérico basado en la reconstrucción logarítmica no preserva exactamente el equilibrio.

En Krause (2019) proponemos un esquema *well-balanced* basado en la reconstrucción hidrostática local extendido, el cual satisface esta propiedad aun en modelos atmosféricos con gravedad variable admitiendo una variación lineal de la temperatura. Esta formulación se obtiene por medio la solución (11) de la ecuación de altura para imponer la distribución de presión hidrostática dentro de la celda, tomando como presión de referencia el valor centrado en celda, es decir:

$$p_{0i,j}(y) = p_{i,j} \exp \left(- \int_{y_j}^y \frac{g(y')}{RT(y')} dy' \right), \quad y_j - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y_j + \frac{\Delta y}{2}. \quad (22)$$

Como se explica en Krause (2019), la forma de estimar la distribución de temperatura en la celda es lo que permite alcanzar la propiedad *well-balanced* para los casos de temperatura constante o temperatura linealmente variable.

En una condición de equilibrio hidrostático, este tipo de extrapolación permite obtener problemas de Riemann con estados constantes en cada interfaz, lo cual conduce a que los flujos numéricos en dirección de la gravedad resulten iguales a la presión hidrostática inicial. Por lo

tanto, para preservar numéricamente el equilibrio, sólo resta verificar que el término fuente gravitatorio sea exactamente compensado por el flujo neto de cantidad de movimiento, lo cual se logra escribiendo una versión “discretizada” de la ecuación de altura:

$$\frac{(\Delta p_0)_{i,j}}{\Delta y} = -\frac{1}{\Delta y} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \rho g \, dy,$$

por lo tanto podemos escribir:

$$-\frac{1}{\Delta y} \int_{y_j - \frac{\Delta y}{2}}^{y_j + \frac{\Delta y}{2}} \rho g \, dy = \frac{p_{0i,j}(y_j + \frac{\Delta y}{2}) - p_{0i,j}(y_j - \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y}, \quad (23)$$

donde $p_{0i,j}(y_j \pm \frac{\Delta y}{2})$ son las presiones extrapoladas a las caras según la ecuación hidrostática (22). El vector de términos fuente resulta entonces

$$\mathbf{S}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta y} [p_{0i,j}(y_j + \frac{\Delta y}{2}) - p_{0i,j}(y_j - \frac{\Delta y}{2})] \\ \frac{(\rho v)_{i,j}}{\rho_{i,j}} \frac{1}{\Delta y} [p_{0i,j}(y_j + \frac{\Delta y}{2}) - p_{0i,j}(y_j - \frac{\Delta y}{2})] \end{bmatrix}. \quad (24)$$

La extrapolación que proponemos en Krause (2019) básicamente consiste en asumir una distribución lineal de la temperatura en la celda la cual se obtiene a partir de una reconstrucción lineal convencional, y con ella es posible obtener expresiones analíticas de la ecuación (22) tanto para el caso con gravedad constante como con gravedad variable. En ese sentido, dentro de una celda puede encontrarse alguno de los siguientes casos para evaluar la presión de acuerdo a la pendiente de temperatura $\Delta T_{i,j}$ obtenida mediante la reconstrucción lineal y al modelo de gravedad utilizado:

- Gravedad constante y temperatura constante

$$p_{0i,j}(y) = p_{i,j} \exp \left[-\frac{g}{RT_{i,j}} (y - y_j) \right]. \quad (25)$$

- Gravedad constante y gradiente térmico constante

$$p_{0i,j}(y) = p_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta T_{i,j}}{T_{i,j} \Delta y} (y - y_j) \right]^{-g/(R\Delta T_{i,j}/\Delta y)}. \quad (26)$$

- Gravedad variable y temperatura constante

$$p_{0i,j}(y) = p_{i,j} \exp \left[-\frac{GM}{RT_{i,j}} \frac{y - y_j}{(R_0 + y)(R_0 + y_j)} \right]. \quad (27)$$

- Gravedad variable y gradiente térmico constante

$$p_{0i,j}(y) = p_{i,j} \exp \left\{ \frac{-GM}{R[T_{i,j} - (R_0 + y_j)\Delta T_{i,j}/\Delta y]} \times \left[\frac{y - y_j}{(R_0 + y)(R_0 + y_j)} - \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta y} \frac{\ln \left[\frac{T_{i,j}(R_0 + y)}{[T_{i,j} + \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta y}(y - y_j)](R_0 + y_j)} \right]}{T_{i,j} - \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta y}(R_0 + y_j)} \right] \right\}. \quad (28)$$

Las cuales fueron obtenidas asumiendo que es válida la ecuación de estado de los gases ideales.

Habiendo impuesto la variación de temperatura dentro de la celda, el perfil de densidad que satisface el equilibrio hidrostático en dicha región está dado directamente por la ecuación de estado y $p_{0i,j}$, es decir:

$$\rho_{0i,j}(y) = \frac{p_{0i,j}(y)}{R[T_{i,j} + \frac{\Delta T_{i,j}}{\Delta y}(y - y_j)]} \tag{29}$$

Con estas expresiones es posible evaluar la presión y la densidad de los estados de los problemas de Riemann en cada interfaz normal a la dirección de la gravedad. Con esto obtenemos una reconstrucción hidrostática local.

3.1. Aproximación de primer orden

En los esquemas tipo Godunov convencionales, una aproximación de primer orden se alcanza simplemente extrapolando el valor centrado en las celdas de las variables a las respectivas caras, es decir que se asume que las mismas son constantes independientemente de los valores de las variables en las celdas vecinas. En la reconstrucción hidrostática local de primer orden el razonamiento es similar, aunque en este caso debe considerarse la acción de la gravedad para extrapolar los valores centrados de presión y densidad a las caras S y N :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho_{i,j,S} \\ u_{i,j,S} \\ v_{i,j,S} \\ p_{i,j,S} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_{0i,j}(y_j - \frac{\Delta y}{2}) \\ u_{i,j} \\ v_{i,j} \\ p_{0i,j}(y - \frac{\Delta y}{2}) \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{0i,j,S}, \\ \begin{bmatrix} \rho_{i,j,N} \\ u_{i,j,N} \\ v_{i,j,N} \\ p_{i,j,N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_{0i,j}(y_j + \frac{\Delta y}{2}) \\ u_{i,j} \\ v_{i,j} \\ p_{0i,j}(y + \frac{\Delta y}{2}) \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{0i,j,N}, \end{aligned} \tag{30}$$

donde hemos utilizado la notación $\mathbf{V}_{0i,j,X}$ para indicar el vector de variables primitivas extrapoladas a las caras (con $X = S, N$) asumiendo equilibrio hidrostático.

El término fuente gravitatorio se calcula con la ecuación (24), y con ello ya es posible evaluar la ecuación discreta (13) para obtener la solución aproximada del problema. Debe tenerse en cuenta que la reconstrucción de los estados de Riemann aquí planteada sólo permite una aproximación de primer orden de precisión espacial cuando las condiciones se apartan del equilibrio hidrostático.

3.2. Aproximación de segundo orden

En los métodos de reconstrucción tipo MUSCL el segundo orden de precisión espacial se alcanza aproximando las variables primitivas del problema mediante una recta, de modo que la variable genérica ϕ en la celda i, j en dirección de la coordenada y es:

$$\bar{\phi}_{i,j}(y) = \phi_{i,j} + \frac{\Delta\phi_{i,j}}{\Delta y}(y - y_j), \quad y - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y_j + \frac{\Delta y}{2}, \tag{31}$$

donde $\Delta\phi_{i,j}$ es una variación “limitada” por medio de alguna función limitadora de manera de obtener una aproximación que preserve la monotonicidad de la solución. Naturalmente, una reconstrucción estándar como ésta conduce a un esquema convencional que no preserva el equilibrio hidrostático, por lo tanto, aunque esta reconstrucción sí puede aplicarse para las

componentes de la velocidad, deben realizarse algunas consideraciones para tener en cuenta la acción de la gravedad sobre la densidad y la presión. En ese sentido, utilizamos la metodología propuesta por Käppeli y Mishra (2016), el cual consiste en descomponer la presión en un término hidrostático p_0 y un término de “apartamiento” del equilibrio p' , el cual no necesariamente es pequeño, por lo tanto, para la celda i, j se escribe:

$$p_{i,j}(y) = p_{0i,j}(y) + p'_{i,j}(y). \quad (32)$$

La reconstrucción hidrostática local de segundo orden para la presión se obtiene por medio de la reconstrucción lineal del apartamiento $p'_{i,j}$, para lo cual es necesario estimar los apartamientos $p'^-_{i,j}$ y $p'^+_{i,j}$ correspondientes a las celdas vecinas $i, j \mp 1$, teniendo en cuenta que el valor centrado $p'_{i,j}$ es nulo, ya que $p_{0i,j}(y_j) = p_{i,j}$ es la presión de referencia en la reconstrucción hidrostática local. Los apartamientos $p'^-_{i,j}$ y $p'^+_{i,j}$ se calculan extrapolando la presión hidrostática $p_{0i,j}(y)$ a los centros de las celdas vecinas para comparar dichos valores con los valores centrados $p_{i,j \mp 1}$ de cada celda vecina, de acuerdo a lo propuesto por Käppeli y Mishra (2016):

$$\begin{aligned} p'^-_{i,j} &= p_{i,j-1} - p_{0i,j}(y_{j-1}), \\ p'^+_{i,j} &= p_{i,j+1} - p_{0i,j}(y_{j+1}). \end{aligned} \quad (33)$$

Con estos valores, teniendo en cuenta que por definición es $p'_{i,j} = 0$, se obtiene la variación lineal $\Delta p'_{i,j}$ del apartamiento por medio de una función limitadora:

$$\Delta p'_{i,j} = \text{FL} \left\{ \Delta p'^-_{i,j}, \Delta p'^+_{i,j} \right\}.$$

y la presión dentro de la celda finalmente es:

$$\bar{p}_{i,j}(y) = p_{0i,j}(y) + \frac{\Delta p'_{i,j}}{\Delta y}(y - y_j), \quad y - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y + \frac{\Delta y}{2}. \quad (34)$$

Mediante un procedimiento similar, escribiendo la densidad como la suma de la distribución hidrostática local y el apartamiento de la misma, se obtiene una reconstrucción hidrostática local de segundo orden para dicha variable:

$$\bar{\rho}_{i,j}(y) = \rho_{0i,j}(y) + \frac{\Delta \rho'_{i,j}}{\Delta y}(y - y_j), \quad y - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y + \frac{\Delta y}{2}. \quad (35)$$

Con estas últimas definiciones podemos obtener los estados para construir los problemas de Riemann en las caras de la celda i, j normales a la dirección de la gravedad para una aproximación de segundo orden de precisión espacial que resulta *well-balanced* para ciertas condiciones de equilibrio hidrostático:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho_{i,j,S} \\ u_{i,j,S} \\ v_{i,j,S} \\ p_{i,j,S} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_{0i,j}(y_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\Delta \rho'_{i,j} \\ u_{i,j} - \frac{1}{2}\Delta u_{i,j} \\ v_{i,j} - \frac{1}{2}\Delta v_{i,j} \\ p_{0i,j}(y_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\Delta p'_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{0i,j,S} - \frac{1}{2}\Delta \mathbf{V}'_{i,j}, \\ \begin{bmatrix} \rho_{i,j,N} \\ u_{i,j,N} \\ v_{i,j,N} \\ p_{i,j,N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_{0i,j}(y_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\Delta \rho'_{i,j} \\ u_{i,j} + \frac{1}{2}\Delta u_{i,j} \\ v_{i,j} + \frac{1}{2}\Delta v_{i,j} \\ p_{0i,j}(y_{j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\Delta p'_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{0i,j,N} + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{V}'_{i,j}, \end{aligned} \quad (36)$$

donde las variaciones $\Delta u_{i,j}$ y $\Delta v_{i,j}$ se determinan mediante una reconstrucción convencional.

La evaluación del término fuente se hace con la ecuación (24), ya que éste se calcula considerando el gradiente discreto de presión hidrostática, el cual no depende del orden de la aproximación del esquema de reconstrucción hidrostática local. Como vemos, con estas definiciones el esquema preservará el equilibrio hidrostático en condiciones de temperatura constante o gradiente térmico constante, ya que en esas condiciones los apartamientos p' y ρ' son nulos y consecuentemente las pendientes $\Delta p'$ y $\Delta \rho'$ son también nulas, obteniéndose de esa forma estados de Riemann constantes en cada interfaz.

3.3. Condiciones de contorno

Como sabemos, el tratamiento de las condiciones de contorno es un aspecto sumamente importante en cualquier simulación numérica de dinámica de los fluidos, pero en el caso particular de problemas con atmósferas gravitacionalmente estratificadas adquiere una relevancia fundamental, ya que cualquier desequilibrio proveniente de los bordes propagará velocidades espurias al interior del dominio aunque nuestro esquema numérico sea en efecto *well-balanced*.

En el método de Godunov, la forma de modelar una condición de contorno de Neumann para la velocidad en un borde normal a la dirección de la aceleración de la gravedad consiste en extrapolar a las celdas fantasma los valores de presión y densidad que surgen de considerar la acción de la gravedad, tomando como valores de referencia aquéllos correspondientes la última celda del dominio físico, es decir:

$$\begin{aligned} p_{i,-J} &= p_{i,1} \exp \left(- \int_{y_1}^{y-J} \frac{g(y')}{RT(y')} dy' \right) && \text{(borde inferior),} \\ p_{i,M+J} &= p_{i,M} \exp \left(- \int_{y_M}^{y_{M+J}} \frac{g(y')}{RT(y')} dy' \right) && \text{(borde superior),} \end{aligned} \quad (37)$$

con $J = 1, \dots, n_g$, siendo n_g el número de celdas fantasma. Los subíndices 1 y M corresponden a la primera y la última celda del dominio físico en dirección del eje y .

Para poder evaluar las integrales anteriores es necesario imponer una ley de variación de la temperatura, lo cual puede hacerse considerando diferentes posibilidades dependiendo del tipo de problema. La opción más simple es la de considerar temperatura constante $T = T_{i,1}$ en el borde inferior y $T = T_{i,M}$ en el borde superior, con lo cual las ecuaciones (37) adquieren la forma de la ecuación (25) o (27) dependiendo del modelo gravitatorio utilizado. La suposición $T = \text{cte}$ en el contorno funciona muy bien cuando existe poco cambio de temperatura en las regiones cercanas a cada borde. Cuando las variaciones térmicas son importantes conviene emplear una extrapolación lineal de la temperatura desde el interior del dominio hacia las celdas fantasma. En ese caso la temperatura en la región fantasma varía según

$$\begin{aligned} T(y) &= T_{i,1} + \frac{\Delta T_g^-}{\Delta y} (y_1 - y) && \text{(borde inferior),} \\ T(y) &= T_{i,M} + \frac{\Delta T_g^+}{\Delta y} (y_M - y) && \text{(borde superior),} \end{aligned} \quad (38)$$

donde las pendientes $\Delta T_g^\mp / \Delta y$ se obtienen considerando la variación de la temperatura en las celdas adyacentes a los contornos. Con esta aproximación, las ecuaciones (37) tienen la forma de la ecuación (26) o (28) dependiendo del modelo de gravedad.

Una vez calculadas las presiones, los valores de densidad en las celdas fantasma se determinan por medio de la ecuación de estado tanto para el caso de temperatura constante como

	Corona solar	Región de transición
T_0 [K]	10^6	5000
$\Delta T/\Delta y$ [K cm $^{-1}$]	0	$1,98 \times 10^{-2}$
ρ_0 [g cm $^{-3}$]	10^{-16}	10^{-11}
H [Mm]	100	0,5

Tabla 1: Datos para la simulación de la corona solar y de la región de transición, siendo T_0 la temperatura en la base, $\Delta T/\Delta y$ el gradiente térmico en dirección de la altura, ρ_0 la densidad en la base, H la altura del dominio. En ambos casos se toma $\gamma = 5/3$, $g_0 = 2,74 \times 10^4 \text{ cm s}^{-2}$ (aceleración de la gravedad en la base), $R_0 = 696 \text{ Mm}$ (radio solar), $R = 16,6289196 \times 10^7 \text{ erg (K mol)}^{-1}$ (resulta de asumir una atmósfera de hidrógeno totalmente ionizado).

de temperatura con variación lineal. El resto de las variables (velocidad, campo magnético) se computan de acuerdo a la condición de borde independientemente de de la extrapolación hidrostática de las variables termodinámicas.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se analiza el desempeño del esquema de reconstrucción hidrostática local presentado en la sección anterior en comparación con un esquema estándar con reconstrucción lineal y un esquema con reconstrucción logarítmica. El objetivo del análisis es comprobar la superioridad del esquema propuesto en Krause (2019) para el tratamiento numérico de atmósferas en reposo con gravedad variable. Además de esto, se busca evaluar el costo computacional adicional que implica el cómputo de la extrapolación hidrostática de la presión para determinar si esto representa una limitación para la implementación de este tipo de formulaciones.

Los resultados numéricos se obtienen por medio del algoritmo USM (*unsplit staggered mesh*) de la versión 4.5 del código FLASH (Fryxell et al., 2000), al cual se le ha implementado el esquema de reconstrucción hidrostática local aquí presentado. Los detalles de la implementación en el algoritmo mencionado pueden consultarse en Krause (2019).

Para el análisis se consideran dos modelos de atmósfera, uno isotérmico y otro con variación lineal de la temperatura, cuyos parámetros emulan los valores típicos encontrados en la corona y en la región de transición de la atmósfera solar. En la Tabla 1 se muestran los parámetros utilizados en las simulaciones.

Teniendo en cuenta que las escalas de tiempo de varios procesos astrofísicos de interés que se registran en la atmósfera solar pueden ser del orden de varios minutos o inclusive horas, aquí evaluaremos la capacidad de los esquemas numéricos (con reconstrucción lineal, con reconstrucción logarítmica y con reconstrucción hidrostática) de preservar la condición de equilibrio inicial luego de 1000 segundos de simulación ($t_f = 1000 \text{ s}$). La evaluación se hace por medio de la norma L^1 del error en la distribución de presión, la cual está dada por la diferencia entre la distribución inicial de la presión $p(y, t = 0)$ y la distribución final de la misma $p(y, t_f)$, es decir:

$$L_p^1 = \frac{\sum_{j=1}^{N_y} |p_j(0) - p_j(t_f)|}{\sum_{j=1}^{N_y} p_j(0)}, \quad (39)$$

donde N_y es el número de celdas de la discretización.

Por otro lado, también se evalúa la velocidad que induce numéricamente cada esquema, ya que la condición de equilibrio implica que la velocidad es nula en todo momento. Para ello, simplemente se determina la velocidad máxima (en magnitud) que se registra en el dominio en

relación a una velocidad de referencia, que aquí tomamos la velocidad del sonido correspondiente a la temperatura de referencia ($V_{\text{ref}} = \sqrt{\gamma RT_0}$).

El primer análisis corresponde a la corona solar, para la cual se asume un medio isotérmico y una gran escala de altura, comparable con la dimensión del radio solar, tal como se indica en la Tabla 1. Esto hace que la gravedad no pueda asumirse constante en simulaciones realistas donde se estudia, por ejemplo, la evolución de las eyecciones coronales de masa, la estabilidad de filamentos, o la propagación de ondas en el medio interplanetario, etc. En algunas de estas aplicaciones es necesario garantizar la preservación del equilibrio hidrostático del medio, de modo que no se generen velocidades espurias que pudieran enmascarar o alterar los fenómenos físicos estudiados. En la Figura 3 se muestra la evolución del error en función del número de celdas de la discretización en dirección y , la variación de la velocidad máxima relativa a la velocidad de referencia y el tiempo de cómputo. De la misma manera, los resultados del análisis de la preservación del equilibrio hidrostático en la región de transición se presentan en la Figura 4, donde se grafica la convergencia de la norma L^1 del error de la presión y la velocidad máxima en relación a la velocidad de referencia en función del número de celdas en dirección y , además del tiempo de cómputo. En este caso, aunque la escala de altura es relativamente pequeña con lo cual la aceleración de la gravedad no varía much dentro de esta región, el efecto del gradiente térmico constante hace fallar al esquema de reconstrucción logarítmica. Cabe destacar que el estudio numérico del plasma en la baja atmósfera solar (cromósfera y región de transición) es de gran interés para la Heliosismología, ya que las ondas que se propagan a través dichas regiones que son forzadas desde el interior del sol brindan valiosa información de la actividad de la superficie solar.

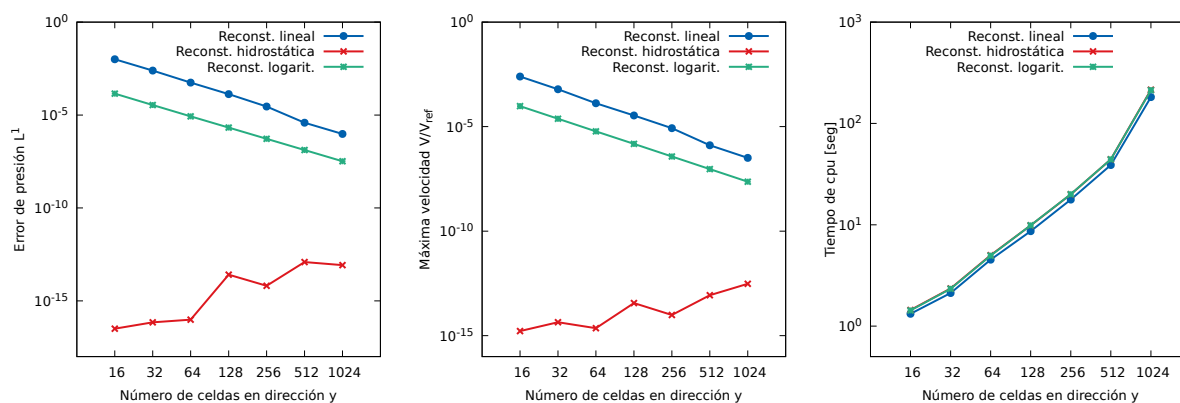


Figura 3: Gráficos de convergencia y de tiempo de cálculo de la simulación de una condición de equilibrio hidrostático isotérmico considerando gravedad variable con los datos de la Tabla 1. Nótese que las curvas de tiempo de cómputo correspondientes al esquema con reconstrucción logarítmica y con reconstrucción hidrostática quedan superpuestas.

Como vemos en las figuras, los resultados numéricos de ambos casos de prueba exhiben los comportamientos esperados. Tanto el esquema estándar con reconstrucción lineal como el esquema con reconstrucción logarítmica muestran las curvas típicas de “superconvergencia” de tercer orden en problemas de preservación del equilibrio hidrostático, tal como fue reportado en trabajos anteriores (Fjordholm et al., 2011; Käppeli y Mishra, 2016). Estos resultados muestran que la utilización de un esquema con reconstrucción logarítmica en problemas con atmósferas estratificadas con gravedad variable no preserva el equilibrio hidrostático pudiendo generarse grandes desviaciones de la condición de equilibrio con velocidades espurias importantes cuando se emplean grillas poco refinadas. Por otro lado, el esquema con reconstrucción hidrostática

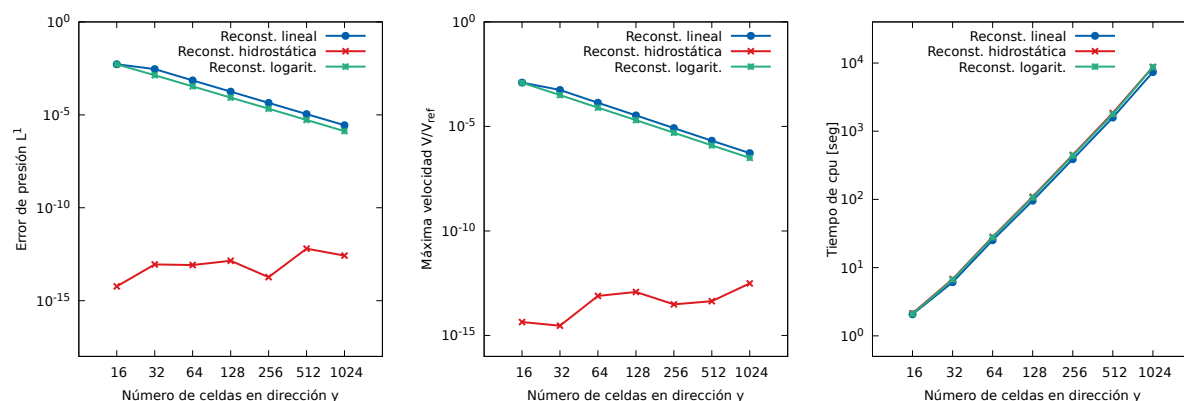


Figura 4: Gráficos de convergencia y de tiempo de cálculo de la simulación de una condición de equilibrio hidrostático isotérmico considerando gravedad variable con los datos de la Tabla 1. Nótese que las curvas de tiempo de cómputo correspondientes al esquema con reconstrucción logarítmica y con reconstrucción hidrostática quedan superpuestas.

local produce errores del orden del error de redondeo independientemente del número de celdas utilizadas en la discretización, lo cual evidencia la propiedad *well balanced* del mismo. En cuando a los tiempos de procesamiento, podemos apreciar en las figuras que no existen grandes diferencias entre el costo computacional del esquema estándar (reconstrucción lineal) y los esquemas de reconstrucción hidrostática, lo cual justifica la implementación de este tipo de esquemas.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un esquema numérico basado en la técnica de la reconstrucción hidrostática local para el tratamiento de problemas de flujo que se desarrollan en atmósferas gravitacionalmente estratificadas. En primer término analizamos la capacidad de un esquema de reconstrucción logarítmica que usualmente se emplea en este tipo de problemas (Fuchs et al., 2010) para modelar el equilibrio hidrostática en condiciones de gravedad variable con grandes escalas de altura y en presencia de gradientes térmicos no nulos. Luego comparamos estos resultados con los obtenidos por medio de nuestro esquema de reconstrucción hidrostática (Krause, 2019), el cual ha sido formulado para satisfacer numéricamente las condiciones de equilibrio mencionadas. Los resultados numéricos muestran que, aunque el esquema con reconstrucción logarítmica tiene un mejor comportamiento que el esquema estándar con reconstrucción lineal, éste igualmente introduce errores importantes en la preservación del equilibrio, especialmente en presencia de gradientes térmicos elevados, lo cual justifica la implementación de esquemas formulados con condiciones de equilibrio más generales como el que aquí se propone. Por otro lado, también se ha mostrado que el costo computacional de los esquemas con reconstrucción hidrostática no varía significativamente del correspondiente al esquema con reconstrucción lineal, por lo tanto, este aspecto no representa una limitación para la implementación de esquemas *well-balanced*.

REFERENCIAS

- Aschwanden M.J. *Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions*. Springer, 2nd edición, 2005.
- Balsara D.S. y Spicer D.S. A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations. *J. Comput. Phys.*,

- 149(2):270–292, 1999.
- Cargo P. y Gallice G. Roe Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe Matrices for Systems of Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 136(2):446–466, 1997.
- Colella P. y Woodward P.R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations. *J. Comput. Phys.*, 54:174–201, 1984.
- Fjordholm U.S., Mishra S., y Tadmor E. Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography. *1997JCoPh.136.446C*, 230(14):5587–5609, 2011.
- Fryxell B., Olson K., Ricker P., Timmes F.X., Zingale M., Lamb D.Q., MacNeice P., Rosner R., Truran J.W., y Tufo H. FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *Astrophys. J. Suppl. S.*, 131(1):273–334, 2000.
- Fuchs F.G., McMurry A.D., Mishra S., Risebro N.H., y Waagan K. High order well-balanced finite volume schemes for simulating wave propagation in stratified magnetic atmospheres. *J. Comput. Phys.*, 229(11):4033–4058, 2010.
- Gardiner T.A. y Stone J.M. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *J. Comput. Phys.*, 205(2):509–539, 2005.
- Greenberg J.M. y Leroux A.Y. A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):1–16, 1996.
- Gurski K. An HLLC-Type Approximate Riemann Solver for Ideal Magnetohydrodynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:2165–2187, 2004. doi:10.1137/S1064827502407962.
- Käppeli R. y Mishra S. A well-balanced finite volume scheme for the Euler equations with gravitation. The exact preservation of hydrostatic equilibrium with arbitrary entropy stratification. *Astron. Astrophys.*, 587:A94, 2016.
- Krause G. On hydrostatic equilibrium preservation in MHD numerical simulations with stratified atmospheres. *Astron. Astrophys.*, en prensa, 2019.
- Miyoshi T. y Kusano K. A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 208(1):315–344, 2005.
- Miyoshi T., Terada N., Matsumoto Y., Fukazawa K., Umeda T., y Kusano K. The HLLD Approximate Riemann Solver for Magnetospheric Simulation. *IEEE T. on Plasma Sci.*, 38(9):2236–2242, 2010.
- Pen U.L., Arras P., y Wong S. A Free, Fast, Simple, and Efficient Total Variation Diminishing Magnetohydrodynamic Code. *Astrophys. J. Suppl. S.*, 149(2):447–455, 2003.
- Powell K.G. Approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension). Informe Técnico, 1994.
- Powell K.G., Roe P.L., Linde T.J., Gombosi T.I., y De Zeeuw D.L. A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 154(2):284–309, 1999.
- Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 3rd edición, 2009.
- van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method. *1997JCoPh.136.446C*, 32(1):101–136, 1979.
- Ziegler U. A central-constrained transport scheme for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 196(2):393–416, 2004.
- Zingale M., Dursi L.J., ZuHone J., Calder A.C., Fryxell B., Plewa T., Truran J.W., Caceres A., Olson K., Ricker P.M., Riley K., Rosner R., Siegel A., Timmes F.X., y Vladimirova N. Mapping Initial Hydrostatic Models in Godunov Codes. *Astrophys. J. Suppl. S.*, 143(2):539–565, 2002.