

**MÉTODO MULTIMALLA GEOMÉTRICO, SOBRE MALLAS
SEMI ESTRUCTURADAS, APLICADO A POROELASTICIDAD**
**GEOMETRICAL MULTIGRID METHOD, ON SEMI STRUCTURED GRIDS
FOR THE POROELASTICITY PROBLEM**

**Cristian Lukaszewicz^a, Pablo Vilar^b, Elvio A. Heidenreich^{a,b}, Carmen Rodrigo^c y
Francisco J. Gaspar^c**

^a*Grupo de Modelado y Simulación Numérica, Universidad Nacional de Lomas de
Zamora, RUTA 4 KM. 2, 1832 Lomas de Zamora, Bs As, Argentina, elvioh@gmail.com,
[http:// www.ingenieria.unlz.edu.ar/ingenieria/](http://www.ingenieria.unlz.edu.ar/ingenieria/)*

^b*Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad. Ingeniería del Ejército, Cabildo 15, Buenos
Aires, Argentina, sicanlab@fie.undef.edu.ar, www.ingenieriaest.iese.edu.ar*

^c*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, Pedro Cerbuna 12, 50009
Zaragoza, España, fjgaspar@unizar.es, <http://maplicada.unizar.es>*

Palabras clave: Poroelasticidad, Multimalla, Mallas semi-estructuradas.

Resumen. El estudio temporal de la interrelación de las deformaciones de un medio poroso y el flujo de uno o varios fluidos que ocupan los poros es el objetivo de la teoría de la poroelasticidad. Sus ecuaciones se aplican en geomecánica, hidrogeología, ingeniería del petróleo y biomecánica, y surgen de los trabajos pioneros de Terzaghi y Biot. Dada una malla inicial no estructurada que se ajusta la geometría del dominio, construimos una jerarquía de mallas mediante técnicas de refinamiento regular. De esta forma, se obtiene una malla globalmente no estructurada que está formada por bloques estructurados. En este trabajo construiremos un software para la resolución de problemas poroelásticos en mallas semiestructuradas triangulares y utilizaremos una estructura de datos adecuada para conseguir una eficiente implementación del método basada en moléculas (sin ensamblar la matriz de coeficientes). Mostraremos resultados de la eficiencia del método sobre algunos problemas de referencia en la literatura.

Keywords: Poroelasticity, Multigrid, semi structured grid.

Abstract. The temporal study of the interrelation of the deformations of a porous medium and the flow of one or more fluids that occupy the pores is the objective of the theory of poroelasticity. Their equations applies in geomechanics, hydrogeology, petroleum engineering and biomechanics, and arise from the pioneering works of Terzaghi and Biot. Given an initial unstructured mesh that adjusts the domain geometry, we build a hierarchy of meshes using regular refinement techniques. In this way, a globally unstructured mesh is obtained which is formed by structured blocks. In this work we will build a software for the resolution of poroelastic problems in triangular semi-structured meshes and we will use an adequate data structure to achieve an efficient implementation of the method based on molecules (without assembling the coefficient matrix). We will show results of the efficiency of the method on some reference problems in the literature.

1 INTRODUCCIÓN

El método multimalla Brandt (1984); Briggs et al. (2000); es uno de los métodos más rápidos para resolver grandes sistemas de ecuaciones, con factores de convergencia muy pequeños e independientes de la malla usada. Básicamente hay dos clases de métodos multimalla, geométricos y algebraicos. En los métodos multimalla geométricos una jerarquía de mallas debe de ser propuesta y son aplicados principalmente sobre mallas estructuradas. Por otro lado, los métodos multimalla algebraicos no utilizan ninguna información en relación con la malla en la que el problema es discretizado, y están relacionados con discretizaciones por elementos finitos sobre mallas no estructuradas definidas sobre dominios complejos, y con problemas con gran variación en los coeficientes de la ecuación. En general los métodos multimalla geométricos tienen un coste computacional menor por iteración que los algebraicos debido a que explotan la regularidad de la malla y la simplicidad de la estructura de datos. Por tanto, cuando un método multimalla geométrico puede ser definido de forma adecuada, es preferible a un método multimalla algebraico. Una alternativa que permite resolver problemas con geometría relativamente compleja de forma eficiente es la aplicación de métodos multimalla geométricos sobre mallas semi-estructuradas. Esto es, a partir de una malla grosera no estructurada que capture la geometría del dominio, se construye la jerarquía de mallas por refinamiento regular de los elementos de la malla no estructurada, dividiendo cada elemento en cuatro elementos congruentes (fig. 1). Las mallas resultantes son globalmente no-estructuradas, pero localmente estructuradas en cada elemento original. Esta estrategia genera una sucesión de mallas conformes jerárquicas, donde los operadores de transferencia entre dos mallas consecutivas pueden ser definidos de forma geométrica. Otra ventaja de la utilización de estas mallas es la posibilidad de poder implementar el método multimalla en una versión libre de matriz, esto es, resolver el sistema sin construir la matriz de coeficientes. En el caso de discretizaciones por elementos finitos, es usual calcular dicha matriz mediante el algoritmo de ensamblado, esto es, recorrer todos los elementos de la triangulación, construyendo la matriz local y sumando su aportación en la posición correcta. En discretizaciones de problemas con coeficientes constantes definidas en mallas semi-estructuradas, no es necesario ensamblar la matriz, ya que el método de los elementos finitos puede ser implementado usando moléculas.

Notar que en mallas semi-estructuras construidas de la forma descrita en el párrafo anterior, una molécula es suficiente para representar el operador discreto en cada elemento grosero, ya que todas las ecuaciones correspondientes a los nodos interiores en un nivel de refinamiento fijo de dicho elemento son las mismas. Por tanto, el proceso estándar de ensamblado sólo es utilizado en la malla más grosera, lo que reduce drásticamente la memoria requerida para almacenar las matrices, dando lugar a métodos de resolución muy eficientes. Recientemente, se ha propuesto una implementación basada en moléculas para la resolución por métodos multimalla geométricos sobre mallas semi-estructuradas del problema de Poisson Gaspar et al. (2010).

La elección de un suavizador adecuado es una característica importante para el diseño de un método multimalla geométrico eficiente, e incluso requiere una atención especial cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones en derivadas parciales porque el suavizador debe suavizar el error para todas las incógnitas. Además, para los problemas de punto de ensilladura los resultados numéricos muestran que los factores de suavizado estándar de relajaciones no son satisfactorios. El modelo de poroelasticidad es un ejemplo de estos problemas, y su resolución por método multimalla en mallas semiestructuradas es el objetivo en este trabajo.

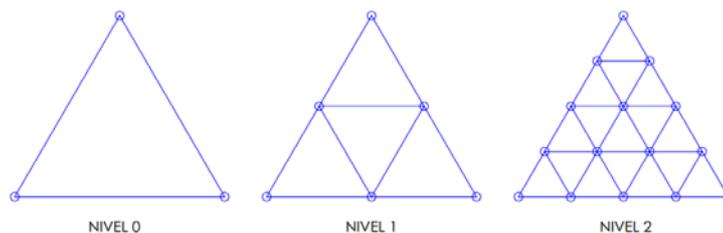


Figura 1: Método de refinamiento de cada nivel.

Una visión general de los métodos de discretización multimalla en mallas de problemas de punto de ensilladura fueron presentados en Oosterlee (2008), donde la relajación de tipo caja aparece como uno de los suavizadores para este tipo de problemas. Este consiste en la descomposición de la malla en pequeños subdominios y tratar a ellos por separado, es decir todas (o una parte de) las ecuaciones correspondientes a los puntos de cada subdominio se resuelven simultáneamente como un sistema. Esta clase de suavizadores fue introducida por Vanka (1986) para resolver la discretización en diferencias finitas en mallas rectangulares de las ecuaciones de Navier Stokes. Es por ello por lo que hay mucha literatura que puede ser encontrada acerca de las aplicaciones de este tipo de suavizadores, principalmente en el campo de la mecánica de fluidos computacional, John (2000). Hay menos documentos relacionados con el desempeño de esta relajación en el contexto de la Mecánica del Sólido Computacional, Wobker (2009). Sin embargo, para las discretizaciones del problema de la poroelasticidad en mallas rectangulares, se ha demostrado que obtiene muy buenos resultados con estos suavizadores.

En la Sección 2, se introducirá la formulación del problema de la poroelasticidad, así como su discretización estabilizada en elementos finitos. La Sección 3 se presentará el algoritmo multimalla propuesto, basado en suavizadores de tipo Vanka en mallas triangulares. Finalmente, en la Sección 4 se mostrarán algunos resultados numéricos para un problema planteado donde se observará la variación del coste computacional en función de los subniveles empleados.

2 PROBLEMA DE POROELASTICIDAD

La teoría de la poroelasticidad aborda el acoplamiento dependiente del tiempo entre la deformación de un material poroso y el flujo de fluido en el interior. La declaración general de este problema fue presentada por Biot (1941). Nosotros asumiremos un medio poroso lineal elástico, homogéneo e isotrópico, y suponiendo que la matriz porosa está saturada por un líquido incompresible. El estado de este medio continuo es caracterizado por el conocimiento de los desplazamientos elásticos \mathbf{u} ; la presión del fluido p en cada punto, las ecuaciones de gobierno del problema están dadas por:

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla p = g(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\kappa}{\eta}\Delta p = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T \quad (2)$$

Siendo Ω una región abierta limitada en \mathbb{R}^n ; $n \leq 3$ (dimensión del problema); λ y μ son los coeficientes de Lamé, κ es la permeabilidad del medio poroso y η es la viscosidad dinámica del fluido.

Los términos fuentes $g(x, t)$ y $f(x, t)$ representan la densidad de las fuerzas aplicadas al cuerpo y la fuerza de extracción del fluido o el proceso de inyección respectivamente. Consideraremos las siguientes condiciones de borde e iniciales:

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \sigma' \mathbf{n} = \mathbf{t}, & \text{en } \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \frac{\kappa}{\eta} (\Delta p) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \text{en } \Gamma_c \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Donde $\sigma' \mathbf{n}$ es el tensor de tensiones efectivo del medio poroso, \mathbf{n} es la normal unitaria en la frontera y $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_c$ frontera con condiciones de Neumann y Dirichlet respectivamente. Para resolver estas ecuaciones se plantea un esquema de elementos finitos estabilizados, basado en la perturbación de la ecuación de flujo, (Aguilar et al. (2008)).

3 MULTIMALLA BASADO EN SUAVIZADORES TIPO VANKA

Los métodos multimalla se basan en la combinación de dos principios: la propiedad de suavizado de algunos métodos iterativos clásicos y la aceleración de su convergencia a través de una técnica de corrección en mallas más groseras. En particular, el primer paso es obtener una aproximación de la solución aplicando varias iteraciones de un método iterativo clásico, llamado suavizador. Este paso es el conocido como pre-suavizado. A continuación, se calcula el residuo en la malla fina y éste es transferido a la malla grosera a través de un operador de restricción apropiado. En la malla grosera se debe de resolver la ecuación del residuo. Si esta se resuelve de forma exacta se obtiene el método de doble malla, mientras que si queremos aplicar un método multimalla se resuelve esta ecuación aplicando de manera recursiva el método de doble malla, utilizando una jerarquía de mallas. Una vez obtenida la solución en la malla grosera, esta se interpola a la malla fina y se utiliza como corrección para la aproximación de la solución que se tenía en dicha malla. Finalmente, se pueden aplicar nuevamente varias iteraciones del suavizador, en el último paso del algoritmo que se conoce como post-suavizado.

Los métodos multimalla geométricos dependen en gran medida de la elección de componentes adecuados para el problema considerado. Estos componentes tienen que ser elegidos para que interactúen eficientemente entre sí con el fin de obtener una buena conexión entre la relajación y la corrección en la malla grosera. En este trabajo, se elige una interpolación lineal, y su adjunto como el operador de restricción. El operador discreto en cada malla de jerarquía resulta de la discretización directa de la ecuación en derivadas parciales en dicha malla. Como ha sido comentado la relajación tipo caja es el suavizador más conveniente para usar en el problema de poroelasticidad, debido a su carácter de punto silla. Hay muchas variantes de tipo de suavizadores de caja, ellos se diferencian en la elección de los subdominios que son resueltos simultáneamente, variando en la forma en que son construidos los sistemas locales que van a ser resueltos.

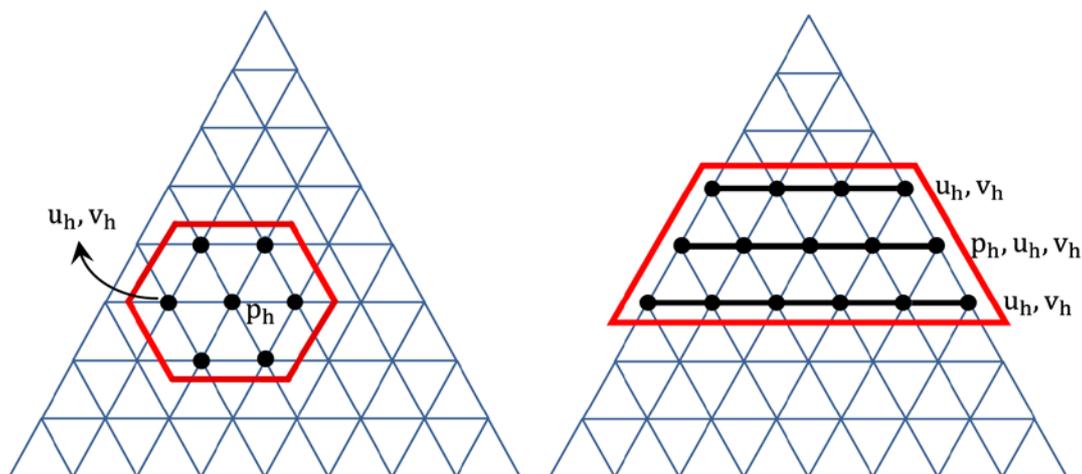


Figura 2: Actualización de las incógnitas, por puntos y línea de Gauss-Seidel.

Primero vamos a considerar el algoritmo iterativo por puntos de Gauss Seidel, el cual consiste en actualizar simultáneamente todas las incógnitas que aparecen en el operador de divergencia de la segunda ecuación del sistema. Esto significa que 12 incógnitas correspondientes a desplazamientos y una a la presión son relajadas simultáneamente y por lo tanto se tiene un sistema de 13×13 que tiene que ser resuelto para cada punto (fig. 2). Otra versión de la relajación de tipo caja es la variante por líneas (fig. 2). En las mallas triangulares se pueden definir tres suavizadores línea diferente, cada uno asociados con cada vértice del triángulo, y ellos consisten en un hacer bucle sobre cada línea paralela al borde opuesto al vértice correspondiente y relajar simultáneamente todas las incógnitas que aparecen en el operador de divergencia asociado a cada punto de presión sobre esta línea. Estos suavizadores son más complejos que su contraparte por puntos, pero en algunas situaciones en que el por puntos no da resultados satisfactorios, éstos son una buena opción. Por ejemplo, los suavizadores por puntos pueden ser menos robustos en mallas anisotrópicas, siendo los de línea más satisfactorios. La estrategia a seguir para aplicar el método multimalla en las mallas semiestructuradas será el utilizar estos dos suavizadores dependiendo de la geometría de los triángulos de la malla más grosera. Cuando el triángulo tenga un ángulo pequeño, deberemos utilizar el suavizador de tipo línea mientras que el suavizador Vanka de tipo punto se utilizará para los triángulos con geometrías más regulares.

4 RESULTADOS NUMERICOS

Para estudiar cuan eficiente es el método multimalla se realizará un caso de estudio en un dominio computacional rectangular como el indicado en la (fig. 3), donde se asume la parte inferior rígida y se aplica una densidad de carga uniforme de magnitud 10^4 N/m^2 sobre la parte central del borde superior. Además, la frontera se considera impermeable excepto el borde superior que es libre de drenar. El material considerado tiene las siguiente propiedades $E = 3.0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.2$ (coeficiente de Poisson), $\kappa/\eta = 2.0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{Pa}$ (conductividad hidráulica).

Para aplicar el método multimalla propuesto, debe definirse primero la jerarquía de mallas. Para ello, se construye primero la malla más grosera, que está compuesta de diez triángulos con distintas geometrías como se muestra en la (fig.3). A partir de dicha malla, se aplica un proceso de refinamiento regular hasta obtener la malla en la que se resolverá el problema. En los tests que siguen mostraremos resultados utilizando diferentes mallas

finas obtenidas tras distintos números de refinamientos. Debido a sus diferentes geometrías, se aplicarán distintos suavizadores para los diferentes triángulos de la malla gruesa. En particular, suavizadores por puntos se aplican a los triángulos equiláteros y los line cuando la malla se vuelve anisotrópica, es decir para triángulos con ángulos pequeños.

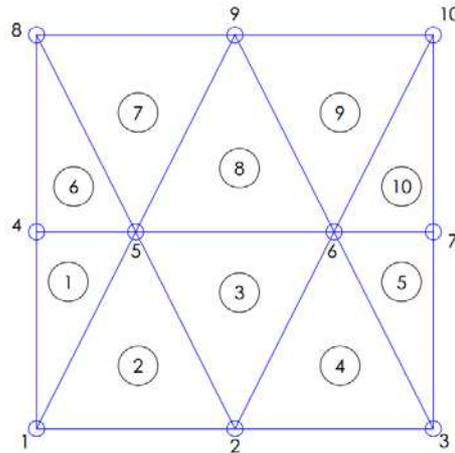


Figura 3: Dominio de estudio.

Como ejemplo de las soluciones obtenidas, en la Figura 4 se muestran los campos de presión en dos mallas finas obtenidas tras 3 (figura de la izquierda) y 5 (figura de la derecha) niveles de refinamiento.

En este estudio se analizará el tiempo de cálculo necesario para que los residuos sean del orden de 10^{-8} , considerando distintos niveles de refinamiento de manera tal de poder comparar y hacer un análisis del tiempo de cálculo en función de la cantidad de elementos de cada malla usada. Así, en la Tabla 1 se muestra para cada número de niveles de refinamiento el número de nodos, de incógnitas y de triángulos considerados en el problema, junto con el tiempo de CPU correspondiente, indicado en segundos. Se puede observar que los tiempos escalan de forma adecuada y que con el método propuesto podemos resolver problemas muy grandes en un tiempo muy pequeño.

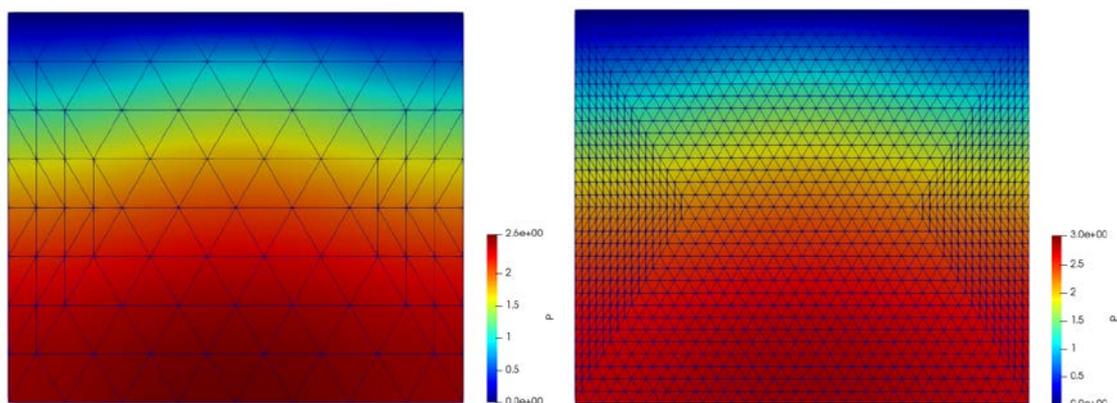


Figura 4: Resultados de presión para malla de 3 y 5 subniveles.

N° Niveles	N° Nodos	N° Incógnitas	N° triángulos	Tiempo (s)
12	20.979.713	62.939.139	41.943.040	2.412
11	5.246.977	15.740.931	10.485.760	619
10	1.312.769	3.938.307	2.621.440	159
9	328.705	986.115	655.360	42
8	82.433	247.299	163.840	11
7	20.737	62.211	40.960	3
6	5.249	15.747	10.240	1

Tabla 1: Tiempos de cálculo para cada nivel de refinamiento usado una computado con un Intel Core(TM)I7-6700HQ CPU 2.60GHz.

En la (fig. 5) se observa la linealidad del tiempo de cálculo con la cantidad de elementos usados en cada caso. Demostrando así las ventajas en la rapidez de cálculo al utilizar un dominio con numerosos grados de libertad.

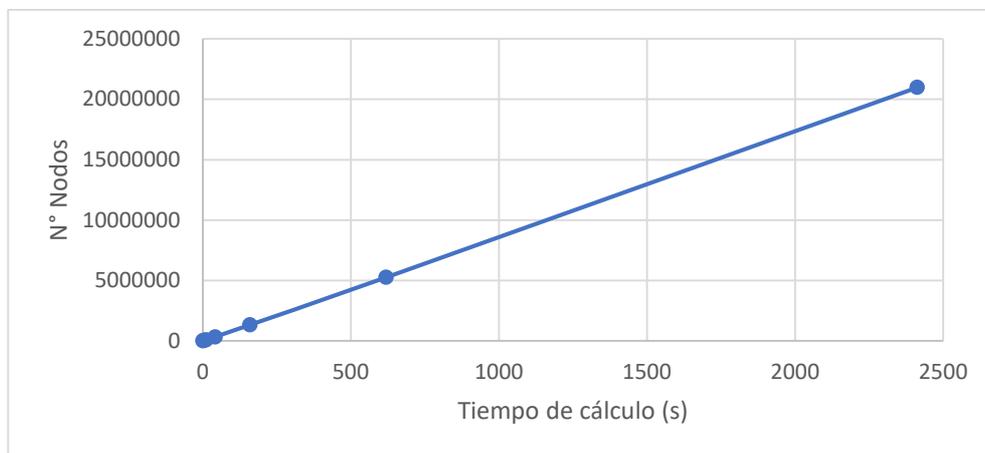


Figura 5: Linealidad de tiempo de cálculo en función del número de nodos.

Finalmente, en las Figuras 6, 7 y 8 se presentan las soluciones correspondientes a la presión y los desplazamientos, respectivamente, obtenidas para el caso de un mayor número de niveles de refinamiento (12 niveles).

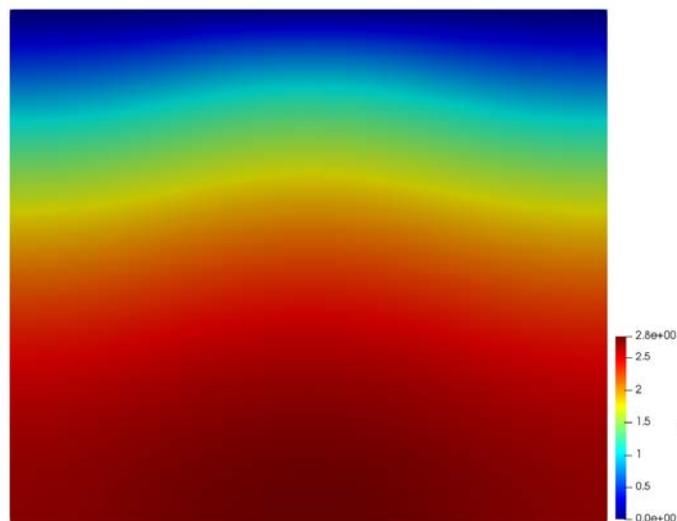
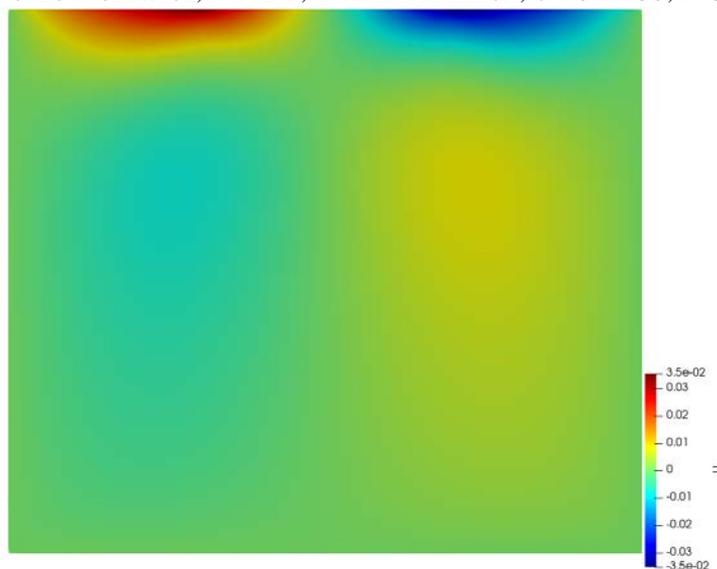
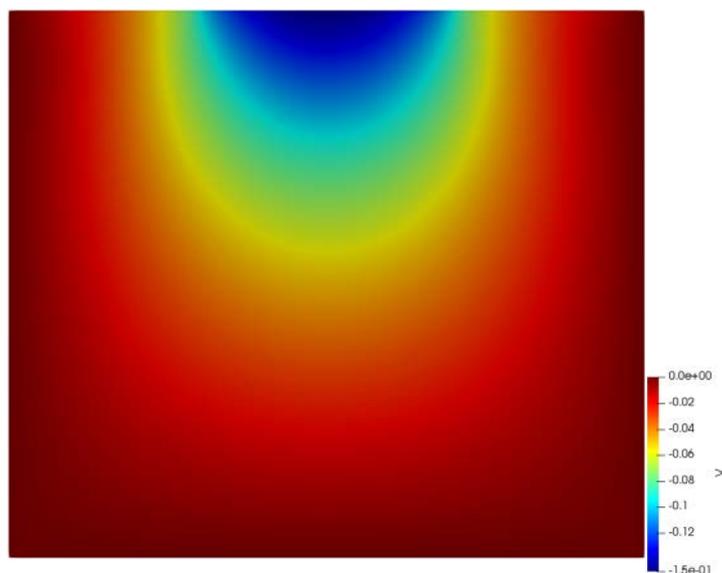


Figura 6: Presión para malla de 12 subniveles.

Figura 7: Desplazamiento u para malla de 12 subniveles.Figura 8: Desplazamiento v para malla de 12 subniveles.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un software para la resolución de problemas poroelásticos. Se consideran mallas semiestructuradas triangulares para poder ajustarse a dominios complejos utilizando a su vez métodos eficientes en mallas estructuradas. En particular, el software está basado en métodos multimalla que utilizan suavizadores de tipo Vanka, que son adecuados para problemas de tipo de punto silla, como los problemas poroelásticos considerados aquí. Se propone además una estructura de datos adecuada para conseguir una eficiente implementación del método que se basa en el uso de moléculas, evitando el ensamblado de la matriz de coeficientes. Los experimentos numéricos muestran la eficiencia del método propuesto a través de un problema de referencia de la literatura.

REFERENCIAS

- G. Aguilar, F. Gaspar, F. Lisbona and C. Rodrigo. Numerical stabilization of Biot's consolidation model by a perturbation on the flow equation. *Int. J. Numer. Meth. Engng*; 75:1282–1300 (2008).
- Biot, M. General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 12, 155–169 (1941).
- Brandt, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Math. Comput.* 31, 333–390 (1977).
- Briggs W., Henson V., and McCormick S. A Multigrid Tutorial. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2000.
- Gaspar F., Gracia J., Lisbona F., and Rodrigo C. Efficient geometric multigrid implementation for triangular grids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:1027–1035, 2010.
- John, V., Tobiska, L. Numerical performance of smoothers in coupled multigrid methods for the parallel solution of the incompressible Navier–Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 33, 453–473 (2000).
- Oosterlee, C.W., Gaspar F.J. Multigrid relaxation methods for systems of saddle point type. *Appl. Numer. Math.* 58, 1933–1950 (2008).
- Vanka, S.P. Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. *J. Comput. Phys.* 65, 138–158 (1986).
- Wobker, H., Turek, S. Numerical studies of Vanka-type smoothers in computational solid mechanics. *Adv. Appl. Math. Mech.* 1, 29–55 (2009).