

RELACIÓN CARACTERÍSTICA EN INTERMITENCIA TIPO-II CHARACTERISTIC RELATION IN TYPE-II INTERMITTENCY

Sergio A. Elaskar^{a,b}, Denis Lorenzón^b y Ezequiel del Río^c

^a*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), CONICET y Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, selaskar@unc.edu.ar*

^b*Dpto. Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina*

^c*Departamento de Física. ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid, España*

Palabras clave: intermitencia tipo-II, relación característica, caos.

Resumen. Intermitencia es una ruta hacia caos donde soluciones de sistemas dinámicos muestran alternancia entre comportamientos regulares (o laminares) y caóticos (o fases no regulares). Las fases laminares se corresponden con zonas de pseudo-equilibrio y/o soluciones pseudo-periódicas. En mecánica de fluidos el fenómeno de intermitencia tiene un importante papel en flujos turbulentos. En este trabajo se analiza la relación característica en intermitencia tipo-II cuando la función probabilidad de reinyección es uniforme. Tradicionalmente se han propuesto dos relaciones características en las cuales el parámetro de control aparece elevado a $-1/2$ y a -1 respectivamente. Se estudia bajo que condiciones cada una de las relaciones es correcta. Los resultados teóricos propuestos se verifican mediante simulaciones numéricas mostrando una elevada concordancia.

Keywords: type-II intermittency, characteristic relation, chaos.

Abstract. Intermittency is a route to chaos where the dynamical system solutions show alternation between regular (or laminar) and chaotic (or non-regular) behaviors. The laminar phases correspond to pseudo-equilibrium zones and/or pseudo-periodic solutions. In fluid mechanics, the intermittency phenomenon plays an important role in turbulent flows. In this paper, the characteristic relation for type-II intermittency is analyzed when the reinjection probability function is uniform. Traditionally, two characteristic relations have been proposed in which the control parameter appears elevated to $-1/2$ and -1 respectively. In this paper under what conditions each of the relations is correct is studied. The proposed theoretical results are verified by numerical simulations showing high accuracy.

1. INTRODUCCIÓN

La palabra intermitencia fue empleada por Batchelor y Townsend en 1949 para describir algunos datos observacionales relacionados con las fluctuaciones de velocidad en flujos turbulentos (Batchelor y Townsend, 1949). Desde entonces, se ha observado intermitencia en varios fenómenos fluido dinámicos como el sistema de Lorenz, convección de Rayleigh-Bénard, física del plasmas, y también en variados fenómenos físicos como en osciladores armónicos, circuitos electrónicos, etc. (Sparrow, 1982; Dubois et al., 1983; Stavrínides et al., 2008; Sanmartín et al., 2004; Sánchez-Arriaga et al., 2007; Elaskar y del Río, 2017). Además, se ha utilizado el concepto de intermitencia caótica para describir el comportamiento de sistemas en economía y medicina (Chian, 2007; Zebrowski y Baranowski, 2004; Paradisi et al., 2012).

Hay, por lo menos, tres rutas en las cuales sistemas dinámicos y/o mapas pueden evolucionar desde comportamientos regulares hacia caos: duplicación del período, ruta cuasiperiódica e intermitencia. En intermitencia caótica las soluciones de sistemas dinámicos tienen transiciones entre fases regulares o laminares y períodos caóticos o fases no regulares. Las fases laminares son regiones de pseudo-equilibrio y/o soluciones pseudo-periódicas, mientras que las fases no regulares son regiones donde la evolución es caótica. Tradicionalmente, la intermitencia ha sido clasificada en tres tipos diferentes llamados I, II y III (Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018) de acuerdo con los multiplicadores de Floquet de la solución periódica del sistema continuo o según los valores propios valuados en el punto fijo del mapa local de Poincaré (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018). En intermitencia tipo-I, II y III, cuando un parámetro de control excede un valor umbral, un punto fijo del mapa local de Poincaré se vuelve inestable o incluso desaparece. Estudios más recientes han extendido la clasificación a otros tipos de intermitencias como el tipo V, X, on-off, eyelet, ring, e in-out.

La intermitencia caótica puede ser estudiada utilizando mapas de Poincaré (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Elaskar y del Río, 2017). Las dos características principales que determinan la intermitencia caótica son: 1) un mapa local específico y 2) un mecanismo de reinyección. El mapa local determina el tipo de intermitencia, mientras que el mecanismo de reinyección mapea las trayectorias desde la zona caótica hacia la regular o laminar. Este mecanismo se describe mediante la función densidad de probabilidad de reinyección (RPD por sus siglas en inglés). Es importante destacar que la RPD está determinada por la dinámica caótica del propio sistema y especifica la probabilidad de que las trayectorias se reinyecten en la zona laminar (cerca del punto fijo) y, junto con el mapa local, especifican las propiedades de la intermitencia.

La intermitencia tipo-II aparece desde una bifurcación subcrítica de Hopf o de una bifurcación de Neimark-Sacker (Nayfeh y Balachandran, 1995; Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018), donde dos multiplicadores complejos-conjugados de Floquet del sistema o dos valores propios complejos-conjugados del mapa local de Poincaré se alejan del círculo unitario que determina la estabilidad. El mapa local de Poincaré para intermitencia tipo-II se puede escribir como:

$$x_{n+1} = (1 + \varepsilon)x_n + a x_n^3 \quad (1)$$

donde el parámetro de control ε y el coeficiente a son mayores que cero (del Río y Elaskar, 2010).

La función densidad de probabilidad de reinyección es fundamental para describir adecuadamente el fenómeno de la intermitencia. La teoría clásica de intermitencia caótica usó la hipótesis que la RPD es constante, es decir que el proceso de reinyección es uniforme. Sin em-

bargo, en los últimos años se ha desarrollado una nueva teoría que ha extendido el concepto de RPD y utiliza la metodología de la función M para obtener la expresión analítica de la misma. Esta teoría incluye a la reinyección uniforme sólo como un caso particular de una formulación más general (del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Krause et al., 2014a,b; Elaskar et al., 2015, 2016; del Río y Elaskar, 2016a,b; Elaskar et al., 2017; Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a,b; Elaskar y del Río, 2018).

En este trabajo analizamos, teórica y numéricamente, la relación característica para intermitencia tipo-II solamente cuando la reinyección es uniforme y buscamos introducir algo de claridad sobre la controversia en el exponente de dicha relación.

2. INTERMITENCIA TIPO-II

Intermitencia tipo-II aparece en mapas de dos o más dimensiones porque dos valores propios complejos-conjugados del punto fijo se alejan del círculo unitario. Hay una variedad bidimensional asociada a este par de valores propios complejos-conjugados (espacio bidimensional determinado por los vectores propios asociados con dichos valores propios). Se analiza la dinámica en esta variedad, porque los otros valores propios son en valor absoluto menores a 1. Se produce una bifurcación Hopf para el punto fijo del mapa, y los valores propios monodrómicos complejos se pueden escribir como: $\nu = (1 + \varepsilon)e^{i\theta}$. Siendo θ un ángulo. Localmente, la dinámica está controlada por un mapa bidimensional (Nayfeh y Balachandran, 1995):

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (1 + \varepsilon)r_n + a r_n^3; \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + b + q r_n^2 \end{aligned} \quad (2)$$

donde a , b and q son constantes, las cuales dependen del sistema dinámico en consideración. ε es el parámetro de control; si se verifica que $\varepsilon > 0$ entonces puede aparecer intermitencia.

Para describir la intermitencia tipo-II, se evalúan ciertos parámetros estadísticos tales como la función densidad de probabilidad de reinyección (RPD), la densidad de probabilidad de longitudes laminares, la longitud laminar media y la relación característica.

La teoría clásica considera una RPD uniforme y constante. Sin embargo, los otros parámetros estadísticos no son constantes. Para valores muy pequeños de ε es posible aproximar la primera ecuación de las Ecs. (2) por:

$$\frac{dr}{dl} = \varepsilon r + a r^3; \quad (3)$$

donde l mide el número de iteraciones en el intervalo laminar o longitud laminar.

Integrando la Ec. (3) se tiene que:

$$l(x, c) = \int_x^c \frac{dr}{\varepsilon r + a r^3} = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{a + \varepsilon/x^2}{a + \varepsilon/c^2} \right) \quad (4)$$

donde x es el punto de reinyección y c es el límite superior del intervalo laminar. Notar que el intervalo laminar es $[0, c]$.

La densidad de probabilidad de longitudes laminares especifica la probabilidad de encontrar longitudes laminares entre l y $l + dl$. En este trabajo, llamamos $\psi(l, c)$ a la densidad de probabilidad de longitudes laminares, la cual puede ser definida de la siguiente forma (Schuster y Just, 2005):

$$\psi(l) = \left[\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\varepsilon}{c^2} + a\right) e^{2\varepsilon l} - a} \right]^{3/2} \left(\frac{\varepsilon}{c^2} + a \right) \frac{e^{2\varepsilon l}}{c} \quad (5)$$

siendo $X(l, c)$ la inversa de $l(x, c)$ (ver Ec. (4)):

$$X(l, c) = \left[\frac{\varepsilon}{\left(a + \frac{\varepsilon}{c^2}\right) e^{2\varepsilon l} - a} \right]^{0,5} \quad (6)$$

La longitud laminar media está dada por:

$$\bar{l} = \int_0^c \phi(x)l(x)dx = k \int_0^c l(x)dx = (1/c) \int_0^c l(x)dx \quad (7)$$

Donde la RPD es constante y verifica la condición de normalización dada por

$$\int_0^c k dx = 1 \quad (8)$$

Es decir: $\phi(x) = k = 1/c$. Finalmente, se tiene que:

$$\bar{l} = \frac{1}{c\sqrt{a\varepsilon}} \arctan \left(c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (9)$$

La relación característica representa la variación de la longitud laminar media en función del parámetro de control. Se destaca, desde esta última ecuación, que la relación característica es no lineal.

Por medio de la Ec. (9) es posible realizar distintas consideraciones sobre la ecuación característica que se analizan en la siguiente sección.

3. RELACIÓN CARACTERÍSTICA

La dependencia funcional de longitud laminar media, \bar{l} , con el parámetro de control, ε , se denomina relación característica. Para intermitencia tipo-II está definida por la Ec. (9). Esta relación tiene relevancia porque establece la duración de los procesos laminares para distintos valores del parámetro de control. Es un hecho conocido que a medida que ε crece la longitud \bar{l} decrece, es decir las fases caóticas son más extensas.

La relación característica suele expresarse de la siguiente forma:

$$\bar{l} \sim \varepsilon^\beta. \quad (10)$$

Desde hace cuatro décadas se ha utilizado el exponente β como una forma de establecer el tipo de intermitencia (tipo-I, II o III). Sin embargo, para intermitencia tipo-II algunos trabajos indican que la relación característica satisface (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995):

$$\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}. \quad (11)$$

En cambio otros trabajos han establecido como válida la siguiente relación característica (Elaskar y del Río, 2017):

$$\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}. \quad (12)$$

Para estudiar cual de las dos alternativas es la más adecuada para intermitencia tipo-II, es necesario partir desde la relación característica dada por la Ec. (9). Es importante considerar que la validez de dicha ecuación está restringida por la condición $\varepsilon \ll 1$, de forma tal de poder pasar desde la formulación discreta a la continua, es decir desde la Ec. (2) hacia la Ec. (3). Por lo tanto, también se verifica que $\varepsilon < c$.

Para entender porque se han planteado las Ecs. (11) y (12) haremos el siguiente análisis de la Ec. (9). En el primer caso estudiaremos la influencia de la relación entre el parámetro de control ε y el tamaño del intervalo laminar c .

Si consideramos que $c = \mu \varepsilon^h$, siendo μ una constante mucho mayor que 1 y h un número real que verifica $h > 0,5$, la Ec. (9) resulta

$$\bar{l} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\mu \varepsilon^{h-1/2} \sqrt{a}} \arctan (\mu \varepsilon^{h-1/2} \sqrt{a}) \tag{13}$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu \varepsilon^{h-1/2} \sqrt{a}} \arctan (\mu \varepsilon^{h-1/2} \sqrt{a}) \rightarrow 1 \tag{14}$$

Entonces, se verifica la Ec. (11): $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$.

Otra forma de analizar la Ec. (9) es considerar que si $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces $c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow \infty$, por lo tanto:

$$\arctan \left(c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

verificándose la Ec. (12): $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

Para analizar la relación característica, valuamos la Ec. (9) para diferentes c y a . En un primer análisis, sin pérdida de generalidad y siguiendo a Maneville (Maneville, 1980), a puede ser tomado como $a = 1 - \varepsilon$. Los resultados son mostrados en las Figuras 1, 2, 3 para $c = 0,01$, $c = 0,1$ y $c = 1$ respectivamente. En cada figura están graficadas tres relaciones que son las dadas por la Ec. (9) en rojo, la Ec. (11) en azul y la Ec. (12) en verde. De las figuras se destaca que para $\varepsilon \rightarrow 0$ la relación característica verifica $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$ y para ε mas grandes se satisface $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$.

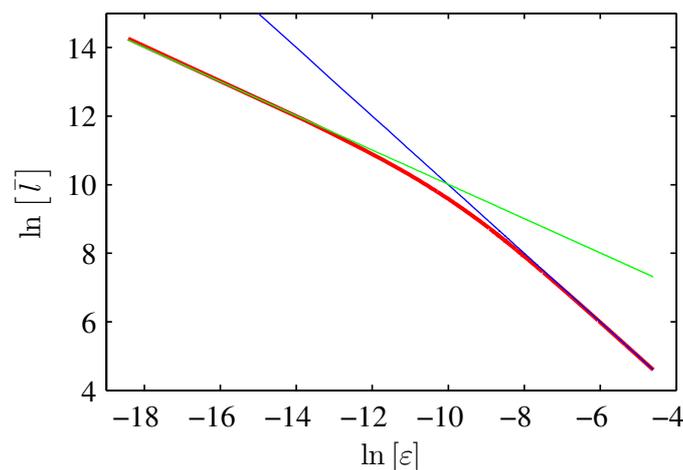


Figura 1: Evolución de la relación característica con $a = 1 - \varepsilon$ y $c = 0,01$. Rojo: relación característica Ec. (9). Azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

La influencia del coeficiente a es presentada en las Figuras 4 y 5. Al igual que en las figuras anteriores, para $\varepsilon \rightarrow 0$ la relación característica verifica la Ec. (12).

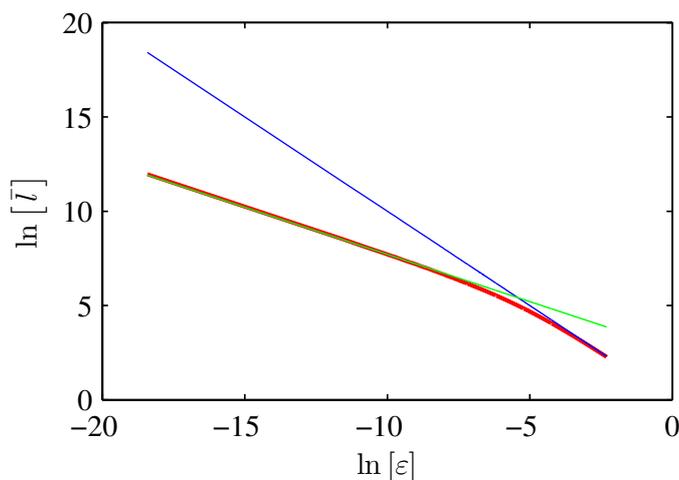


Figura 2: Evolución de la relación característica con $a = 1 - \varepsilon$ y $c = 0, 1$. Rojo: relación característica Ec. (9). Azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

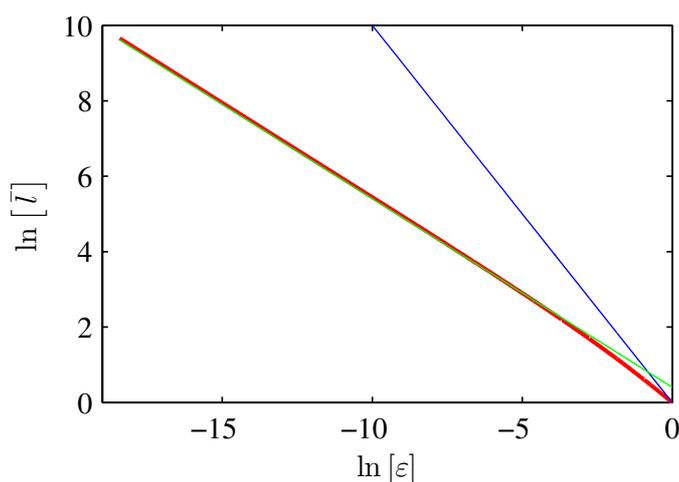


Figura 3: Evolución de la relación característica con $a = 1 - \varepsilon$ y $c = 1, 0$. Rojo: relación característica Ec. (9). Azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para validar el análisis realizado en la sección anterior, se llevan a cabo una serie de simulaciones numéricas en la cuales se verifica que la RPD sea constante y se calcula la relación característica.

Para tratar de ayudar a entender la controversia planteada, se analiza un mapa definido en el intervalo $[0, 1]$ y arquetípico para intermitencia tipo-II:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= F_1(x_n) = (1 + \varepsilon)x_n + a x_n^3 & \text{si } 0 \leq x < x_s \\
 x_{n+1} &= F_2(x_n) = \frac{x_n - x_s}{1 - x_s} & \text{si } x_s \leq x \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

donde x_s verifica $(1 + \varepsilon)x_s + a x_s^3 = 1$. Nuevamente, siguiendo a Maneville (Maneville, 1980), a puede ser considerado como $a = 1 - \varepsilon$. Se destaca que $F_1(x)$ es el mapa local típico de

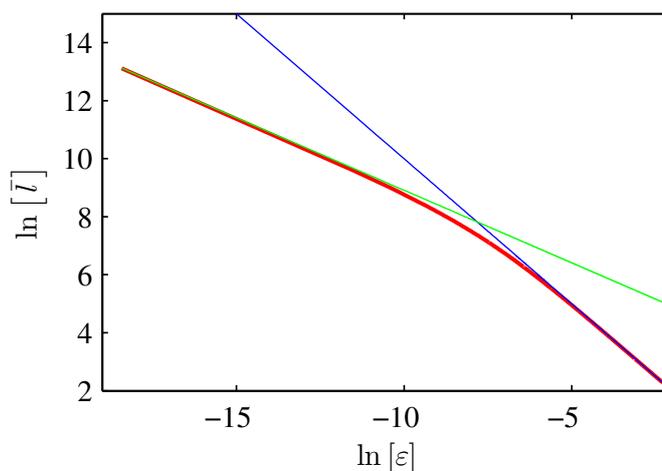


Figura 4: Evolución de la relación característica con $a = 0, 1$ y $c = 0, 1$. Rojo: relación característica Ec. (9). Azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

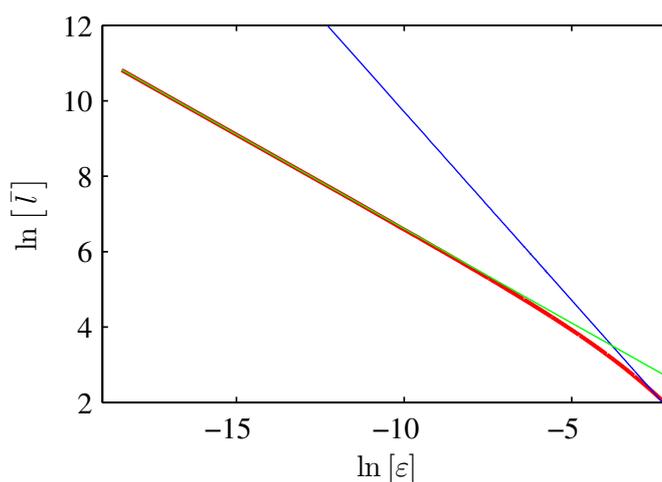


Figura 5: Evolución de la relación característica con $a = 10$ y $c = 0, 1$. Rojo: relación característica Ec. (9). Azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

intermitencia tipo II, mientras que $F_2(x)$ determina el proceso de reinyección desde la fase caótica hacia la laminar.

En todas las simulaciones se ha considerado que el número de puntos reinyectados es $N = 30000$ y el límite del intervalo laminar $c = 0, 1$. Se ha trabajado con distintos valores de ε y se ha evaluado numéricamente la longitud laminar media \bar{l} para cada ε . Se ha verificado usando la teoría de la función M que la reinyección es uniforme en todos los casos (del Río y Elaskar, 2010; Elaskar et al., 2011; del Río et al., 2012; Elaskar y del Río, 2012; del Río et al., 2013, 2014; Krause et al., 2014a,b; Elaskar et al., 2015, 2016; del Río y Elaskar, 2016a,b; Elaskar et al., 2017; Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018; del Río y Elaskar, 2018; Elaskar et al., 2018a,b; Elaskar y del Río, 2018).

La Figura 6 muestra los resultados obtenidos en escala logarítmica. En la figura hay cuatro evaluaciones. Los resultados numéricos obtenidos para $\bar{l} = \bar{l}(\varepsilon)$ están indicados por puntos negros, la curva roja representa la Ec. (9), mientras que las rectas verde y azul tienen pendiente

$-0,5$ y -1 respectivamente, es decir representan las Ecs. (12) y (11) respectivamente.

Se destaca que los resultados numéricos de la evolución de \bar{l} con ε presentan una muy elevada concordancia con los dados por la relación característica Ec. (9). Además los resultados numéricos concuerdan con que la relación característica $\bar{l} \propto \varepsilon^{-1/2}$ es la correcta para $\varepsilon \rightarrow 0$. Otro aspecto a destacar que para $\varepsilon > 0,1$ los resultados numéricos se alejan de las predicciones teóricas tal como se esperaba en función que la relación característica es válida solamente para pequeños ε .

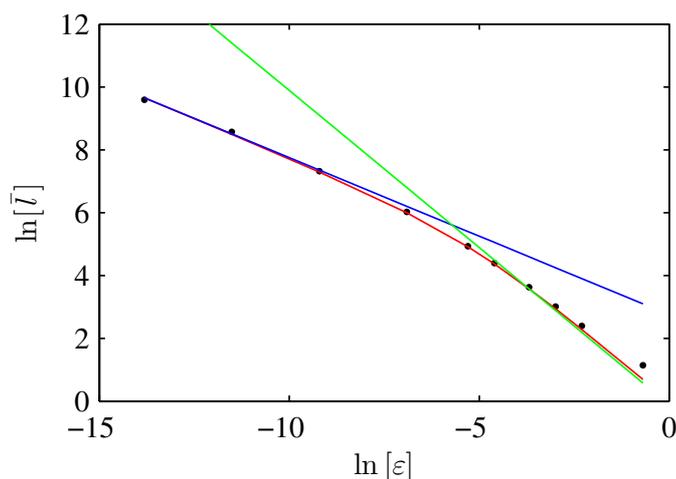


Figura 6: Evolución de la relación característica para el mapa (16) con $c = 0,1$ y 30000 puntos reinyectados. En el eje vertical está indicado el $\ln(\bar{l})$ y en el horizontal $\ln(\varepsilon)$. Línea roja: relación característica Ec. (9). Recta azul: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$. Recta verde: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$. Puntos negros: resultados numéricos.

5. CONCLUSIONES

En esta trabajo se ha estudiado la controversia sobre la forma de la relación característica para intermitencia tipo-II cuando la función probabilidad de reinyección es uniforme (RPD = constante).

Algunos reconocidos textos explican que la relación característica está dada por $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1}$ (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995). Pero, otros consideran válida la siguiente relación característica (Elaskar y del Río, 2017; Elaskar, 2018): $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$. Ambas expresiones son similares adquiriendo la forma: $\bar{l} \sim \varepsilon^{-\beta}$. La diferencia entre ellas aparece en el exponente, β , que afecta al parámetro de control.

Para $\varepsilon \ll 1$, se ha podido establecer, de manera analítica, que la expresión de la dependencia de la longitud media \bar{l} con el parámetro ε está dada por la Ec. (9). Suponiendo que en dicha ecuación el extremo del intervalo laminar depende con ε en la forma $c = \mu \varepsilon^h$ siendo h un número real mayor que $1/2$, y $\mu \gg 1$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, se puede encontrar que el exponente β en la relación característica resulta -1 . Por otra parte, aceptando que $\varepsilon \rightarrow 0$ de forma tal que $c(a/\varepsilon)^{1/2} \rightarrow \infty$, se deduce que $\beta = 0,5$.

Los resultados teóricos y numéricos introducidos en este trabajo indican que la relación característica para intermitencia tipo-II con RPD uniforme y $\varepsilon \rightarrow 0$ es $\bar{l} \sim \varepsilon^{-1/2}$.

En nuestra opinión, no es correcto utilizar la dependencia funcional de c con ε dada por $c = \mu \varepsilon^h$, porque para mantener el tamaño del intervalo laminar constante y variar el parámetro de control implica cambiar μ lo que introduce error cuando se toma el límite $\varepsilon \rightarrow 0$.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la SECyT de la Universidad Nacional de Córdoba por financiar este trabajo.

REFERENCIAS

- Batchelor G. y Townsend C. The nature of turbulent motion al large wave-number. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 199:238–255, 1949.
- Chian A. *Complex System Approach to Economic Dynamics. In Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 39–50. Springer, 2007.
- del Río E. y Elaskar S. New characteristic relation in type ii intermittency. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 20:1185–1191, 2010.
- del Río E. y Elaskar S. The intermittency route to chaos. *Handbook of Applications of Chaos Theory. Christos H. Skiadas, Charilaos Skiadas, Eds. CRC Press Book, ISBN 9781466590434. Paris*, 1:3–20, 2016a.
- del Río E. y Elaskar S. On the intermittency theory. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 26:1650228, 2016b.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental evidence of power law reinjection in chaotic intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 64:122–134, 2018.
- del Río E., Elaskar S., y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type i intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 19:967–976, 2014.
- del Río E., Elaskar S., y Makarov S. Theory of intermittency applied to classical pathological cases. *Chaos*, 19:967–976, 2013.
- del Río E., Sanjuán M., y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17:3587–3596, 2012.
- Dubois M., Rubio M., y Berge P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1446–1449, 1983.
- Elaskar S. *Studies on Chaotic Intermittency*. Doctoral Thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 2018.
- Elaskar S. y del Río E. Intermittency reinjection probability function with and without noise effects. *Latest Trends in Circuits, Automatics Control and Signal Processing. ISBN: 978-1-61804-131-9, Barcelona*, 1:145–154, 2012.
- Elaskar S. y del Río E. *New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications*. Springer, 2017.
- Elaskar S. y del Río E. Discontinuous reinjection probability density function in type v intermittency. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 13:121001–10, 2018.
- Elaskar S., del Río E., y Costa A. Reinjection probability density for type iii intermittency with noise and lower boundary of reinjection. *J. Comp. Nonlinear Dynam.*, 12:031020–11, 2017.
- Elaskar S., del Río E., y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 92:683–697, 2018a.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Some characteristics of the m function methodology to describe the reinjection process in chaotic intermittency. *Open Access J. Math. Theor. Phys.*, 1:168–173, 2018b.
- Elaskar S., del Río E., Krause G., y Costa A. Effect of the lower boundary of reinjection and noise in type ii intermittency. *Nonlinear Dynam.*, 79:1411–1424, 2015.

- Elaskar S., del Río E., y Zapico E. Evaluation of the statistical properties for type-ii intermittency using the perron-frobenius operator. *Nonlinear Dynam.*, 86:1107–1116, 2016.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Noise effect on statistical properties of type i intermittency. *Physica A*, 402:318–329, 2014a.
- Krause G., Elaskar S., y del Río E. Type i intermittency with discontinuous reinjection probability density in a truncation model of the derivative nonlinear schrödinger equation. *Nonlinear Dynam.*, 402:318–329, 2014b.
- Maneville P. Intermittency, self-similarity and 1/f spectrum in dissipative dynamical systems. 41:1235–1243, 1980.
- Marek M. y Schreiber I. *Chaotic Behaviour of Deterministic Dissipative Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- Nayfeh A. y Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1995.
- Paradisi P., Allegrini P., Gemignani A., Laurino M., Menicucci D., y Piarulli A. Scaling and intermittency of brains events as a manifestation of consciousness. *AIP Conf. Proc.*, 1510:151–161, 2012.
- Sanmartín J., Lopez-Rebollal O., del Rio E., y Elaskar S. Hard transition to chaotic dynamics in alfven wave-fronts. *Phys. Plasmas*, 11:2026–2035, 2004.
- Schuster H. y Just W. *Deterministic Chaos*. Wiley VCH, 2005.
- Sparrow C. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer-Verlag, 1982.
- Stavriniades S., Miliou A., Laopoulos T., y Anagnostopoulos A. The intermittency route to chaos of an electronic digital oscillator. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 18:1561–1566, 2008.
- Sánchez-Arriaga G., Sanmartín J., y Elaskar S. Damping models in the truncated derivative nonlinear schrodinger equation. *Phys. Plasmas*, 14:082108, 2007.
- Zebrowski J. y Baranowski R. Type-i intermittency in nonstationary systems: Models and human heart-rate variability. *Physica A*, 336:74–86, 2004.