

MODELO CON ENDURECIMIENTO CINEMATICO PARA HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS

MODEL WITH KINEMATIC HARDENING FOR FIBER REINFORCED CONCRETE

Paula L. Argañaraz Saenz^{a,b}, Facundo A. Isla^{a,b} y Bibiana M. Luccioni^{a,b}

^a*Instituto de Estructuras "Arturo M. Guzmán", FACET, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina, plarganarazsaenz@herrera.unt.edu.ar, fisla@herrera.unt.edu.ar, bluccioni@herrera.unt.edu.ar, <http://www.facet.unt.edu.ar/iest/>*

^b*CONICET, Godoy Cruz 2290, C1425FQB CABA, Argentina, <http://www.conicet.gov.ar/>*

Palabras Clave: Endurecimiento cinemático, hormigón reforzado con fibras, comportamiento cíclico, modelo constitutivo.

Resumen. En este trabajo se presenta la incorporación del endurecimiento cinemático en un modelo elasto-plástico acoplado con daño previamente desarrollado para hormigón reforzado con fibras (HRF) bajo cargas cuasi estática monótona creciente con el fin de simular el efecto *ratchetting* que se observa en el comportamiento cíclico del material. Incorporar un modelo de endurecimiento cinemático no lineal en las fibras permite reproducir la forma de los lazos de histéresis del material observados experimentalmente bajo cargas cíclicas. El modelo de compuesto considera las propiedades constitutivas de la matriz de hormigón y de las fibras. Se calibran los parámetros materiales necesarios para poder desarrollar el modelo de endurecimiento cinemático no lineal. Se estudian numéricamente problemas simples donde se aplican ciclos de carga y descarga que ilustran la capacidad del modelo para reproducir el comportamiento cíclico del HRF.

Keywords: Kinematic hardening, fiber reinforced concrete, cyclic behavior, constitutive model.

Abstract. The incorporation of kinematic hardening in a coupled plastic-damaged model previously developed for fiber reinforced concrete (FRC) under quasi-static monotonously increasing loads is presented in this paper. In this way, the model is able to simulate the ratchetting effect which is observed in the cyclic behavior of the material. The incorporation of a non-linear kinematic hardening model in the fibers allows reproducing the shape of the hysteresis loops experimentally observed under cyclic loading. The composite model considers the constitutive properties of the concrete matrix and the fibers. The material parameters of the nonlinear kinematic hardening model are calibrated using experimental results. Simple problems under loading and unloading cycles are numerically analyzed. These examples illustrate the model's ability to reproduce the cyclic behavior of FRC.

1 INTRODUCCION

Generalmente, cuando los materiales, en particular los metales, son sometidos a cargas cíclicas presentan fenómenos como el efecto *ratchetting* el cual da lugar a una acumulación de deformación plástica ciclo a ciclo dando lugar a lazos de histéresis abiertos y el efecto Bauschinger, que se manifiesta cuando al superar el límite de elasticidad del material en una dirección, se reduce este límite en la dirección opuesta. Ambos efectos se observan generalmente en metales bajo cargas cíclicas. Para simular ambos tipos de efectos es necesario incorporar endurecimiento cinemático a los modelos constitutivos. Este tipo de endurecimiento produce un desplazamiento sin cambio de forma de la superficie de fluencia. Se ha propuesto distintas formas de simular el endurecimiento de la superficie de fluencia que difieren básicamente en la regla de evolución del desplazamiento de la superficie de fluencia que siempre está ligada a la evolución de las deformaciones plásticas.

Prager (1956) propuso una ley de endurecimiento cinemático lineal, en la cual la variable de endurecimiento cinemático es proporcional a la tasa de deformación plástica y el factor de proporcionalidad es una constante del material la cual depende del módulo plástico inicial. Este modelo permite reproducir el efecto Bauschinger no así la acumulación de deformación plástica bajo carga cíclica con tensión media no nula.

Armstrong y Frederick (1966) propusieron una ley de endurecimiento no lineal para modificar la ley de endurecimiento cinemático lineal de Prager, incorporando un término proporcional a la variable de endurecimiento cinemático incrementada por la norma de la tasa de deformación plástica y una constante del material. A medida que se desarrolla endurecimiento cinemático, el término adicional se activa y disminuye la tasa de crecimiento del endurecimiento cinemático. Este modelo puede simular el efecto *ratchetting* bajo cargas uniaxiales.

Chaboche et al. (1979), Chaboche (1986) y Chaboche (1991) propusieron descomponer la ley de endurecimiento cinemático en componentes donde cada una de estas tiene la forma de variación del modelo de Armstrong-Frederick. Este modelo es capaz de reproducir de forma más precisa el efecto *ratchetting* que el modelo de Armstrong-Frederick en el caso uniaxial, no así en el caso de *ratchetting* multiaxial.

Ohno y Wang (1993) asumieron que la recuperación dinámica del endurecimiento cinemático se activa cuando su magnitud alcanza un valor crítico, este modelo simula con mejor precisión el *ratchetting* bajo cargas cíclicas multiaxiales.

Rezaiee-Pajand y Sinaie (2009) determinaron los parámetros del modelo de endurecimiento cinemático de Chaboche en el caso de *ratchetting* uniaxial usando un enfoque matemático, a diferencia de los otros modelos en donde los parámetros se obtienen a partir de resultados experimentales de *ratchetting* uniaxial. De esta manera se logra mejorar la predicción del *ratchetting* uniaxial del modelo de Chaboche.

Abdel-Karim (2010) extendieron el modelo de Ohno-Wang incorporando el endurecimiento isótropo, en función de la deformación plástica acumulada. En este modelo se asocia el endurecimiento isótropo con el endurecimiento cinemático. Simularon el *ratchetting* multiaxial observado en resultados experimentales de acero.

Todos los modelos anteriormente descriptos fueron desarrollados y calibrados para metales y utilizando condición de fluencia Von Mises.

En este trabajo se extiende un modelo de compuesto ya desarrollado para HRF incorporando un modelo de endurecimiento cinemático no lineal a las fibras con el efecto de poder simular adecuadamente la forma de los lazos de histéresis bajo cargas cíclicas del HRF que no pueden reproducirse con modelos elastoplásticos y daño con endurecimiento isótropo (Argañaraz et al., 2017).

2 MODELO DEL HRF

El HRF puede ser interpretado como un compuesto consistente en una matriz de hormigón con fibras dispersas en la misma. Como aproximación, se supone que las fibras están orientadas en un número discreto de direcciones respecto a los ejes de referencia. Para modelar este compuesto se utiliza una modificación de la teoría de mezclas.

La teoría de mezclas clásica supone que todas las componentes del compuesto experimentan la misma deformación. Para el HRF y pequeñas deformaciones esta condición de compatibilidad se escribe como:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_h = (\varepsilon_{ij})_{F_k} \quad (1)$$

donde ε_{ij} y $(\varepsilon_{ij})_m$ son las deformaciones en el compuesto y cada una de las componentes.

El subíndice h identifica al hormigón mientras que F_k identifica a las fibras en la dirección k con $k = 1, \dots, n$ direcciones. La tensión se obtiene como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{kl}, \alpha_k)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{m=1}^{n+1} k_m \frac{\partial \Psi_m(\varepsilon_{kl}, (\alpha_i)_m)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{m=1}^{n+1} k_m (\sigma_{ij})_m \quad (2)$$

donde $\Psi(\varepsilon_{ij}, \alpha_i)$ y $\Psi_m(\varepsilon_{ij}, (\alpha_i)_m)$ son las densidades de energía libre por unidad de volumen del compuesto y de cada una de las m componentes respectivamente, $k_m = dV_m/dV$ es la correspondiente proporción volumétrica, $(\alpha_i)_m$ es un conjunto de variables internas que incluye las variables de endurecimiento isótropo y cinemático y $(\sigma_{ij})_m$ es la tensión en la componente m que se obtiene a partir de la ecuación constitutiva correspondiente.

Debe notarse que la Ec. (1) es una restricción muy fuerte que no se cumple en el caso del HRF ya que las fibras se deslizan respecto de la matriz. A los efectos de poder usar esta teoría para el HRF, se modifica el modelo constitutivo de las fibras incluyendo en el mismo el deslizamiento fibra-matriz sin necesidad de considerar explícitamente la interfaz fibra-matriz. Se supone que la deformación total de las fibras está compuesta por una deformación elástica ε_{ij}^e , una deformación plástica ε_{ij}^p y una deformación debida al deslizamiento ε_{ij}^s

$$(\varepsilon_{ij})_{F_k} = (\varepsilon_{ij}^e)_{F_k} + \underbrace{(\varepsilon_{ij}^p)_{F_k} + (\varepsilon_{ij}^s)_{F_k}}_{(\varepsilon_{ij}^{ps})_{F_k}} \quad k = 1, \dots, n \quad (3)$$

Estrictamente sólo los dos primeros términos a la derecha de la igualdad corresponden a deformaciones de las fibras mientras que el tercero se desarrolla en la interfaz fibra-matriz. Como resultado de ese término, la deformación de la fibra misma es distinta de la de la matriz.

2.1 Modelo utilizado para las componentes

Teniendo en cuenta que los resultados experimentales de hormigón bajo cargas cíclicas (Long y He, 2017) evidencian en algunos casos degradación de rigidez, se utiliza un modelo de daño escalar acoplado con plasticidad (Luccioni et al., 1996) para simular el comportamiento de la matriz. Este modelo resuelve simultáneamente el problema plástico con el de degradación de rigidez. Las condiciones de consistencia plástica y de daño se satisfacen simultáneamente en cada etapa de carga. De esta forma, utilizando variables de endurecimiento isótropo relacionadas con la disipación de energía en cada uno de los procesos, se logra una correcta disipación de energía del proceso global. La ley constitutiva secante se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = (1 - d) C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (4)$$

donde d es la variable de daño escalar que varía entre 0 y 1 y C_{ijkl}^0 es el tensor de rigidez elástica secante no degradado.

2.1.1 Proceso Plástico

El proceso plástico se describe a través de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica que permite tener en cuenta algunos aspectos del comportamiento de geomateriales.

El límite del comportamiento elástico se describe a través de una función de fluencia:

$$F^p(\sigma_{ij}; \eta_{ij}; \kappa^p) = f(\sigma_{ij} - \eta_{ij}) - K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) \leq 0 \quad (5)$$

donde $f(\sigma_{ij} - \eta_{ij})$ indica la tensión equivalente desplazada, η_{ij} es el desplazamiento de la superficie de fluencia debido al endurecimiento cinemático y representa la fuerza termodinámica asociada a la variable interna de endurecimiento cinemático, $K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p)$ es el umbral de fluencia y κ^p es la variable de endurecimiento plástico isotrópico. La regla de evolución para las deformaciones plásticas es:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{mn})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el factor de consistencia plástica y G es la función de potencial.

La variable de endurecimiento plástico isotrópico κ^p se obtiene normalizando la energía disipada en el proceso plástico a la unidad y varía entre 0 para el material virgen y 1 cuando se ha disipado plásticamente la totalidad de la energía que el material es capaz de disipar de esta forma:

$$\dot{\kappa}^p = \left[\frac{r(\sigma)}{g_f^{*p}} + \frac{(1 - r(\sigma))}{g_c^{*p}} \right] \sigma_{ij} \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{mn})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7)$$

$$g_f^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{op}}{f^p(\sigma_{ij})} g_f^p ; g_c^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^p(\sigma_{ij})} g_c^p \quad (8)$$

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i + |\sigma_i|] ; g_f^p = \frac{G_f}{l_c} , g_c^p = \frac{G_c}{l_c} \quad (9)$$

donde σ_i son las tensiones principales, R^{op} es la relación entre los umbrales de fluencia en compresión uniaxial y en tracción uniaxial, g_f^p y g_c^p son las máximas densidades de energía disipadas por el proceso plástico en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente, G_f y G_c son las energías de fractura y aplastamiento plástico respectivamente y l_c es un parámetro externo que depende del tamaño característico de la malla de elementos finitos y se introduce para obtener objetividad de la respuesta del sólido respecto del tamaño de la malla (Luccioni et al., 2016).

En este trabajo se propone la siguiente regla de evolución para el desplazamiento de la superficie de fluencia η_{ij} que consiste en una extensión del modelo de endurecimiento no lineal (Armstrong y Frederick, 1966) para tener en cuenta el comportamiento diferenciado en tracción y compresión, que presentan muchos materiales, por ejemplo, los materiales friccionales:

$$\dot{\eta}_{ij} = \dot{\eta}_{ij}^t + \dot{\eta}_{ij}^c \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_{ij} = r(\sigma) & \left(\frac{2}{3} C_k^t \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^t \sqrt{2/3} \|\dot{\varepsilon}_p\| \eta_{ij} \right) \\ & + [1 - r(\sigma)] \left(\frac{2}{3} C_k^c \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^c \sqrt{2/3} \|\dot{\varepsilon}_p\| \eta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

donde C_k^t , γ^t , C_k^c y γ^c son constantes del material en tracción y compresión respectivamente.

Se propone la siguiente regla de evolución para el umbral de fluencia equivalente:

$$K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) = r(\sigma) \sigma_t(\kappa^p) + [1 - r(\sigma)] \sigma_c(\kappa^p) \quad (12)$$

donde $\sigma_t(\kappa^p)$ y $\sigma_c(\kappa^p)$ representan la evolución de los umbrales de fluencia en ensayos de tracción y compresión uniaxial debido al endurecimiento isótropo respectivamente.

2.1.2 Proceso de daño

El umbral de daño se describe a través de una función de daño de la siguiente forma:

$$F^d = f^d(\sigma_{ij} - \eta_{ij}) - K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d) \leq 0 \quad (13)$$

donde $f^d(\sigma_{ij} - \eta_{ij})$ es la tensión equivalente desplazada la cual puede ser evaluada utilizando funciones conocidas de la teoría de la plasticidad o cualquier otra función especialmente desarrollada para daño, $K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d)$ es el umbral de daño equivalente y κ^d es la variable de endurecimiento isótropo de daño.

El desplazamiento del centro de la superficie de fluencia η_{ij} está asociado al proceso plástico y no al de daño. Sin embargo, como simplificación, se considera el mismo desplazamiento para la superficie de daño.

La variable de endurecimiento isótropo de daño varía entre 0, para el material virgen, a 1, para el material completamente dañado. Se obtiene normalizando la energía disipada por daño a la unidad:

$$\dot{\kappa}^d = \left[\frac{r(\sigma)}{g_f^{*d}} + \frac{(1 - r(\sigma))}{g_c^{*d}} \right] \Psi^0 \dot{d} \quad (14)$$

$$g_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{f^d} g_f^d; \quad g_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^d} g_c^d \quad (15)$$

Ψ^0 es la densidad de energía libre de Helmholtz del material no dañado, R^{od} es la relación entre los umbrales de daño en compresión y tracción uniaxial, g_f^d y g_c^d son las máximas densidades de energía disipadas por daño en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente.

Se propone la siguiente ecuación para el umbral de daño equivalente:

$$K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d) = r(\sigma) \sigma_t^d(\kappa^d) + (1 - r(\sigma)) \sigma_c^d(\kappa^d) \quad (16)$$

donde $\sigma_t^d(\kappa^d)$ y $\sigma_c^d(\kappa^d)$ representan la evolución de los umbrales de daño debido al endurecimiento isótropo en ensayos de compresión y tracción uniaxial respectivamente.

2.2 Plasticidad y daño acoplados

La evolución de las deformaciones plásticas y del daño se obtiene de la solución simultánea de las siguientes ecuaciones denominadas condiciones de consistencia del problema:

$$\begin{cases} \dot{F}^p = \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F^p}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} + \frac{\partial F^p}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p = 0 \\ \dot{F}^d = \frac{\partial F^d}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F^d}{\partial \eta_{ij}} \dot{\eta}_{ij} + \frac{\partial F^d}{\partial \kappa^d} \dot{\kappa}^d = 0 \end{cases} \quad (17)$$

donde:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1 - d) C_{ijkl}^0 (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) - \dot{d} C_{ijkl}^0 (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (18)$$

Incorporando las ecuaciones Ec. (6), Ec. (7), Ec. (11), Ec. (14) y Ec. (18) en las Ecs. (17), se obtienen dos ecuaciones lineales en $\dot{\lambda}$ y \dot{d} que pueden ser fácilmente resueltas.

2.3 Caso particular de las Fibras

Se considera que el fenómeno inelástico de deslizamiento puede incluir deformaciones irreversibles y degradación de rigidez. La deformación plástica de las fibras mismas, en conjunto con el deslizamiento fibra-matriz, se modelan a través de un modelo elastoplástico acoplado con daño para materiales ortótropos que se obtiene a partir del mismo modelo descripto para la matriz, pero incluyendo la ortotropía, suponiendo que existen dos espacios, el espacio ortótropo real y un espacio isótropo ficticio (Argañaraz et al., 2017).

El problema se resuelve en el espacio isótropo ficticio y luego los resultados son mapeados al espacio ortótropo real. Los umbrales de daño y plasticidad en el espacio ortótropo real se definen a través de las funciones F^{ps} y F^{ds} que pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned} F^{ps}(\sigma_{ij} - \eta_{ij}, \kappa^{ps}) &= \bar{F}^{ps}(\tau_{ij} - \bar{\eta}_{ij}, \bar{\kappa}^{ps}) = \bar{f}^{ps}(\tau_{ij} - \bar{\eta}_{ij}) - \bar{K}^{ps}(\bar{\kappa}^{ps}) = 0 \\ F^{ds}(\sigma_{ij} - \eta_{ij}, \kappa^{ds}) &= \bar{F}^{ds}(\tau_{ij} - \bar{\eta}_{ij}, \bar{\kappa}^{ds}) = \bar{f}^{ds}(\tau_{ij} - \bar{\eta}_{ij}) - \bar{K}^{ds}(\bar{\kappa}^{ds}) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$\tau_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}$ es la tensión en el espacio isótropo ficticio; A_{klij} es un tensor de transformación que contiene información sobre la anisotropía del material; \bar{F}^{ps} es la función que define el umbral de deformaciones permanentes en el espacio isótropo ficticio; \bar{f}^{ps} es la tensión equivalente desplazada, definida en este trabajo mediante la función de Von Mises para materiales isótropos; $\bar{\eta}_{ij} = A_{ijkl} \eta_{kl}$ representa el desplazamiento de las superficies de fluencia y daño debido al endurecimiento cinemático en el espacio isótropo ficticio y $\bar{K}^{ps}(\bar{\kappa}^{ps})$ representa la evolución de la tensión de arrancamiento en función de una variable de endurecimiento inelástico isótropo $\bar{\kappa}^{ps}$, que se obtiene a partir de curvas de arrancamiento de fibras. De manera análoga, \bar{F}^{ds} es la función que define el umbral de daño en el espacio isótropo ficticio; \bar{f}^{ds} es la tensión equivalente desplazada definida en este trabajo mediante la función de Von Mises para materiales isótropos y $\bar{K}^{ds}(\bar{\kappa}^{ds})$ representa la tensión de arrancamiento en función de una variable de endurecimiento de daño isótropo $\bar{\kappa}^{ds}$, que se obtiene a partir de curvas de arrancamiento de fibras. Para definir las curvas de arrancamiento se utiliza el modelo de arrancamiento propuesto por (Isla, 2014). La evolución de las deformaciones inelásticas permanentes en las fibras y en la interfaz fibra/matriz se obtiene mediante la regla de flujo plástico utilizando también el concepto de mapeo de espacios.

3 CALIBRACION

En la Figura 1 se muestran las curvas tensión-deformación y tensión-deformación plástica bajo tracción uniaxial cíclica (tensión media $\sigma_m = 14.50 \text{ MPa}$ y amplitud $\sigma_a = 125.50 \text{ MPa}$) en la dirección x de un elemento de acero (umbral de plasticidad $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$, módulo

elástico $E = 200000 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$, modulo plástico inicial $C_k = 150000 \text{ MPa}$ y $\gamma = 3000$). En este caso particular, si se utiliza la función de fluencia de Von Mises y flujo asociado, el criterio de fluencia queda definido como $|\sigma_x - (\frac{3}{2})\eta_x| = \sigma_0$. Integrando la Ec. (11) a partir de las condiciones iniciales η_{x0} y ε_{x0}^p , la tensión resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + \left[\frac{C_k}{\gamma} + \frac{3}{2} \left(\eta_{x0} - \frac{2 C_k}{3 \gamma} \right) e^{-\gamma(\varepsilon_x^p - \varepsilon_{x0}^p)} \right] \text{ para } d\varepsilon_x^p \geq 0 \\ \sigma_x &= -\sigma_0 + \left[\frac{C_k}{\gamma} - \frac{3}{2} \left(\eta_{x0} + \frac{2 C_k}{3 \gamma} \right) e^{\gamma(\varepsilon_x^p - \varepsilon_{x0}^p)} \right] \text{ para } d\varepsilon_x^p < 0 \end{aligned} \quad (20)$$

de donde se obtiene:

$$\Delta\varepsilon_x^p = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{(\sigma_m - \sigma_a + \sigma_0)^2 - (C_k/\gamma)^2}{(\sigma_m + \sigma_a - \sigma_0)^2 - (C_k/\gamma)^2} \right] \quad (21)$$

$\Delta\varepsilon_x^p$ indica el incremento de deformación plástica para un ciclo de carga que se mide entre dos picos de dos lazos de histéresis consecutivos como se indica en la Figura 1 b).

Bajo carga monótona creciente $d\varepsilon_x^p \geq 0$, tomando $\eta_{x0} = 0$ y $\varepsilon_{x0}^p = 0$ y derivando la Ec. (20), se observa que la constante C_k representa el módulo plástico inicial (ver Figura 1 b)). También se observa que cuando la deformación plástica tiende a infinito la tensión tiende al valor $(\sigma_0 + \frac{C_k}{\gamma})$ como se indica en la Figura 1 a).

De esta forma, resulta sencillo obtener los parámetros C_k y γ a partir de ensayos uniaxiales cíclicos en el caso de materiales con endurecimiento cinemático y sin endurecimiento isótropo.

Si el material presenta endurecimiento cinemático e isótropo los umbrales K^{pt} , K^{pc} , K^{dt} y K^{dc} no representan la evolución de la tensión sino $\sigma_t - \eta_t$ y $\sigma_c - \eta_c$ respectivamente donde η_t y η_c indican los desplazamientos de los umbrales plásticos debido al endurecimiento cinemático bajo carga monótona creciente en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente. Ello implica que se deben disponer de ensayos cíclicos donde se pueda identificar el endurecimiento cinemático. Estos ensayos permiten, a su vez, discriminar la disipación por deformación plástica de aquella debida a la degradación de rigidez para poder obtener las curvas $\sigma_t^p(\kappa^p)$, $\sigma_c^p(\kappa^p)$, $\sigma_t^d(\kappa^d)$ y $\sigma_c^d(\kappa^d)$.

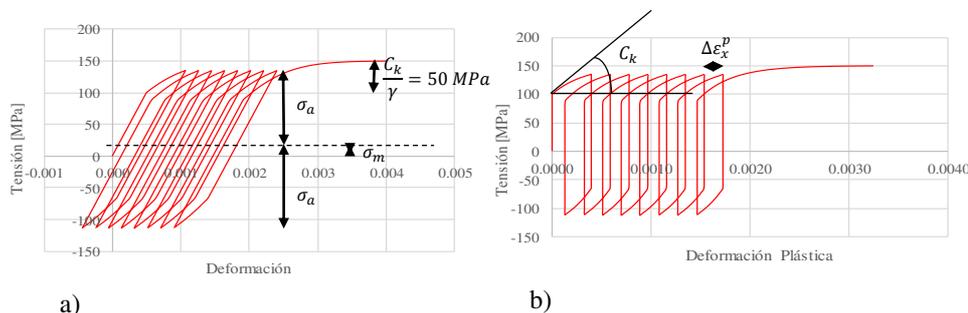


Figura 1: Elemento de acero sometido a ciclos de carga y descarga uniaxial.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

4.1 Tracción en fibras de acero

Como ejemplo de aplicación del modelo se simuló un elemento de acero sometido a ciclos

de carga y descarga uniaxial. Se consideró el módulo de elasticidad $E = 210000 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$, el umbral de daño es 150 MPa , módulo plástico inicial $C_k = 100000 \text{ MPa}$ y $\gamma = 2000$. Para definir la curva de endurecimiento isótropo se utilizó la curva de arrancamiento de las fibras FF1 (fibras de acero con gancho de 50 mm de longitud y 1 mm de diámetro). Estos umbrales deben disminuirse aproximadamente en un valor de C_k/γ debido a que incorporar el endurecimiento cinemático al modelo implica un aumento de endurecimiento en la repuesta del material. En la [Figura 2](#) se observa la respuesta del elemento descrito anteriormente y se compara las respuestas obtenidas sin y con endurecimiento cinemático. Se evidencia la no-linealidad en el endurecimiento en la respuesta inelástica en la carga y en la descarga, dando lugar a ciclos de carga y descarga que se parecen más a los observados experimentalmente cuando se incluye endurecimiento cinemático.

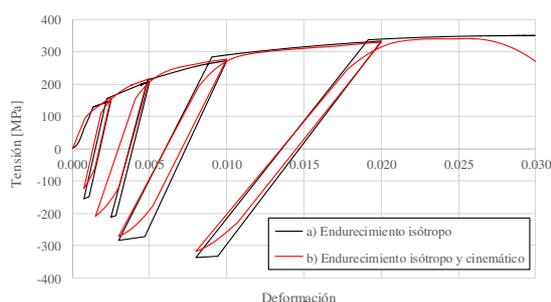


Figura 2: Repuesta cíclica uniaxial de un elemento de fibras de acero FF1.

4.2 Tracción y compresión uniaxial cíclica

A modo de ejemplo, se presenta la respuesta del modelo propuesto con endurecimiento cinemático para HRF en tracción y compresión uniaxial cíclica. Los parámetros del hormigón son los utilizados en ([Argañaraz et al., 2017](#)) y los de las fibras se presentan en la [Tabla 1](#).

Fibras	Módulo de Elasticidad E [GPa]	210
	Coeficiente de Poisson ν	0.2
	Tensión de rotura [MPa]	351
	Energía de fractura y de aplastamiento [MPa.mm]	1
	Relación entre límites elásticos en compresión y en tracción	1
	Energía de fractura y aplast. del modelo de daño [MPa.mm]	100
	Umbral de inicio del daño en compresión [MPa]	200
	Módulo plástico inicial C_k en tracción y compresión [MPa]	200000
	Parámetro del modelo de endurecimiento cinemático γ	2500

Tabla 1: Propiedades mecánicas del hormigón y de las fibras.

En la [Figura 3](#) se muestran las curvas tensión-desplazamiento de la matriz, de las fibras (multiplicada por 0.01) y del compuesto obtenidas para un HRF con 50 kg/m^3 de fibras de acero con gancho de 50 mm de longitud y 1 mm de diámetro sometido a tracción uniaxial con ciclos de carga y descarga. Se evidencia en la [Figura 3](#) el aumento de la resistencia a tracción del HRF después del primer pico de tensión debido a la colaboración de las fibras; se evidencian también las deformaciones permanentes y degradación de rigidez de cada una de las componentes del HRF. Debido a la incorporación del endurecimiento cinemático en el modelo constitutivo de las fibras, al invertir el sentido de la carga, las mismas comienzan a deslizar a una tensión menor y luego se acumula deformación inelástica en un ciclo completo. Esto da lugar a lazos de

histéresis en el HRF y en las fibras que tienen la misma apariencia que los observados experimentalmente.

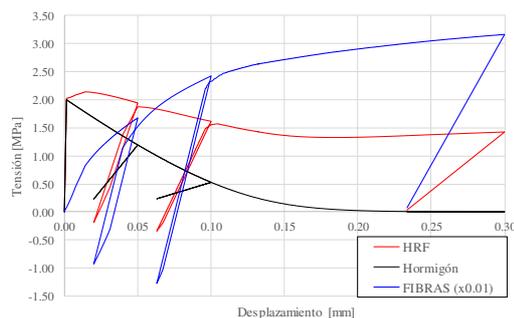


Figura 3: Respuesta cíclica uniaxial de un elemento de acero, con curva de end. isótropo de fibras FF1.

La Figura 4 muestra la respuesta obtenida para el mismo HRF cuando se lo somete a compresión uniaxial cíclica. Se evidencian deformaciones permanentes y degradación de rigidez en la respuesta de la matriz de hormigón, de las fibras (multiplicada por 0.1) y en compuesto. Si bien el modelo de la matriz no incluye endurecimiento cinemático, la respuesta del compuesto sí evidencia lazos de histéresis similares a los mostrados en los resultados experimentales presentados por Chi et al., (2017). Se puede ver que esos lazos resultan de la combinación del comportamiento de ambas componentes. Al descargar, debido a la diferencia de deformaciones plásticas, la matriz queda comprimida y las fibras traccionadas, llegando a deslizar y esto es lo que da lugar a la formación de los lazos de histéresis en el compuesto. Debido a la forma de la curva de endurecimiento de las fibras (curva de *pull-out*) esos lazos resultan menores cuanto más se degrada la adherencia de las fibras.

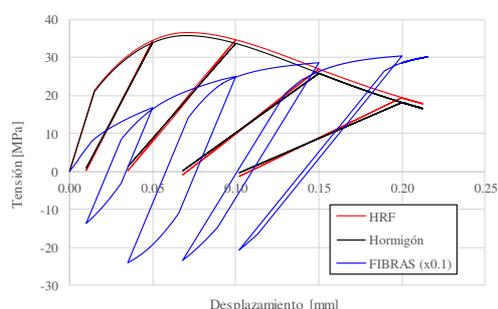


Figura 4: Compresión uniaxial cíclica (plasticidad acoplada con daño) con endurecimiento cinemático

5 CONCLUSIONES

Los modelos con endurecimiento cinemático de la bibliografía son en su mayoría fenomenológicos y no consideran el endurecimiento isótropo. En general los modelos para cargas cíclicas en HRF son además uniaxiales y no logran reproducir los lazos de histéresis, que se observan experimentalmente, sin cambiar el sentido de la tensión.

La combinación de modelos de plasticidad y daño con endurecimiento isótropo y cinemático en materiales compuestos permite reproducir mejor la evolución de la resistencia y las deformaciones plásticas que presentan estos materiales bajo cargas cíclicas.

En este trabajo se ha presentado un modelo constitutivo de plasticidad acoplado con daño con endurecimiento cinemático el cual logra poner en evidencia la acumulación de deformación plástica ciclo a ciclo dando lugar a lazos de histéresis en HRF y así poder reproducir el comportamiento cíclico del HRF. Se individualizó el aporte de la matriz y de las fibras en la respuesta del compuesto.

En compresión uniaxial cíclica se obtienen lazos de histéresis similares a los obtenidos experimentalmente; en el caso de tracción uniaxial también se observan lazos de histéresis

donde se evidencia el efecto *ratchetting*, debido al aporte de las fibras. Pero no se cuenta con resultados experimentales que permitan calibrar correctamente el modelo.

Una de las limitaciones del modelo, como la de todos de los modelos con endurecimiento cinemático fenomenológicos, es la necesidad de disponer de resultados experimentales cíclicos para determinación de los parámetros correspondientes. En el caso particular del HRF, a los efectos de realizar una modelación más precisa, hacen falta resultados experimentales más completos sobre el comportamiento de las componentes (matriz y fibras) bajo carga cíclica. Particularmente, el modelo presentado no logra reproducir la forma de los ciclos de carga descarga observados en ensayos de hormigón que requerirían considerar al hormigón en sí como un compuesto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al CONICET (PIP 2015 0132), a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT 2013 1740), al CIUNT (PIUNT 2013 26E/520) y a la UNT por el apoyo económico brindado.

REFERENCIAS

- Abdel-Karim, M., An extension for the Ohno-Wang kinematic hardening rules to incorporate isotropic hardening. *Int. Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87:170-176, 2010.
- Argañaraz, P. L., Luccioni, B. L., Isla, F., Benito, A., Torrijos, M. C., Giacco, G. and Zerbino, R., Modelación del comportamiento cíclico de hormigón reforzado con fibras. *Mecánica Computacional*, XXXV:1843-1858, 2017.
- Armstrong, P. J. and Frederick, C. O., A mathematical representation of the mutiaxial Bauschinger effect. Cegb Report No. Rs/B/N 731.1966.
- Chaboche, J., Time independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2:149-188, 1986.
- Chaboche, J., Dang-Van, K. and Cordier, G., 1979. Modelization of strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel. Berlin, SMIRT-5, Div. L.
- Chaboche, J. L., On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratcheting effects. *International Journal of Plasticity*, 7:661-678, 1991.
- Chi, Y., Yu, M., Huang, L. and Xu, L., Finite element modeling of steel-polypropylene hybrid fiber reinforced concrete using modified concrete damage plasticity. *Engineering Structures*, 148:23-35, 2017.
- Isla, F., Modelo para hormigón reforzado con fibras de acero. PhD Tesis UNT.2014.
- Long, Y. and He, Y. An anisotropic damage model for concrete structures under cyclic loading-uniaxial modelling. *Journal of Physics.: Conf. Ser.* 842 012040:1-14, 2017
- Luccioni, B., Oller, S. and Danesi, R., Coupled Plastic-Damaged Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:81-89, 1996.
- Luccioni, B., Isla, F., Argañaraz, P., Forni, D. and Cadoni, E., Modelado de Hormigones de Ultra Altas Prestaciones Refrozados con Fibras bajo Altas Velocidades de Deformación. *Mecánica Computacional*, XXXIV:199-223, 2016.
- Ohno, N. and Wang, J., Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I: Formulation and basic features for ratchetting behavior. *International Journal of Plasticity*, 9:375-390, 1993.
- Prager, W., A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 16:493-496, 1956.
- Rezaiee-Pajand, M. and Sinaie, S., On the calibration of the Chaboche hardening model and a modified hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 46:3009–3017, 2009.