

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS DELGADAS FUNCIONALMENTE GRADUADAS

FREE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED THIN PLATES

Maria V. Quintana^{a,b}, Gonzalo J. Gilardi^{c,d}, Ricardo O. Grossi^{a,b}, Diana V. Bambill^{c,d} y
Carlos A. Rossit^{c,d}

^a INIQUI-CONICET, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400
Salta, Argentina, <https://www.ing.unsa.edu.ar>

^b Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Salta, Pellegrini 790, Salta, Argentina

^c Departamento de Ingeniería (UNS), Instituto de Ingeniería-II-UNS (UNS-CIC), Universidad
Nacional del Sur (UNS), Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>

^d Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

vquintan@unsa.edu.ar, gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, grossiro@unsa.edu.ar,
dbambill@criba.edu.ar, carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: placas, materiales funcionalmente graduados, vibraciones libres

Resumen. En este trabajo se presenta una metodología para obtener los coeficientes de frecuencia de placas rectangulares constituidas por materiales funcionalmente graduados (FGM) mediante una analogía con placas homogéneas. La misma es aplicable a placas delgadas de material FG cuyas propiedades varían a lo largo de su espesor, mediante una ley de variación potencial simétrica y/o asimétrica. En este contexto, la metodología propuesta permite analizar rápidamente el efecto de rigidización que producen distintas combinaciones de los materiales componentes de la placa sobre la frecuencia fundamental de vibración, sin tener que recurrir a la aplicación de un algoritmo de cálculo específico. Para validar la formulación se presentan resultados numéricos en forma gráfica y tabular.

Keywords: plates, functionally graded material, free vibration, asymmetric variation, symmetric variation.

Abstract. This paper presents a methodology to obtain frequency coefficients of vibrating rectangular plates made of functionally graded materials (FGM) by means of an analogy to homogeneous plates. The model refers to thin plates. The material is assumed to have two-constituent material distribution through the thickness. It varies following a power law distribution in terms of the volume fractions of the constituents materials, by means of symmetric or asymmetric variation. The proposed approach allows to analyse the stiffening effect on the fundamental frequency that is produced by different combinations of volume fractions of the constituents materials. Numerical results are presented in graphics and tables and the formulation is validated by comparison with particular cases of the model, available in the scientific literature.

1 INTRODUCCIÓN

El concepto de materiales funcionalmente graduados, denominados FGMs por sus siglas en inglés (Functionally Graded Materials), fue propuesto en 1984 por científicos japoneses que trabajaban en la elaboración de barreras térmicas para aplicaciones aeroespaciales (Koizumi, 1993). Los FGMs son materiales compuestos heterogéneos en los cuales las propiedades del material varían en forma continua en una o más direcciones deseadas (Qian y Batra, 2005; Liu et al., 2010). La variación de las propiedades en la dirección del espesor es una de las preferidas en el diseño de placas. Usualmente, las placas FG son fabricadas mediante una combinación de metales y cerámicos, para combinar la resistencia a altas temperaturas y a la abrasión de los cerámicos con la maleabilidad de los metales (Suresh y Mortensen, 1997).

En este trabajo se presenta un procedimiento para la determinación de los coeficientes de frecuencias de placas delgadas rectangulares con FGMs y condiciones de contorno arbitrarias. El mismo está basado en los trabajos de Serge Abrate (Abrate, 2006; Abrate, 2008), quien demuestra por primera vez, que las placas de materiales FG cuyas propiedades varían en forma continua en el espesor, se comportan como placas isótropas cuando se consideran válidas las hipótesis de la teoría clásica de placas (CLPT).

En los últimos años, se publicaron una gran cantidad de artículos relacionados con el tratamiento mecánico y dinámico de placas de materiales FG cuyas propiedades varían en forma continua en el espesor. Por ejemplo, analizaron las vibraciones mecánicas Zhao et al. (2009); Tornabene y Viola (2009); Chakraverty y Pradhan (2014; 2016); Kumar et al. (2018), las cargas críticas de pandeo fueron estudiadas por Shariat et al. (2005); Mohammadi et al. (2010), entre otros. Finalmente, el análisis estático de placas FG fue desarrollado por Cheng y Batra (2000); Natarajan y Manickam (2012); Pradhan y Chakraverty (2015), entre otros. En la mayoría de ellos, se asume que el problema requiere de herramientas especiales para su tratamiento y se presentan nuevos métodos de análisis y desarrollos de formulaciones numéricas. No obstante, teniendo en cuenta el planteo presentado por Abrate es posible estudiar el comportamiento de las placas FG a partir de los resultados ya obtenidos y publicados de placas isótropas homogéneas. Particularmente, demostró que las frecuencias naturales de placas FG son directamente proporcionales a aquellas de placas homogéneas siempre que mantengan la misma forma y relación de aspecto.

Motivado por lo expuesto en los párrafos anteriores, en este trabajo se obtiene el factor de proporcionalidad (factor de escala) para el caso de placas FG que responden a una ley de variación potencial simétrica y/o asimétrica en su espesor. El mismo es obtenido modelando la placa FG como una placa homogénea equivalente y calculando sus propiedades. Se asumen válidas las hipótesis de la teoría de placas delgadas CLPT (Reddy, 2014) y el acoplamiento entre las deformaciones transversales y las deformaciones en el plano de la placa se elimina mediante el concepto de superficie neutra física (Abrate, 2008; Kumar et al., 2018).

A partir de este procedimiento se analiza la influencia de ciertos parámetros de la ley de variación del material sobre el coeficiente de frecuencia fundamental de placas FG y su efecto de rigidización.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA - PLACAS FG

Se consideran placas delgadas rectangulares de espesor constante h , largo a , ancho b y constituidas de material FG, tal como se observa en la Figura 1. En principio, se asume que las propiedades del material FG varían en el espesor de la placa (dirección \bar{z}) mediante una ley de variación potencial simétrica (Thang y Lee, 2018):

$$R(\bar{z}) = \begin{cases} R_c + (R_m - R_c)(1 + 2\bar{z}/h)^k & -h/2 \leq \bar{z} \leq 0, k \geq 0 \\ R_c + (R_m - R_c)(1 - 2\bar{z}/h)^k & 0 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde R_c y R_m son los valores de las propiedades de cada uno de los materiales componentes de la placa FG, cerámico y metal respectivamente, y k es el parámetro de heterogeneidad del material el cual permite considerar diferentes fracciones de volumen de estos materiales en la placa. De acuerdo con esta distribución, las superficies inferior $\bar{z} = -h/2$ y superior $\bar{z} = h/2$ de la placa FG son de material cerámico puro, y la superficie central $\bar{z} = 0$ es de metal puro.

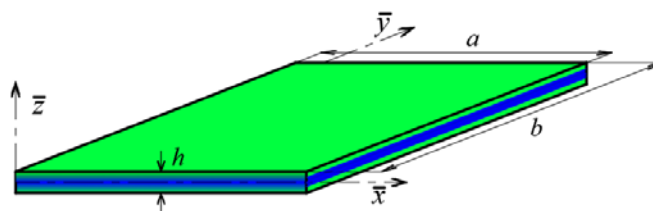


Figura 1: Descripción general de la placa rectangular en estudio.

Se considera que el módulo de Young E y la densidad del material ρ varían de acuerdo a la Ec. (1) y que el coeficiente de Poisson ν permanece constante a lo largo del espesor. Entonces, el material FG en la placa se deforma uniformemente en su plano.

Si se asumen válidas las hipótesis de Kirchhoff, las constantes de rigidez se pueden obtener a partir de las expresiones de la teoría clásica de lámina isótropa, esto es (Reddy, 2014):

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(\bar{z})}{1-\nu^2}; Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(\bar{z})}{1-\nu^2}; Q_{66} = \frac{E(\bar{z})}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

$$(D_{11}^{FG}, D_{12}^{FG}, D_{66}^{FG}) = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{11}, Q_{12}, Q_{66}) \bar{z}^2 d\bar{z} \quad (3)$$

donde Q_{ij} son las rigideces reducidas transformadas para un estado plano de tensiones y D_{ij} las rigideces flexionales y de acoplamiento de la placa FG. De la Ec. (2) se desprenden las siguientes relaciones de isotropía: $D_{12}^{FG} = \nu D_{11}^{FG}$ y $D_{66}^{FG} = 0.5(1-\nu)D_{11}^{FG}$.

El coeficiente inercial I_0 se obtiene integrando en el espesor h , la densidad del material:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (4)$$

Considerando la ley de variación de la Ec. (1) e integrando las Ec. (3) y (4), se llega a:

$$D_{11}^{FG} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \left(E_m + \frac{6(E_c - E_m)}{6 + 11k + 6k^2 + k^3} \right) \quad (5)$$

$$I_0 = h \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right). \quad (6)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, considerando el cambio de variable $x = \bar{x}/a$, $y = \bar{y}/b$, y tomando como referencia las propiedades del material de la superficie superior es

posible escribir el funcional de energía J para una placa FG isotrópica de la siguiente manera:

$$\frac{2ab}{\lambda^{-2} D_{11}^{FG}} J[W] = \left\{ \int_{An} (W_{xx})^2 dx dy + 2\nu\lambda^2 \int_{An} W_{xx} W_{yy} dx dy + \lambda^4 \int_{An} (W_{yy})^2 dx dy + \right. \\ \left. + 2(1-\nu)\lambda^2 \int_{An} (W_{xy})^2 dx dy \right\} - (\Omega^{FG})^2 \frac{I_0}{\rho_c h} \frac{D_c}{D_{11}^{FG}} \int_{An} (W)^2 dx dy \tag{7}$$

donde $W = W(x, y)$ son los desplazamientos transversales de la placa, $\lambda = a/b$ la relación de aspecto de la placa y An el área normalizada de integración.

En este caso, la expresión del coeficiente de frecuencia Ω^{FG} de la placa FG se lo considera referenciado al material cerámica, esto es:

$$\Omega^{FG} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}} \text{ con } D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{8}$$

donde ω es la frecuencia natural circular de vibración de la placa, en rad/s.

2.1 Ley de distribución asimétrica: Consideraciones

Una variación asimétrica de las propiedades del material de la placa introduce un acoplamiento entre las deformaciones en el plano y las de flexión (Abrate, 2008). Considerando un caso particular en el cual las placas están constituidas por acero (Ac) y alúmina (Al_2O_3) cuyas propiedades están dadas por (Su et al., 2013):

$$E_{Ac} = 210 \text{ GPa}, \rho_{Ac} = 7800 \text{ kg/m}^3; E_{Alum} = 390 \text{ GPa}, \rho_{Alum} = 3960 \text{ kg/m}^3, \nu_{Ac} = \nu_{Alum} = 0,3 \tag{9}$$

y la ley de variación dada por (Chakraverty y Pradhan, 2014):

$$R(\bar{z}) = R_m + (R_c - R_m) (0,5 + \bar{z}/h)^k \text{ con } -h/2 \leq \bar{z} \leq h/2 \text{ y } k \geq 0. \tag{10}$$

Se puede observar su variación a través del espesor h de la placa en la Figura 2.

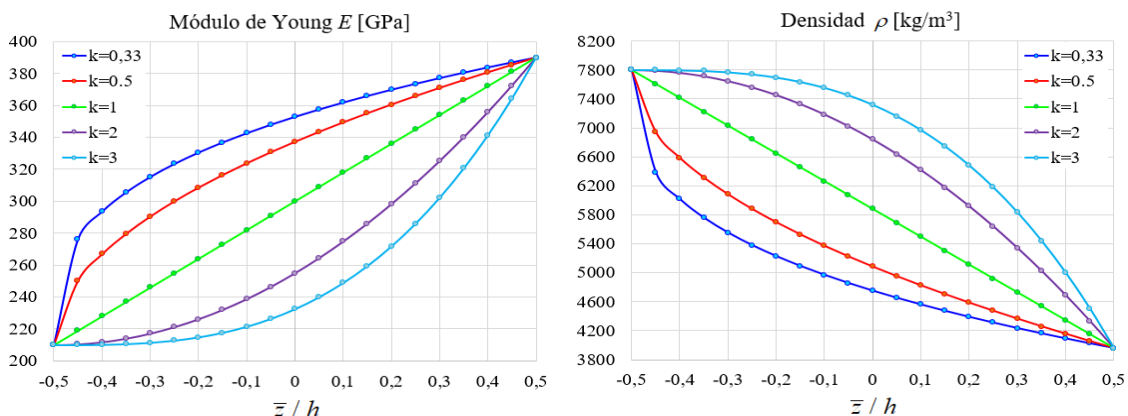


Figura 2: Variación del módulo de Young $E(\bar{z})$ y de la densidad $\rho(\bar{z})$ en las placas FG.

Es posible ignorar los efectos del acoplamiento en el planteo del funcional energético si se utiliza el concepto de superficie física neutra. Kumar et al. (2018) propone seleccionar un

plano de referencia \bar{z}_0 distinto al plano medio geométrico de la placa, el cual se obtiene a través de la expresión:

$$\bar{z}_0 = \frac{hk(E_{rat} - 1)}{2(k+2)(E_{rat} + k)} \quad \text{con } E_{rat} = E_c / E_m. \quad (11)$$

Luego, la rigidez a flexión D_{11}^{FG} y el coeficiente inercial I_0 referidos a este nuevo plano son:

$$D_{11}^{FG} = \frac{12D_c}{E_{rat}} \left(\frac{3(k^2 + k + 2)}{12(k+1)(k^2 + 5k + 6)} - \left(\frac{\bar{z}_0}{h} \right) \frac{k(E_{rat} - 1)}{(k+1)(k+2)} + \left(\frac{\bar{z}_0}{h} \right)^2 \frac{E_{rat} + k}{k+1} \right). \quad (12)$$

$$I_0 = \frac{\rho_c h}{\rho_{rat}} \left(\frac{\rho_{rat} - 1}{k+1} + 1 \right) \quad \text{con } \rho_{rat} = \rho_c / \rho_m. \quad (13)$$

Bajo estas consideraciones, es válido el funcional de energía J dado en al Ec. (7).

3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS PARA OBTENER Ω^{FG} :

Li et al. (2015) obtienen unas relaciones de correspondencia entre las soluciones en vibración libre y pandeo de placas FG con sus correspondientes placas homogéneas de referencias (RHP) mediante el planteo de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las mismas.

En este trabajo se realiza un planteo similar, pero partiendo del funcional energético del sistema. Entonces, teniendo en cuenta el coeficiente que multiplica al término $\int_{An} (W)^2 dx dy$ en la Ec. (7), y estableciendo una analogía con el coeficiente semejante que se obtiene cuando se formula el método de Ritz para placas homogéneas, se obtiene la siguiente relación:

$$(\Omega^H)^2 = (\Omega^{FG})^2 \frac{I_0 D_m}{\rho_m h D_{11}^{FG}} \quad (14)$$

donde Ω^{FG} es el coeficiente de frecuencia de la placa equivalente FG y Ω^H el coeficiente de frecuencia de una placa homogénea isótropa

La relación propuesta en la Ec. (14) es válida siempre que el coeficiente Ω^H se obtenga de considerar una placa homogénea de la misma forma, relación de aspecto y condiciones de borde que la placa FG que se desea estudiar; y que el coeficiente de Poisson ν de la placa homogénea de referencia coincida con el de sus materiales constituyentes.

La correlación propuesta es válida en estos casos, porque la ley de variación del material está planteada en su espesor h y no en el plano \bar{xy} . La ventaja de la Ec. (14) radica en que permite analizar rápidamente el efecto de rigidización del material sin tener que recalcular, mediante otros algoritmos, los coeficientes de frecuencia para un material FG.

4 RESULTADOS

4.1 Caso de comparación

El caso de comparación corresponde a una placa FG rectangular delgada de espesor h constante y simplemente apoyada en sus cuatro bordes (SSSS). El material FG está constituido por Alúmina (Alum) en la superficie superior y Aluminio (Al) en la superficie

inferior, cuyas propiedades son (Kumar et al., 2018):

$$E_{\text{Alum}} = 380 \text{ GPa}, \rho_{\text{Alum}} = 3800 \text{ kg/m}^3; E_{\text{Al}} = 70 \text{ GPa}, \rho_{\text{Al}} = 2707 \text{ kg/m}^3; \nu_{\text{Alum}} = \nu_{\text{Al}} = 0,3 \quad (15)$$

y las cuales varían con la ley de distribución asimétrica de la Ec. (10).

En la [Tabla 1](#) se muestra una contrastación entre los primeros 3 coeficientes de frecuencia $\Omega_i^{FG} = \omega_i a^2 \sqrt{\rho_{\text{Alum}} h / D_{\text{Alum}}}$ obtenidos por: Ref. (1) [Kumar et al. \(2018\)](#), Ref. (2) [Li et al. \(2015\)](#), Ref. (3) [Yin et al. \(2013\)](#) y Ref (4) [Baferani et al. \(2011\)](#), respecto de los calculados con la metodología propuesta a través de la Ec. (14), para dos relaciones de aspecto $\lambda = a/b$.

Ω_i^{FG}	λ	1				0,5			
		Solución	$k=0$	$k=0,5$	$k=1$	$k=2$	$k=0$	$k=0,5$	$k=1$
Ω_1^{FG}	M. Ec.(14)	19,7392	16,7142	15,0610	13,6931	12,3370	10,4463	9,4131	8,5582
	Ref.(1)	19,7392	16,7142	15,0610	13,6931	12,3370	10,4463	9,4131	8,5582
	Ref.(2)	19,7398	16,7141	15,0609	13,6930	~	~	~	~
	Ref.(3)	19,7381	16,7127	15,0595	13,6917	~	~	~	~
	Ref.(4)	19,7281	16,6879	15,0357	13,6808	12,3259	10,4424	9,3849	8,5257
Ω_2^{FG}	M. Ec.(14)	49,3480	41,7854	37,6524	34,2326	19,7392	16,7142	15,0610	13,6931
	Ref.(1)	49,3480	41,7854	37,6524	34,2326	19,7392	16,7142	15,0610	13,6931
	Ref.(2)	49,3487	41,7852	37,6530	34,2334	~	~	~	~
	Ref.(3)	49,3386	41,7768	37,6446	34,2250	~	~	~	~
	Ref.(4)	49,3368	41,7694	37,6387	34,2020	19,7281	16,6879	15,0357	13,6808
Ω_3^{FG}	M. Ec.(14)	78,9568	66,8566	60,2438	54,7723	32,0762	27,1605	24,4741	22,2512
	Ref.(1)	78,9568	66,8566	60,2438	54,7722	32,0762	27,1605	24,4741	22,2512
	Ref.(2)	78,9559	66,8569	60,2428	54,7714	~	~	~	~
	Ref.(3)	78,9307	66,8351	60,2243	54,7546	~	~	~	~
	Ref.(4)	78,9125	66,8179	60,2088	54,6721	32,0541	27,1303	24,4536	22,2396

Tabla 1: Comparación de los primeros 3 coeficientes de frecuencia para placa FG (Alum-Al) isótropa SSSS.

Se puede visualizar una muy buena correlación entre los resultados, en particular los valores coinciden con los obtenidos por [Kumar et al. \(2018\)](#).

4.2 Caso propuesto

A los efectos de poner en evidencia la ventaja de la metodología propuesta se analiza, a modo de ejemplo, una placa rectangular delgada simplemente apoyada en sus cuatro bordes.

En la [Tabla 2](#) se presentan los valores del coeficiente de frecuencia Ω_i^H para una placa isótropa, para diferentes relaciones de aspecto y para un material caracterizado con $\nu = 0,3$. Los resultados se obtuvieron a partir de la aplicación del método clásico de Ritz ([Ilanko et al., 2014](#)) empleando 20 funciones aproximantes - funciones vigas ([Felix et al, 2004](#)) - en cada dirección. Los resultados obtenidos se comparan con los publicados en [Blevins \(2016\)](#).

λ	1/5	2/5	1/2	2/3	1	3/2	2	5/2	Solución
Ω_1^H	10,2644	11,4487	12,3370	14,2561	19,7392	32,0762	49,3480	71,5546	M. Ritz
	~	11,45	~	14,26	19,74	32,08	~	71,56	Blevins

Tabla 2: Coeficientes de frecuencias para placa homogénea isótropa ($\nu = 0,3$) SSSS.

Se puede apreciar, en la [Tabla 2](#), coincidencia entre los valores numéricos presentados.

A continuación, se proponen diferentes materiales graduales, los cuales serán utilizados para analizar la influencia de ciertos parámetros sobre el coeficiente de frecuencia fundamental de vibración de placas FG con la metodología propuesta en este trabajo.

FG (1): con ley asimétrica (Ec. (10)) y composición Alum-Ac, propiedades Ec. (9):

$$R(\bar{z}) = R_{\text{Alum}} + (R_{\text{Ac}} - R_{\text{Alum}})(0.5 + \bar{z}/h)^k \quad -h/2 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0. \quad (16)$$

FG (2): con ley asimétrica (Ec. (10)) y composición Ac-Alum, propiedades Ec. (9):

$$R(\bar{z}) = R_{\text{Ac}} + (R_{\text{Alum}} - R_{\text{Ac}})(0.5 + \bar{z}/h)^k \quad -h/2 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0. \quad (17)$$

FG (3): con ley simétrica (Ec. (1)) y composición Alum-Ac-Alum, propiedades Ec. (9):

$$R(\bar{z}) = \begin{cases} R_{\text{Alum}} + (R_{\text{Ac}} - R_{\text{Alum}})(1 + 2\bar{z}/h)^k & -h/2 \leq \bar{z} \leq 0, k \geq 0 \\ R_{\text{Alum}} + (R_{\text{Ac}} - R_{\text{Alum}})(1 - 2\bar{z}/h)^k & 0 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

FG (4): con ley simétrica (Ec. (1)) y composición Ac-Alum-Ac, propiedades Ec. (9):

$$R(\bar{z}) = \begin{cases} R_{\text{Ac}} + (R_{\text{Alum}} - R_{\text{Ac}})(1 + 2\bar{z}/h)^k & -h/2 \leq \bar{z} \leq 0, k \geq 0 \\ R_{\text{Ac}} + (R_{\text{Alum}} - R_{\text{Ac}})(1 - 2\bar{z}/h)^k & 0 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

En la Figura 3, se muestra la influencia de la relación de aspectos λ sobre los materiales FG propuestos en las Ecs. (16-19), mediante la aplicación de la Ec. (14). En todos los casos presentados, el coeficiente de frecuencia está referido al acero (Ac): $\Omega^{FG} = \omega a^2 \sqrt{\rho_{\text{Ac}} h / D_{\text{Ac}}}$.

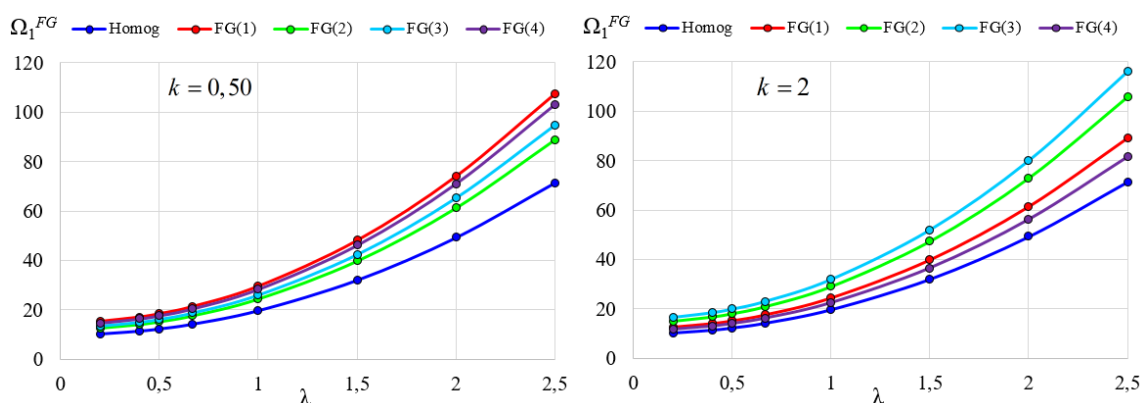


Figura 3: Variación de Ω_1^{FG} para $k = 0,50$ y $k = 2$, considerando diferentes relaciones de aspectos λ .

La curva azul indica la variación del coeficiente de frecuencia de una placa homogénea de Ac SSSS.

Se puede apreciar que para $k = 0,50$ el coeficiente fundamental tiene mayor incremento para el material FG (1), mientras que para $k = 2$ se evidencia para el material FG (3).

Más interesante resulta estudiar la influencia del parámetro k , de las leyes de variación del material (Ecs. (16-19)), sobre los coeficientes de frecuencia Ω^{FG} . En general, cualquier valor de k fuera del rango $[1/3; 3]$ es no deseado (Nakamura et al., 2000), debido a que el material FG contendría demasiado de uno de los materiales constituyentes (Cuando $k = 1/3$ o $k = 3$ uno de los materiales componentes constituye el 75% del total del material FG). Con este

propósito es que se asume una placa cuadrada ($\lambda = 1$) y se toma como referencia el coeficiente Ω_1^H dado en la [Tabla 2](#).

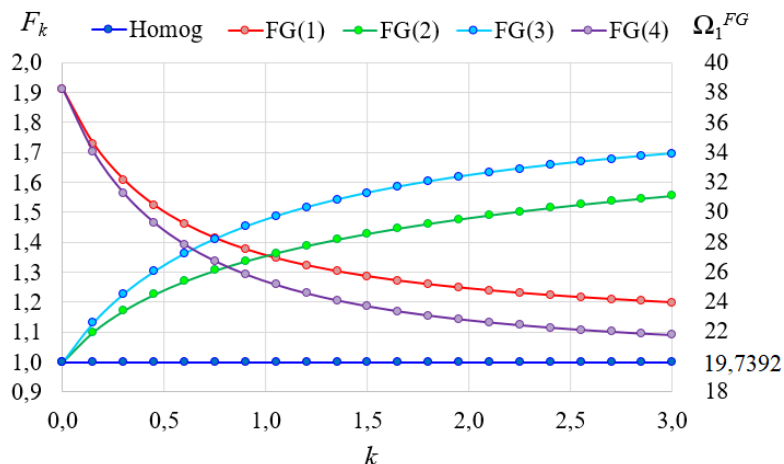


Figura 4: Coeficiente F_k y efecto de rigidización del primer coeficiente de placas FG SSSS para distintos k .

En la [Figura 4](#), se puede observar el efecto que tiene sobre el coeficiente fundamental de la placa incorporar distintas distribuciones y composiciones de material FG, y simultáneamente el porcentaje de rigidización que produce la elección de uno u otro material sobre una placa homogénea, por medio del coeficiente F_k :

$$\Omega_i^{FG} = \Omega_i^H F_k \text{ con } F_k = \sqrt{\rho_{Ac} h D_{11}^{FG} / I_0 D_{Ac}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \tag{20}$$

El valor del coeficiente F_k es el mismo para los modos superiores de vibrar y es independiente de las condiciones de borde y de la relación de aspecto de las placas analizadas. Por esto, en forma análoga, es posible obtener curvas para analizar el coeficiente de frecuencia de modos superiores de la placa FG SSSS; e incluso estudiar placas FG con otras configuraciones geométricas y de contorno, siempre que las propiedades, la composición y la ley de distribución del material FG sean las mismas (por ejemplo Ecs. (16-19)).

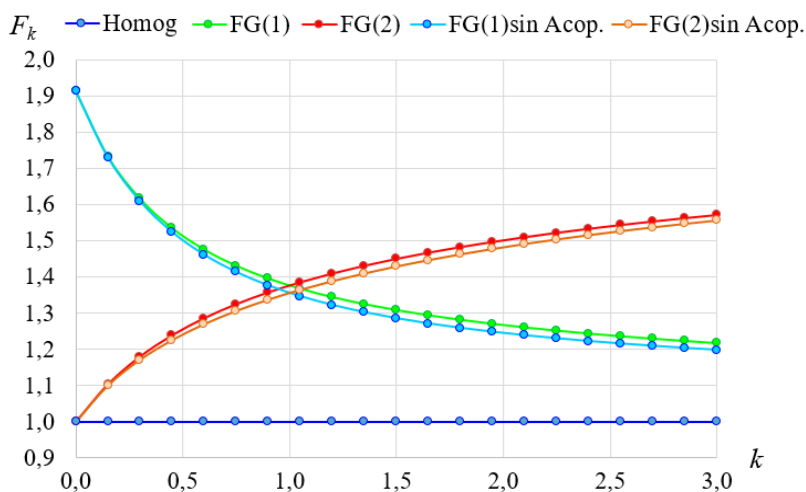


Figura 5: Efecto del acoplamiento evidenciado sobre el coeficiente F_k .

En la **Figura 5** se puede observar el efecto que produce el acoplamiento que se origina entre las deformaciones en el plano y las deformaciones de flexión sobre el coeficiente F_k , en las placas FG con ley de variación asimétrica (Ec. (10)). Las curvas indicadas como FG (1) y FG(2) contemplan este efecto y se obtienen a partir del coeficiente F_k dado en la Ec. (20) y la expresión de D_{11}^{FG} dada en la Ec. (12). Las curvas FG(1) sin Acop. y FG(2) sin Acop., se obtienen ignorando el efecto de este acoplamiento. En este caso el F_k se obtiene de la Ec. (12) bajo la hipótesis de que el plano neutro coincide con el plano medio de la placa, es decir, $\bar{z}_0 = 0$.

En la **Figura 5** se puede apreciar que, al ignorar el efecto de acoplamiento se está subestimando el valor real de la rigidización dinámica que se logra en las dos composiciones propuestas. Para valores de k cercanos a cero, la diferencia entre las curvas con y sin acoplamiento es menor dado que se tiende al caso de una placa con material homogéneo. En particular, para $k = 1$ la rigidización que se obtiene para los coeficientes de frecuencia es la misma para las dos composiciones propuestas.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un procedimiento para obtener los coeficientes de frecuencia de placas delgadas de materiales FG a partir de los coeficientes de frecuencia de placas delgadas, isótropas y homogéneas. La correlación es válida para materiales graduales, cuyos componentes responden a una ley de distribución en su espesor h . Mediante una correlación algebraica es posible estudiar analíticamente la influencia del valor de la potencia k sobre el coeficiente de frecuencia. Ello resulta sumamente útil para problemas de optimización y diseño de estos materiales, en particular cuando se pretende obtener una cierta rigidización dinámica de la placa original. Mediante la metodología propuesta no es necesario recurrir a la aplicación de algoritmos numéricos especiales para el tratamiento de las placas FG. Simplemente se puede acudir a valores tabulados de coeficientes de frecuencias de placas isótropas homogéneas, los cuales se encuentran disponibles en la diversa bibliografía técnico-científica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue patrocinado por: el Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta Proyecto CIUNSa N° 2511, la Universidad Católica de Salta, a través del proyecto de investigación aprobado por Res. Rec. 1734/16, la Universidad Nacional del Sur (UNS), el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC).

REFERENCIAS

- Abrate, S., Free Vibration, Buckling, and Static Deflections of Functionally Graded Plates. *Compos. Sci. Technol.*, 66(14):2382–2394, 2006.
- Abrate, S., Functionally Graded Plates Behave Like Homogenous Plates. *Compos. Part B: Eng.*, 39(1):151–158, 2008.
- Baferani, A.H., Saidi A. R. y Jomehzadeh, E., An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates. *P. I. Mech. Eng. C-J. Mec.*, 225(3): 526–536, 2011.
- Blevins, R. D., *Formulas for Dynamics, Acoustics and Vibration*. Wiley & Sons, 2016.

Chakraverty, S. y Pradhan, K.K., Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerosp. Sci. Technol.*, 36:132–156, 2014.

Chakraverty S. y Pradhan K.K., *Vibration of Functionally Graded Beams and Plates*. Elsevier, 2016.

Cheng, Z.Q. y Batra, R.C., Deflection Relationship Between the Kirchhoff Plate Theory and Different Functionally Graded Plate Theory. *Arch. Mech.*, 52(1):143–158, 2000.

Felix, D.H., Bambill, D.V. y Rossit, C.A., Desarrollo de un algoritmo de cálculo para la implementación del método de Rayleigh-Ritz en el cálculo de frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con complejidades adicionales, *Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, 20(2):123–138, 2004.

Ilanko, S., Monterrubio, L.E. y Mochida, Y., *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 2014.

Koizumi, M., FGM activities in Japan. *Compos Part B-Eng.*, 28(1–2):1–4, 1997.

Kumar, S., Ranjan, V. y Jana, P., Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Compos. Struct.*, 197:39–53, 2018.

Li, S., Wang, X. y Batra, R.C., Correspondence relations between deflection, buckling load and frequencies of thin functionally graded material plates and those of corresponding homogeneous plates. *J. Appl. Mech.*, 82:1–8, 2015.

Liu, D.Y., Wang C.Y. y Chen, W.Q., Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity. *Compos. Struct.*, 92(5):1047–51, 2010.

Mohammadi, M., Saidi, A. R., y Jomehzadeh, E., Levy Solution for Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates. *Appl. Compos. Mater.*, 17(2):81–93, 2010.

Nakamura, T., Wang, T. y Sampath, S., Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation. *Acta Materialia*, 48:4293–4306, 2000.

Natarajan, S. y Manickam, G., Bending and vibration of functionally graded materials sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elem. Anal. Des.*, 57:32–42, 2012.

Pradhan, K.K. y Chakraverty, S., Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports. *A.C.M.E.*, 15:721–734, 2015.

Qian, L.F. y Batra, R.C., Design of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies. *J. Sound Vib.*, 280(1):415–424, 2005.

Reddy J.N., *Mechanics of Composite Laminated Plates and Shell: Theory and Analysis*. CRC Press, 2004.

Shariat, B.A.S, Javaheri, R. y Eslami, M.R., Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates Under In-Plane Compressive Loading. *Thin-Walled Struct.*, 43(7):1020–1036, 2005.

Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Compos. Struct*, 106:854–862, 2013.

Suresh, S. y Mortensen, A., Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 2 Thermomechanical behaviour. *Int. Mater. Rev*; 42(3):85–116, 1997.

Thang, P.T. y Lee, J., Free vibration characteristics of sigmoid-functionally graded plates reinforced by longitudinal and transversal stiffeners. *Ocean Engineering*, 148: 53–61, 2018.

Tornabene, F., Viola, E., Free vibrations of four-parameter functionally graded parabolic panels and shells of revolution. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 28:991–1013, 2009.

Yin, S., Yu, T. y Liu, P., Free vibration analyses of FGM thin plates by isogeometric analysis based on classical plate theory and physical neutral surface. *Adv. Mech. Eng.*, 5(634584):1–10, 2013.

Zhao, X., Lee, Y.Y. y Liew, K.M., Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib.*, 319:918–939, 2009.