

## VIBRACIONES LIBRES DE MICROVIGA TIMOSHENKO EMBEBIDA EN FUNDACIÓN ELÁSTICA POR LA TEORÍA MODIFICADA DEL SEGUNDO GRADIENTE Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### FREE VIBRATIONS OF TIMOSHENKO MICROBEAMS EMBEDDED ON ELASTIC FOUNDATION BY THE MODIFIED THEORY OF THE SECOND GRADIENT AND THE FINITE ELEMENTS METHOD

Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Graciela I. Guerrero<sup>a</sup> y Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Ingeniería (II-UNS)-CIC, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar. <http://www.uns.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), dbambill@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** microviga, medio elástico, Timoshenko, frecuencias, elementos finitos.

**Resumen.** Se presenta un análisis de micro-componentes estructurales utilizados en dispositivos micro y nano-electro-mecánicos embebidos en una fundación elástica. Se considera la incidencia del tamaño mínimo de partícula del material. El desarrollo se basa en la Teoría Modificada del Segundo Gradiente. En ella se toman en cuenta tres nuevas constantes de material, definidas como parámetros de longitud de escala. Se analiza una microviga Timoshenko vibrante embebida en una fundación elástica y con condiciones de borde clásicas en los extremos de la misma. Las ecuaciones gobernantes se obtienen mediante la aplicación del principio variacional de Hamilton, en tanto que la resolución de las mismas, se alcanza mediante la utilización del método de elementos finitos. En cada elemento se extiende el número de grados de libertad, para satisfacer la teoría elástica de orden superior utilizada aquí. Se presentan resultados de frecuencias naturales para el modelo planteado, con distintas condiciones de vinculación y diferentes relaciones adimensionales del parámetro de longitud de escala, establecidas con respecto a la altura de la microviga.

**Keywords:** microbeam, elastic medium, Timoshenko, frequencies, finite elements.

**Abstract.** An analysis of structural micro-components used in micro and nano-electro-mechanical devices, embedded in an elastic foundation is presented in this paper. The effects of the minimum material particle size is considered. The development is based on the Modified Second Gradient Theory. It takes into account, three new constants of material, defined as the scale length parameters. A vibrating Timoshenko microbeam, embedded on an elastic foundation, with classic boundary conditions at the ends, is analyzed. The governing equations are obtained through the application of Hamilton's variational principle, while the resolution of them is achieved by means of the finite element method. It is necessary to extend the number of degrees of freedom in each element to satisfy the higher order elastic equations used here. Results of natural frequencies of the model, are presented, for different boundary conditions and for different ratios defined between the scale length parameters and the microbeam height.

## 1. INTRODUCCIÓN

La primera contribución sobre teoría del continuo generalizado aplicada a sólidos elásticos, denominada elasticidad micropolar, se remonta a los comienzos del siglo XX, época en que aparece el primer trabajo completo, que considera al cuerpo deformable conformado por partículas de tamaño finito y con grados de libertad independiente. El mismo fue publicado por los hermanos Cosserat en 1909, y reeditado cien años después, [Cosserat y Cosserat \(2009\)](#). Luego de transcurrir varias décadas sin nuevos aportes, surgieron a comienzos de los sesenta, un número muy significativo de contribuciones, junto con un mayor interés en su aplicación. Entre los trabajos relevantes del tema, se destacan: las contribuciones de Eringen con la denominada teoría de elasticidad no local, [Eringen y Suhubi \(1964\)](#); [Eringen \(1966\)](#) y los trabajos publicados por Mindlin y sus colaboradores, [Mindlin \(1965\)](#); [Mindlin y Eshel \(1968\)](#), destacando que Mindlin fue quien acuñó el concepto de microestructura, proporcionando los fundamentos requeridos en el desarrollo de diferentes variantes actuales, [Lam et al. \(2003\)](#); [Ma et al. \(2008\)](#), entre las que se encuentra la teoría modificada del segundo gradiente, [Kong et al. \(2009\)](#), utilizada en el presente trabajo.

Dentro de dichas teorías, aplicamos aquí la denominada teoría modificada del segundo gradiente de desplazamientos, conocida por su sigla en Inglés, MSGT. Si bien pueden encontrarse en la literatura numerosos trabajos basados en teorías microestructurales, son escasos los estudios que contemplan adicionalmente al modelo embebido en una fundación elástica.

Con el objeto de enriquecer trabajos presentados anteriormente por los autores, [Felix et al. \(2016\)](#); [Guerrero et al. \(2016, 2018\)](#), se propone en el presente estudio, el desarrollo y aplicación de un algoritmo basado en elementos finitos, que permite resolver un modelo de microviga embebida en una fundación elástica del tipo Pasternak.

## 2. CARACTERÍSTICAS DEL MODELO ANALIZADO

El modelo analizado consiste de una microviga Timoshenko con condiciones de contorno clásicas, embebida en una fundación elástica del tipo Pasternak.

A diferencia del modelo Winkler, en el que la deformación de cada resorte es independiente y en consecuencia, no afecta a los resortes restantes, el modelo Pasternak introduce una placa entre la viga embebida y los resortes, que se deforma por sollicitaciones de corte puro. Dicha placa permite vincular los resortes entre sí. La cinemática de los desplazamientos es descrita entonces mediante dos parámetros independientes, el giro y el desplazamiento transversal.

De esta manera, el modelo propuesto, contempla: deformación por corte, inercia rotatoria, incidencia de los parámetros que definen la longitud de escala del material y la posibilidad de embeber la microviga en un medio elástico del tipo Pasternak.

## 3. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES

La forma débil de las ecuaciones gobernantes es obtenida mediante la aplicación del principio de Hamilton, que permite establecer que cuando la microviga embebida en la fundación elástica vibra transversalmente, se cumple, [Jam et al. \(2017\)](#):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W) dt = 0 \quad (1)$$

con lo cual debemos evaluar, la variación de la energía cinética y la variación de la energía de deformación de la microviga.

La variación de la energía de deformación,  $\delta U$  puede ser expresada en función del desplazamiento transversal  $w$  y del giro de la sección transversal  $\delta\varphi$ , ambos correspondientes a la microviga Timoshenko, como sigue, [Felix et al. \(2017\)](#), [Abohadima \(2015\)](#):

$$\delta U = \int_0^L \left[ c_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial x^2} - \left( c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} - c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \delta \varphi + \left( c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right] dx \quad (2)$$

donde las  $c_i$  son constantes que tienen en cuenta las propiedades mecánicas y geométricas de la microviga:

$$c_1 = \mu I_y \left( \frac{4}{5} l_1^2 + 2 l_0^2 \right) \quad (3a)$$

$$c_2 = \left[ \mu A \left( \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2 l_0^2 \right) + I_y (\lambda + 2 \mu) \right] \quad (3b)$$

$$c_3 = \mu A \kappa \quad (3c)$$

$$c_4 = \mu A \left( \frac{16}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \quad (3d)$$

$$c_5 = \mu A \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{8}{15} l_1^2 \right) \quad (3e)$$

siendo  $\lambda$  y  $\mu$ , las constantes elásticas de Lamé utilizadas en las ecuaciones constitutivas de materiales isótropos;  $l_0$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , los parámetros de longitud de escala del material;  $A$  e  $I_y$ , el área y el momento de inercia de la sección transversal de la microviga, mientras que  $\kappa$  es el factor de corrección de corte.

La variación del trabajo realizado por la fundación elástica  $\delta W$ , es función del desplazamiento transversal  $w$  y de la pendiente  $\partial w / \partial x$ , ambos de la viga, [Morfidis \(2010\)](#) resultando:

$$\delta W = - \int_0^L \left[ \bar{k}_w w \delta w + \bar{k}_p \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right] dx \quad (4)$$

siendo  $\bar{k}_w$ , el coeficiente de rigidez al desplazamiento transversal y  $\bar{k}_p$ , el coeficiente de fricción horizontal, ambos correspondientes a la fundación. En función de los respectivos coeficientes adimensionales, los mismos resultan expresados en la forma:

$$\bar{k}_w = \frac{k_w L^4}{E I_y} \quad (5)$$

$$\bar{k}_p = \frac{k_p L^2}{E I_y} \quad (6)$$

y la variación de la energía cinética de la microviga resulta:

$$\delta T = -\rho \omega^2 \int_0^L (A w \delta w + I_y \varphi \delta \varphi) dx \quad (7)$$

siendo  $\rho$ , la densidad del material, y  $\omega$ , las frecuencias naturales de vibración transversal de la microviga.

#### 4. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES CON ELEMENTOS FINITOS

Se propone resolver numéricamente la ecuación variacional planteada, mediante la aplicación del método de elementos finitos. Para ello se utiliza, como base, un elemento de orden superior, propuesto por Zhang y sus colaboradores, [Zhang et al. \(2014\)](#), que contiene grados de libertad adicionales, que permiten garantizar la continuidad tanto en  $C_0$  como en  $C_1$  del desplazamiento  $w$  y del giro  $\varphi$  buscados. A modo de contribución original, a dicho elemento se le adiciona la incidencia del medio elástico embebido. Se trata de un elemento para microviga Timoshenko, de 2 nodos con 4 grados de libertad por nodo. La Figura 1 muestra esquemáticamente el elemento utilizado.

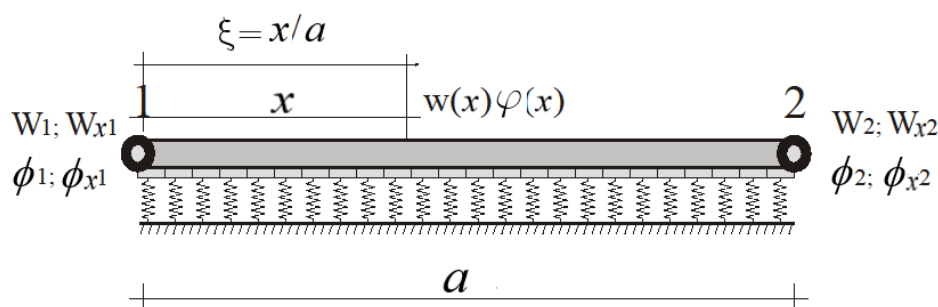


Figura 1: Elemento de microviga utilizado en el algoritmo de elementos finitos

El vector de desplazamientos nodales del elemento queda formado del siguiente modo:

$$\{U_e\} = \{W_1, W_{x1}, \phi_1, \phi_{x1}, W_2, W_{x2}, \phi_2, \phi_{x2}\}^t \quad (8)$$

siendo  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , los desplazamiento y giros nodales, mientras que  $W_{x1}$ ,  $W_{x2}$ ,  $\phi_{x1}$  y  $\phi_{x2}$  sus respectivas derivadas.

Las funciones de forma correspondientes resultan:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (9a)$$

$$N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) a \quad (9b)$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (9c)$$

$$N_4(\xi) = (\xi^3 - \xi^2) a \quad (9d)$$

siendo  $\xi$ , la variable local, adimensional de posición en el elemento. Con las funciones de forma establecidas pueden expresarse, la forma aproximada del desplazamiento transversal  $w$  y del giro  $\varphi$  de la microviga como sigue:

$$w(\xi) = N_1(\xi) W_1 + N_2(\xi) W_{x1} + N_3(\xi) W_2 + N_4(\xi) W_{x2} \quad (10a)$$

$$\varphi(\xi) = N_1(\xi) \phi_1 + N_2(\xi) \phi_{x1} + N_3(\xi) \phi_2 + N_4(\xi) \phi_{x2} \quad (10b)$$

o bien en forma matricial, resultando en la forma:

$$w(\xi) = [N_w] \{U_e\} \quad (11a)$$

$$\varphi(\xi) = [N_\varphi] \{U_e\} \quad (11b)$$

resultando para las matrices que contienen las funciones de forma:

$$[N_w] = [N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi), 0, 0] \quad (12a)$$

$$[N_\varphi] = [0, 0, N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi)] \quad (12b)$$

Reemplazando la forma aproximada del desplazamiento transversal  $w$  y del giro de la sección transversal  $\varphi$  en las expresión variacional (1), se obtiene la forma discreta de la ecuación gobernante, dada por la expresión matricial:

$$[K] - \omega^2[M] = 0 \quad (13)$$

En la que  $[K]$ , es la matriz de rigidez de la microviga embebida en la fundación elástica y  $[M]$ , la correspondiente matriz de masa. Como es sabido, ambas se obtienen mediante el ensamblado de las correspondientes matrices de cada elemento. La matriz de rigidez del elemento,  $[k_e]$  resulta:

$$\begin{aligned} [k_e] = & \frac{c_1}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right) d\xi - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & + \frac{c_2}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi - c_3 \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t ([N_\varphi]) d\xi \\ & + c_3 a \int_0^1 ([N_\varphi])^t ([N_\varphi]) d\xi + \frac{c_5}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi \\ & - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \frac{c_3}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & - c_3 \int_0^1 ([N_\varphi])^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi + \bar{k}_w \int_0^1 ([N_w])^t ([N_w]) d\xi \\ & + \bar{k}_p \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t ([N_w]) d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

mientras que la matriz de masa del elemento  $[m_e]$  toma la forma:

$$[m_e] = \rho a A \int_0^1 ([N_w])^t ([N_w]) d\xi + \rho a I_y \int_0^1 ([N_\varphi])^t ([N_\varphi]) d\xi \quad (15)$$

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Los modelos resueltos consistieron en microvigas Timoshenko con condiciones de borde clásicas, embebidas en una fundación elástica del tipo Pasternak. Se adoptaron para los parámetros de longitud de escala:  $l_0 = l_1 = l_2 = l$ . Con el algoritmo desarrollado en elementos finitos descripto anteriormente. Se obtuvieron los primeros dos coeficientes de frecuencia  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , definidos en la forma:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} L^2 \omega_i \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (16)$$

Se definieron una serie de dichos modelos, haciendo variar: el parámetro de longitud de escala  $l$ , los coeficientes de rigidez de la fundación elástica  $k_w$  y  $k_p$ , la esbeltez de la viga  $L/h$  y las condiciones de borde de la microviga, con el fin de apreciar la incidencia de cada parámetro de configuración mencionado y de establecer valores que puedan servir de referencia para futuros trabajos. En todos los casos se adopta sección rectangular,  $\kappa = 5/6$ .

Las Tablas 1 y 2 contienen los valores del coeficiente de frecuencia fundamental y del segundo coeficiente de frecuencia respectivamente, de la microviga simplemente apoyada. Puede apreciarse en todos los casos el incremento de los coeficientes de frecuencia, conforme se elevan los valores de  $k_w$  y  $k_p$ , por un lado y la disminución de los mismos cuando crece el espesor  $h$  de la microviga. Las Tablas 3 y 4 contienen los valores del coeficiente de frecuencia fundamental y del segundo coeficiente de frecuencia respectivamente, de la microviga empotrada-libre. Las Tablas 5 y 6 contienen los valores del coeficiente de frecuencia fundamental y del segundo coeficiente de frecuencia, respectivamente de la microviga empotrada-empotrada.

En la primer columna, se tiene la esbeltez  $L/h$  de la microviga. Como puede apreciarse, se ha considerado un valor de esbeltez alto ( $L/h = 100$ ), para el cual se tienen resultados similares al que arrojaría el modelo de microviga Euler; y un valor de esbeltez bajo ( $L/h = 10$ ), en el cual se requiere el modelo de microviga Timoshenko para obtener valores de mayor precisión. De este modo se pueden comparar los resultados de ambos modelos.

La segunda columna tiene en cuenta la rigidez traslacional de los resortes a través del coeficiente adimensional  $k_w$ , siendo este coeficiente el correspondiente a la teoría de Winkler.

La tercer columna corresponde al efecto Pasternak, mencionado anteriormente, el cual se cuantifica mediante el coeficiente adimensional  $k_p$ . Cuando  $k_p = 0$  significa que el efecto Pasternak no es tenido en cuenta.

las columnas restantes corresponden a diferentes valores de la relación  $h/l$ , siendo  $h$  el espesor de la microviga y  $l$  el parámetro de escala mencionado anteriormente. La última columna de cada tabla indicada con "TC", contiene los coeficientes de frecuencia correspondientes a la teoría clásica, es decir cuando  $h \gg l$ . Estos valores permiten comparar los resultados que provienen de aplicar la teoría de microvigas con los resultados de la teoría clásica.

$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	34.1755	21.9293	15.9622	13.9011	13.1232
		10	35.5846	24.0620	18.7828	17.0650	16.4373
		50	40.7366	31.1662	27.2909	26.1364	25.7302
	100	0	35.6028	24.0889	18.8172	17.1029	16.4766
		10	36.9576	26.0454	21.2623	19.7607	19.2209
		50	41.9412	32.7218	29.0531	27.9710	27.5917
	1000	0	46.5184	38.4022	35.3232	34.4372	34.1292
		10	47.5632	39.6587	36.6842	35.8314	35.5354
		50	51.5311	44.3301	41.6859	40.9362	40.6770
100	0	0	40.8750	23.5703	16.6025	14.3386	13.4996
		10	42.0649	25.5782	19.3477	17.4437	16.7609
		50	46.5211	32.3882	27.7324	26.4393	25.9938
	100	0	42.0804	25.6037	19.3813	17.4811	16.7998
		10	43.2371	27.4634	21.7790	20.1066	19.5172
		50	47.5836	33.8968	29.4801	28.2671	27.8509
	1000	0	51.6787	39.4395	35.7150	34.7205	34.3825
		10	52.6249	40.6714	37.0709	36.1137	35.7889
		50	56.2506	45.2650	42.0595	41.2184	40.9341

Tabla 1: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , de una microviga Timoshenko Articulada-Articulada, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .

$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	106.111	75.0270	57.8170	51.2495	48.6751
		10	107.945	77.5798	61.0739	54.8890	52.4901
		50	114.987	87.0452	72.6551	67.5118	65.5655
	100	0	106.579	75.6818	58.6591	52.1954	49.6692
		10	108.404	78.2132	61.8716	55.7732	53.4131
		50	115.419	87.6102	73.3269	68.2325	66.3067
	1000	0	110.697	81.3378	65.7541	60.0414	57.8519
		10	112.456	83.6983	68.6352	63.1762	61.0962
		50	119.232	92.5396	79.1165	74.4053	72.6377
100	0	0	162.347	94.0544	66.3271	57.2985	53.9507
		10	163.558	96.1295	69.2383	60.6447	57.4920
		50	168.315	104.017	79.8283	72.5010	69.8853
	100	0	162.655	94.5843	67.0764	58.1643	54.8693
		10	163.863	96.6481	69.9564	61.4634	58.3549
		50	168.612	104.496	80.4520	73.1872	70.5969
	1000	0	165.397	99.2265	73.4776	65.4431	62.5328
		10	166.586	101.196	76.1158	68.3919	65.6125
		50	171.259	108.716	85.8617	79.0953	76.7048

Tabla 2: Segundo coeficiente de frecuencia  $\Omega_2$ , de una microviga Timoshenko Articulada-Articulada, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .

$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	13.2152	8.10623	5.80481	5.03344	4.74504
		10	14.6111	10.3487	8.64567	8.11249	7.91737
		50	18.8044	15.6706	14.3230	13.8620	13.6872
	100	0	16.5645	12.8598	11.5471	11.1790	11.0520
		10	17.6986	14.3805	13.2078	12.8654	12.7433
		50	21.2933	18.5834	17.4621	17.0861	16.9446
	1000	0	34.2351	32.5934	32.0945	31.9628	31.9183
		10	34.8001	33.2279	32.7372	32.6012	32.5536
		50	36.7642	35.2604	34.6830	34.4955	34.4258
100	0	0	14.5802	8.40045	5.91591	5.10897	4.80995
		10	16.0709	10.7269	8.82657	8.25186	8.04390
		50	20.7201	16.3814	14.7204	14.1784	13.9773
	100	0	17.6799	13.0600	11.6187	11.2293	11.0965
		10	18.9280	14.6650	13.3381	12.9650	12.8336
		50	23.0069	19.1923	17.7957	17.3500	17.1861
	1000	0	34.8216	32.7189	32.1708	32.0322	31.9859
		10	35.4716	33.3921	32.8310	32.6812	32.6293
		50	37.8059	35.6135	34.8807	34.6555	34.5737

Tabla 3: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , de una microviga Timoshenko Empotrada-Libre, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .

$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	59.2227	42.8269	32.8854	29.0786	27.5916
		10	61.3480	45.9233	36.9978	33.7134	32.4563
		50	69.0999	56.2918	49.4710	47.0392	46.1121
	100	0	60.0517	43.9603	34.3433	30.7157	29.3110
		10	62.1487	46.9823	38.3002	35.1362	33.9314
		50	69.8120	57.1600	50.4546	48.0719	47.1649
	1000	0	67.0535	53.0828	45.4037	42.7124	41.7087
		10	68.9381	55.6133	48.4711	46.0016	45.0844
		50	75.9205	64.4499	58.5677	56.5234	55.7527
100	0	0	90.7690	52.5264	37.0310	31.9881	30.1184
		10	92.5227	55.5068	41.1350	36.6470	35.0190
		50	99.1777	65.8475	53.9329	50.3622	49.0807
	100	0	91.3180	53.4696	38.3571	33.5143	31.7347
		10	93.0614	56.4002	42.3327	37.9865	36.4185
		50	99.6805	66.6023	54.8519	51.3452	50.0888
	1000	0	96.1184	61.3087	48.6932	44.9774	43.6675
		10	97.7762	63.8807	51.8828	48.4018	47.1813
		50	104.096	73.0455	62.5181	59.4653	58.3839

Tabla 4: Segundo coeficiente de frecuencia  $\Omega_2$ , de una microviga Timoshenko Empotrada-Libre, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .

$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	52.1416	40.3360	32.0009	28.5837	27.2165
		10	53.1029	41.6362	33.6916	30.4911	29.2228
		50	56.7786	46.4302	39.6372	37.0134	35.9935
	100	0	53.0910	41.5532	33.5191	30.2724	28.9843
		10	54.0354	42.8165	35.1369	32.0797	30.8762
		50	57.6517	47.4916	40.8730	38.3330	37.3487
	1000	0	60.9736	51.2228	44.9306	42.5545	41.6445
		10	61.7977	52.2531	46.1508	43.8595	42.9838
		50	64.9836	56.1488	50.6567	48.6233	47.8485
100	0	0	91.8102	53.2691	37.5792	32.4667	30.5706
		10	92.4721	54.4072	39.1763	34.3019	32.5125
		50	95.0687	58.7174	44.9469	40.7487	39.2440
	100	0	92.3531	54.1995	38.8869	33.9717	32.1644
		10	93.0112	55.3185	40.4323	35.7297	34.0155
		50	95.5931	59.5628	46.0457	41.9576	40.4979
	1000	0	97.1031	61.9475	49.1131	45.3209	43.9825
		10	97.7292	62.9289	50.3456	46.6532	45.3538
		50	100.190	66.6906	54.9556	51.5786	50.3983

Tabla 5: Coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$ , de una microviga Timoshenko Empotrada-Empotrada, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .



$L/h$	$k_w$	$k_p$	$h/l$				
			1	2	4	8	TC
10	0	0	116.257	91.6824	76.3900	69.6388	66.8123
		10	117.938	93.8332	79.0117	72.5340	69.8361
		50	124.436	101.969	88.6747	83.0309	80.7122
	100	0	116.684	92.2213	77.0326	70.3412	67.5432
		10	118.359	94.3597	79.6332	73.2086	70.5358
		50	124.835	102.453	89.2290	83.6210	81.3185
	1000	0	120.458	96.9358	82.5914	76.3724	73.7962
		10	122.081	98.9724	85.0224	79.0217	76.5452
		50	128.369	106.717	94.0706	88.7559	86.5842
100	0	0	249.642	146.155	103.341	89.3310	84.1285
		10	250.551	147.714	105.538	91.8645	86.8142
		50	254.149	153.780	113.874	101.323	96.7625
	100	0	249.842	146.496	103.824	89.8887	84.7205
		10	250.750	148.052	106.011	92.4070	87.3880
		50	254.345	154.104	114.312	101.815	97.2776
	1000	0	251.636	149.536	108.070	94.7610	89.8734
		10	252.538	151.060	110.173	97.1530	92.3922
		50	256.108	156.996	118.182	106.141	101.797

Tabla 6: Segundo coeficiente de frecuencia  $\Omega_2$ , de una microviga Timoshenko Empotrada-Empotrada, embebida en un medio elástico Winkler-Pasternak, para diferentes valores de  $h/l$ , con:  $\nu = 0,38$ ,  $\kappa = 5/6$ .

## 6. CONCLUSIONES

El análisis numérico de los resultados precedentes permite obtener las siguientes conclusiones:

1. Se comprueba numéricamente que cuando la altura o espesor  $h$  de la microviga embebida en un medio elástico, está en el orden del parámetro de longitud de escala del material  $l$ , la teoría clásica del continuo resulta insuficiente para obtener resultados con buena precisión.
2. En todos los casos analizados, los resultados obtenidos muestran, que para una relación de  $h/l = 8$ , los coeficientes de frecuencias naturales resultan próximos a los obtenidos con la teoría clásica, independientemente de la influencia del medio elástico embebido. Puede decirse entonces que la viga comienza a dejar de tener dimensión micro-estructural.
3. Se aprecia en los resultados obtenidos, que el efecto Pasternak es muy significativo con lo que, la aplicación del modelo Winkler únicamente resultaría insuficiente, tal como ocurre en el caso clásico.
4. Al igual que sucede en la formulación del elemento viga basado en la teoría clásica de elasticidad, la incorporación dentro de la formulación del elemento, de la influencia del medio elástico sobre la microviga, ha resultado ser muy conveniente desde el punto de vista práctico, ya que evita colocar vínculos elásticos en los nodos.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen al Departamento de Ingeniería, a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional

de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC), bajo cuyos auspicios se desarrolló el presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Abohadima S. *Mathematical Problems in Engineering*, 4, 2015.
- Cosserat E. y Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. A. Hermann et Fils, Paris (1909), reeditado por Gabay, Paris, 2009.
- Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 15:909–923, 1966.
- Eringen A. y Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids. 2:189–203, 1964.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Análisis dinámico de microvigas Timoshenko mediante la teoría elástica del primer gradiente de deformación y. *Mecánica Computacional*, 34:3553–3569, 2016.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Teoría modificada del segundo gradiente en vibraciones naturales de sistemas de microvigas Timoshenko, por el método de elementos finitos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 2017.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Teoría modificada del gradiente aplicada al análisis de vibraciones libres de una microviga Euler Bernoulli con vínculos elásticos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, páginas 545–564, 2016.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Efecto Poisson en las vibraciones libres de una microviga por la teoría del gradiente. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, páginas 225–234, 2018.
- Jam J., Noorabadi M., y N. N. Nonlinear free vibration analysis of microbeams resting on viscoelastic foundation based on the modified couple stress theory. *Archive of Mechanical Engineering*, 64:239–256, 2017.
- Kong S., Zhou S. and Nie Z., y Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- Lam D., Yang F., Chong A., J. W., y P. T. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- Ma H., Gao X., y Reddy J. A microstructure-dependent timoshenko beam model based on a modified couple stress theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:3379–3391, 2008.
- Mindlin R. Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.
- Mindlin R. y Eshel N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- Morfidis K. Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. *Computers and Structures*, 88:294–308, 2010.
- Zhang B., Yuming H., Dabiao L., Zhipeng G., y Shen L. Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. 79:22–39, 2014.