

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO A BAJO NÚMERO DE REYNOLDS EN UN MICRORESONADOR DEL TIPO PLACA. PARTE 1: OPENFOAM Y GBEM

NUMERICAL SIMULATION OF THE LOW REYNOLDS NUMBER FLOW AROUND A PLATE-TYPE MICRO-RESONATOR. PART 1: OPENFOAM AND GBEM

Sofía S. Sarraf^a, Ezequiel J. López^a, Gustavo A. Ríos Rodríguez^b, Laura Battaglia^{b,c} y Jorge D'Elía^b

^a*Instituto de Investigación en Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue-CONICET, Buenos Aires 1400, 8300 Neuquén, Argentina, sofia.sarraf@fain.uncoma.edu.ar, ezequiel.lopez@fain.uncoma.edu.ar*

^b*Centro de Investigación en Métodos Computacionales, Universidad Nacional del Litoral-CONICET, Predio CONICET "Dr. Alberto Cassano", colec. RN 168 s/n – Par. El Pozo, 3000 Santa Fe, Argentina, gusadrr@santafe-conicet.gov.ar, lbattaglia@santafe-conicet.gob.ar, jdelia@cimec.unl.edu.ar*

^c*Grupo de Investigación en Métodos Numéricos en Ingeniería (GIMNI), Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Santa Fe (FRSF) Lavaysse 610, Santa Fe (3000), Argentina*

Palabras clave: flujo de Stokes, MEMS, factor de calidad, GBEM, OpenFOAM(R).

Resumen. Se presenta una modelización numérica del flujo tridimensional de un fluido viscoso newtoniano en régimen oscilatorio alrededor de un microresonador de tipo placa utilizado en sistemas microelectromecánicos (MEMS). El microresonador consiste en una placa de polisilicio con una alta relación de aspecto, de muy bajo espesor, perforada con 75 agujeros equiespaciados. La placa está empotrada en ambos extremos y vibrando en su primer modo natural a una frecuencia de 176 KHz por encima de un sustrato fijo. Se calcula el factor de calidad del dispositivo, expresado como el cociente entre la energía total del sistema y aquella que disipa al fluido en un ciclo de oscilación, mediante FVM (*Finite Volume Method*) utilizando la suite OpenFOAM(R) y con Galerkin BEM (*Galerkin Boundary Element Method*).

Keywords: Stokes flow, MEMS, quality factor, GBEM, OpenFOAM(R).

Abstract. We present a numerical modeling of the three-dimensional flow of a Newtonian viscous fluid in oscillatory regime around a plate-type micro-resonator used in microelectromechanical systems (MEMS). The micro-resonator consists of a polysilicon plate with a high aspect ratio, having a very low thickness, and perforated with 75 equally spaced holes. The plate is clamped at its two ends and vibrates above a fixed substrate at its first natural mode with a frequency of 176 KHz. The quality factor of the device is calculated, which is expressed as the ratio between the total energy of the system and the energy dissipated to the fluid in an oscillation cycle. The dissipated energy is computed as the work done by the viscous traction on the body surface in an oscillation cycle, and performed with FVM (*Finite Volume Method*), using the suite OpenFOAM(R), and with GBEM (*Galerkin Boundary Element Method*).

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema micro-electromecánico (o MEMS, por *micro-electro-mechanical system*) consiste de una micro-estructura fija o móvil, denominada micro-resonador, ubicada dentro de un actuador o sensor de muy pequeñas dimensiones. Los MEMS son ampliamente utilizados en sensores biológicos o químicos, en donde la resolución del sensor resulta influenciada por la disipación de energía ocasionada por el amortiguamiento viscoso (?). Los dispositivos MEMS más usuales consisten en arreglos de vigas o de placas, cuyos espesores y anchos son $O(1)$ a $O(10) \mu\text{m}$ mientras que sus longitudes son $O(10)$ a $O(1000) \mu\text{m}$. Las fuerzas de arrastre viscosas inducidas por la vibración del micro-resonador producen un amortiguamiento que afecta su dinámica. En ciertos casos los micro-resonadores oscilan rígidamente y en otros lo hacen en sus formas deformadas.

Por otra parte, el modelado de estos dispositivos puede encararse con diversos métodos numéricos. En particular, el método de elementos de borde (BEM, por *Boundary Element Method*) es una opción en el análisis de amortiguación. Como es conocido, el BEM se basa en la formulación de un problema de valores de borde de tipo elíptico, como una ecuación integral de contorno, o ecuación integral de borde (BIE, por *Boundary Integral Equation*), e.g. ver ?. En trabajos previos (??) se empezó a considerar la aplicación de BEM en este tipo de problemas, modelados mediante una BIE en velocidades con operador integral completado (o CIV, por *Completed Indirect Velocity*). La CIV-BIE es de tipo indirecta y de segunda clase, y utiliza simultáneamente densidades superficiales de doble y simple capa, mientras que su término fuente está determinado a partir de la velocidad del flujo no-perturbado. Esta ecuación puede ser resuelta numéricamente en diversas variantes, en particular dos: mediante una técnica de colocación al centroide de los elementos, y con una ponderación de Galerkin (GBEM, por Galerkin BEM), ambas descriptas con mayor detalle en ???.

En este trabajo el interés estará centrado en el cálculo del factor de calidad del dispositivo, expresado como el cociente entre la energía total del sistema y aquella que disipa al fluido en un ciclo de oscilación. A tal fin, se calculan las tracciones sobre el cuerpo y luego el trabajo realizado por las mismas. Las simulaciones numéricas con BEM serán realizadas exclusivamente en la variante de Galerkin BEM (por *Galerkin Boundary Element Method*) pero antes, como un cálculo completamente independiente de verificación, con FVM (por *Finite Volume Method*) empleando la suite **OpenFOAM**[®]. La cinemática de la placa se asumirá conocida en todos los casos, i.e. los esquemas numéricos no serán de interacción fluido-estructura (FSI).

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El caso consiste en una placa de polisilicio con un espesor $h = 2 \mu\text{m}$, un ancho $b = 100 \mu\text{m}$ y un largo $L = 300 \mu\text{m}$, que vibra sobre un sustrato distante a $4 \mu\text{m}$ de la misma, como se esquematiza en la Fig. 1. El sustrato posee el mismo ancho y largo de la placa, siendo su espesor de $10 \mu\text{m}$. El sistema placa-sustrato se encuentra inmerso en aire que se extiende hasta el infinito en todas direcciones. La placa está empotrada por ambos extremos y posee 75 agujeros de $4 \mu\text{m}$ de radio homogéneamente distribuidos, cuyo objetivo es disminuir la energía disipada por ciclo. La placa vibra en su primer modo natural a una frecuencia $f = 1.76 \times 10^5 \text{ Hz}$ y con una amplitud $A = 0.5 \mu\text{m}$, con movimiento sólo en la dirección z (véase Fig. 1). Este primer modo se obtiene de la teoría clásica de vigas despreciando la influencia de los agujeros (?) y, para la ubicación

del sistema de coordenadas adoptada, está dado por la expresión

$$Z_0(x) = \alpha \left| \sin \left[\lambda \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] - \sinh \left[\lambda \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \xi \left\{ \cos \left[\lambda \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] - \cosh \left[\lambda \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \right\} \right| \quad (1)$$

donde $\lambda L = 4.73004$, y

$$\xi = \frac{\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L)}{\sin(\lambda L) + \sinh(\lambda L)} \\ \alpha = \left\{ \sin \left(\frac{\lambda L}{2} \right) - \sinh \left(\frac{\lambda L}{2} \right) + \xi \left[\cos \left(\frac{\lambda L}{2} \right) - \cosh \left(\frac{\lambda L}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad (2)$$

El movimiento de la placa en la dirección z se expresa entonces como

$$Z(x, t) = AZ_0(x) \sin(\omega t) \quad (3)$$

con $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular. El aire se asume incompresible e isotérmico con una viscosidad dinámica $\mu = 1.581 \times 10^{-5}$ Pa·s.

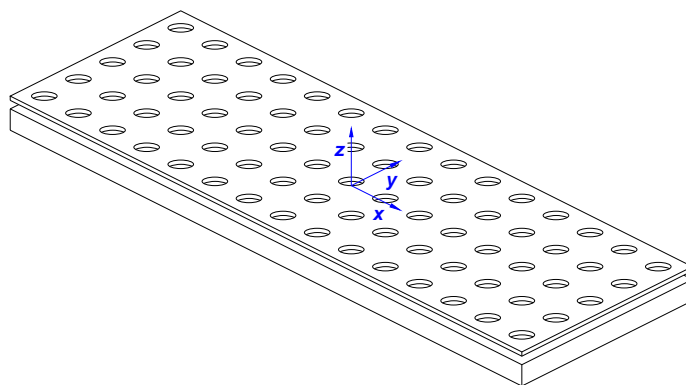


Figura 1: Esquema de la placa agujereada y sustrato.

2.1. Factor de calidad

El factor de calidad Q en un resonador se define como

$$Q = 2\pi \frac{E_{total}}{\Delta E} \quad (4)$$

donde E_{total} es la energía total ingresada al sistema y ΔE la energía disipada por ciclo de oscilación debida al trabajo de los esfuerzos viscosos sobre la placa. La E_{total} corresponde al contenido de energía inicialmente entregado a la placa, el cual se puede calcular como

$$E_{total} = K_{p,máx} = \int_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \mathbf{u}_{p,máx} \cdot \mathbf{u}_{p,máx} dV \quad (5)$$

donde $K_{p,máx}$ es la energía cinética máxima de la placa (cuando $t = 0$), $\mathbf{u}_{p,máx}$ la velocidad máxima de la placa, ρ_p es la densidad del material de la placa y V_p su volumen. Dado que el movimiento de la placa se asume sólo en la dirección z , su velocidad está dada por

$$\mathbf{u}_p(x, t) = (0, 0, \dot{Z}(x, t)) = (0, 0, A\omega Z_0(x) \cos(\omega t)) \quad (6)$$

Por lo tanto, $\mathbf{u}_{p,m\acute{a}x} = (0, 0, A\omega Z_0(x))$. Reemplazando esta expresi3n en la Ec. (5) se obtiene

$$E_{total} = \frac{1}{2} \rho_p A^2 \omega^2 \int_{V_p} [Z_0(x)]^2 dV \quad (7)$$

La energa disipada por ciclo se calcula como el negativo del trabajo realizado por la fuerza viscosa sobre la superficie de la placa a lo largo de un ciclo, $-W_{v,ciclo}$,

$$\Delta E = -W_{v,ciclo} = - \int_{ciclo} \delta W_v \quad (8)$$

El diferencial de trabajo de la fuerza viscosa sobre la placa puede calcularse como $\delta W_v = \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}_p dt dS$, donde dS es el diferencial de superficie de la placa sobre el cual actúa la fuerza viscosa \mathbf{f}_v . Entonces

$$\Delta E = - \int_0^T \int_{S_p} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u}_p dS dt = -A\omega \int_0^T \left[\int_{S_p} f_v^z Z_0(x) dS \right] \cos(\omega t) dt \quad (9)$$

donde S_p es la superficie de la placa, T el perodo de oscilaci3n y f_v^z la componente de la fuerza viscosa en la direcci3n z . La integral de la Ec. (7) se resolvi3 numéricamente, obteniéndose un valor $E_{total} = 7.4124$ pJ para los datos del problema y con $\rho_p = 2330$ kg/m³. La expresi3n (9) se determina numéricamente empleando los valores de la fuerza viscosa calculados con los m3todos de resoluci3n aplicados.

3. RESOLUCI3N MEDIANTE FVM

Uno de los m3todos empleados para resolver el problema presentado en la Sec. §2 es el M3todo de Volúmenes Finitos (FVM). En particular, se emplea la suite **OpenFOAM**[®] con este objetivo. El problema posee dos planos de simetría que se intersectan en el punto medio de la placa y poseen normales segun las direcciones x e y , respectivamente. Esta simetría se aprovecha a fin de disminuir el costo computacional del problema reduciendo el dominio de análisis a 1/4 del original. Adem3s, dado que el dominio de flujo original posee una extensi3n infinita, el mismo debe acotarse con fronteras computacionales que no influyan de forma apreciable a la soluci3n numérica del problema. En la Fig. 2 se presenta un esquema del dominio computacional empleado con las respectivas dimensiones. La malla fue generada con la utilidad `snappyHexMesh` provista con la distribuci3n oficial de **OpenFOAM**[®], y posee un total de 2.75 Mceldas. El tamaño de las celdas en las zonas relativamente alejadas de la placa es de 4 μm , mientras que en cercanías de la placa es de 0.2 μm , alcanzado valores del orden de 0.1 μm en el interior de los agujeros. En la Fig. 3 se muestran vistas de la malla para el dominio completo y detalle de la misma en la zona de la placa y el sustrato. La Fig. 4 presenta un detalle de la malla sobre la superficie de la placa.

Debido a que el movimiento de la placa provoca la modificaci3n del dominio de flujo, la posici3n de los v3rtices de las celdas debe actualizarse en el tiempo. Esta tarea se realiza utilizando la cl3sica t3cnica laplaciana para el desplazamiento de los v3rtices con un coeficiente de difusividad inversamente proporcional con la distancia a la placa. Como condici3n de contorno para la resoluci3n de este problema se fijaron los desplazamientos sobre las superficies s3lidas: desplazamiento s3lo en la direcci3n z para la placa (Ec. (3)) y nulo para el sustrato. En el resto de las fronteras se permite el deslizamiento tangencial de los puntos.

Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible, laminar e isot3rmico empleando un esquema *upwind* de segundo orden acotado en el espacio para los t3rminos

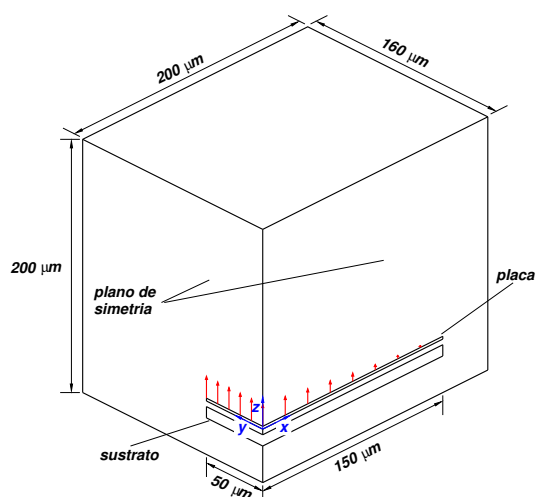


Figura 2: Esquema del dominio computacional considerado con OpenFOAM[®]. Los vectores en rojo sobre la placa representan la velocidad de la placa en el instante inicial.

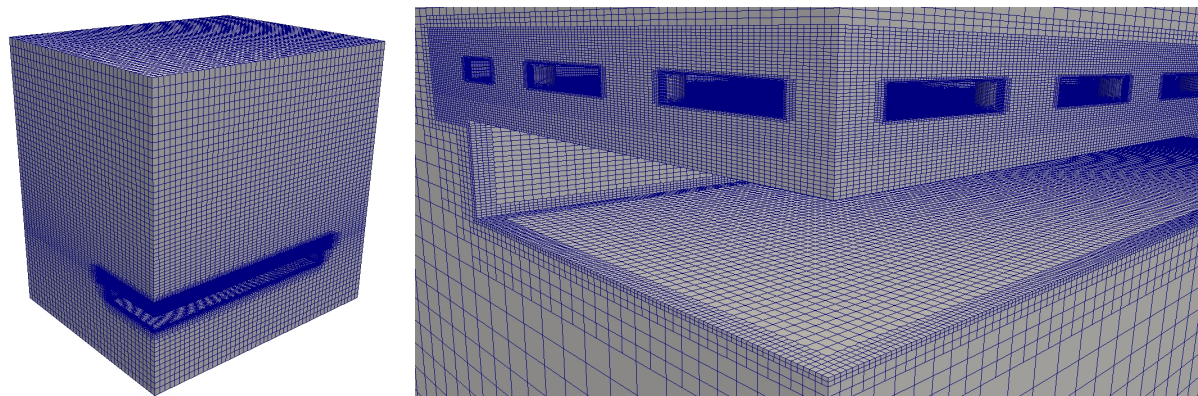


Figura 3: Vistas de la malla utilizada. Izq.: dominio completo. Der.: detalle de la zona placa-sustrato.

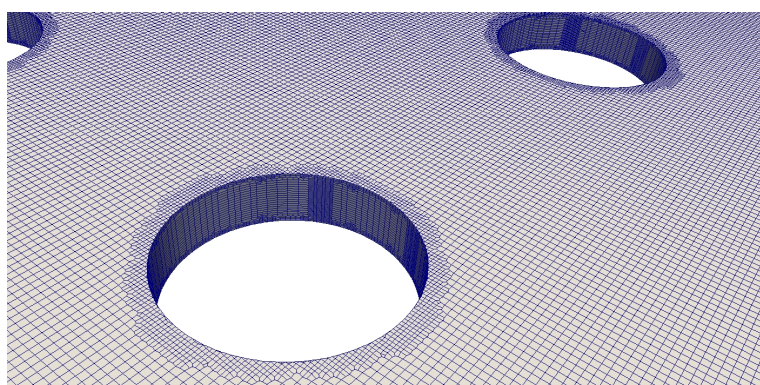


Figura 4: Detalle de la malla sobre la superficie de la placa.

convectivos, interpolación lineal con corrección por no ortogonalidad para los términos difusivos, y el esquema de Euler hacia atrás en el tiempo. Como condiciones de contorno se imponen sobre paredes sólidas no deslizamiento para la velocidad y gradiente normal nulo para la presión, simetría en sendos planos de simetría, y presión total fija en el resto de las fronteras. La velocidad impuesta para las caras de las celdas ubicadas sobre la placa corresponde a la

derivada temporal del desplazamiento de la misma, *i.e.* la expresión dada por la Ec. (6). Inicialmente el fluido se encuentra en reposo y la placa en su posición no deformada, adquiriendo el movimiento correspondiente súbitamente en $t = 0$ s. La presión se inicializa con un valor nulo en todo el dominio. El paso de tiempo se mantiene constante durante la simulación con un valor $\Delta t = T/200 = 0.028409$ ms, simulándose un total de 5 ciclos. Cabe mencionar que rápidamente, a partir del segundo ciclo, se alcanza una solución aproximadamente periódica.

La Fig. 5 muestra los campos de módulo de la velocidad y de presión para distintos instantes correspondientes a un ciclo de simulación. Se observa que la velocidad del flujo alcanza los mayores valores en la zona central de los agujeros ubicados en cercanías del centro de la placa. Estos valores de velocidad son un orden de magnitud mayores que la velocidad máxima de la placa, la cual es de $\|\mathbf{u}_{p,m\acute{a}x}\| = 0.55292$ m/s, y se verifican para los instantes en que la placa no se halla deformada. La presión en el espacio entre la placa y el sustrato también alcanza sus valores extremos para los mismos instantes, siendo negativos cuando la placa posee un movimiento ascendente y positivos cuando desciende. La energía disipada por ciclo se obtuvo postprocesando la solución obtenida, calculándose un valor $\Delta E = 0.2431203$ pJ en el último ciclo simulado, resultando un factor de calidad de $Q \approx 191.57$.

4. RESOLUCIÓN MEDIANTE GALERKIN BEM

Otra alternativa para resolver el problema presentado en la Sec. §2 es mediante el recurso de una BIE (?). En el presente caso, *i.e.* flujo exterior a un cuerpo cerrado e inmerso en una corriente que se extiende en un dominio no acotado, resulta aplicable la BIE de Power-Miranda/Hebeker (PM-H, ?). Una solución aproximada de la BIE de PM-H puede obtenerse mediante BEM. En este método, la geometría del dominio se la aproxima mediante una malla finita de elementos colocados únicamente en las superficies del cuerpo (e.g. con triángulos). Dos variantes clásicas dentro BEM son: (i) una técnica de colocación en los centroides de los elementos, y (ii) una ponderación de Galerkin en los nodos de los elementos (??). En el presente trabajo sólo se empleó BEM mediante ponderación de Galerkin (Galerkin BEM, o GBEM, ?), mientras que el BEM con colocación no será utilizado debido a un costo computacional relativamente elevado en recursos de hardware, como quedará en evidencia en los ejemplos numéricos con BEM.

4.1. Condición de borde en BEM

En un BEM con geometría fija, la condición de borde es la velocidad impuesta en los nodos y que surge de la derivada en el tiempo del desplazamiento del modo impuesto. En el caso del primer modo de vibración de la placa perforada, la velocidad impuesta es la derivada en el tiempo del desplazamiento modal mostrado en la Fig. 6.

4.2. Cálculo en precisión mixta 80-64 bits

Las simulaciones numéricas con Galerkin BEM se realizaron con el código GBEM (desarrollado en el CIMEC), basado en la cuadratura de Taylor cuádruple (??) complementado con la Transformación Asinh (TA) (???). Sin embargo, antes, se tuvieron que introducir diversas modificaciones para ahorrar recursos, mejorar la precisión numérica y la velocidad de cálculo, y así poder manipular problemas relativamente más grandes. Entre otras modificaciones, ahora es posible usar opcionalmente un esquema de precisión mixta, e.g. uno de 80-64 bits, en donde el cálculo de cada matriz elemental se realiza en 80 bits (*i.e.* en precisión extendida), mientras que el ensamblaje en el Sistema global de Ecuaciones Lineales (SEL) y la solución del mismo,

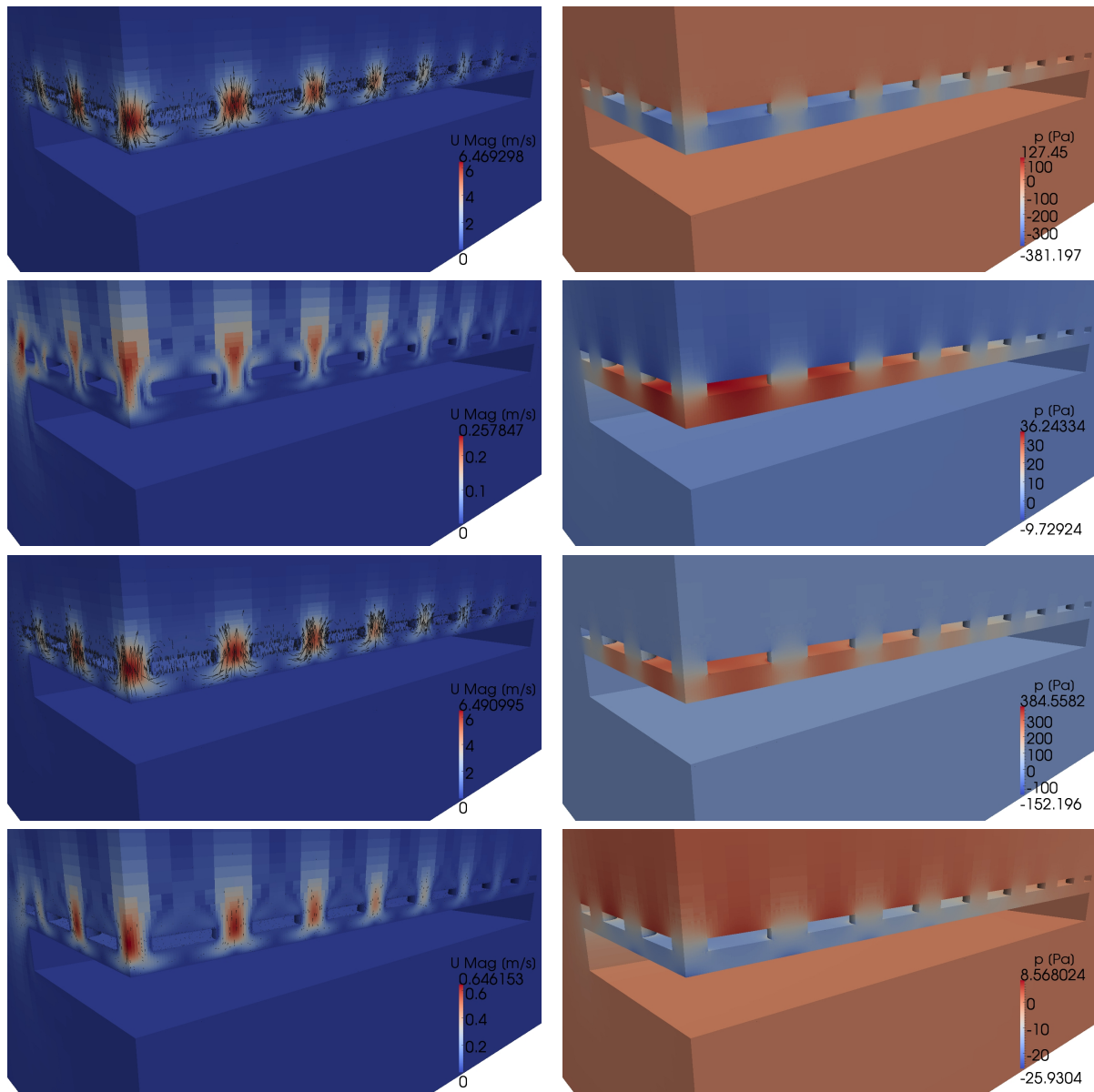


Figura 5: Campos de módulo de la velocidad (izq.) y de presión (der.) para el último ciclo simulado. De arriba a abajo, $(t - 4T)/T = 0, 0.25, 0.5$ y 0.75 .

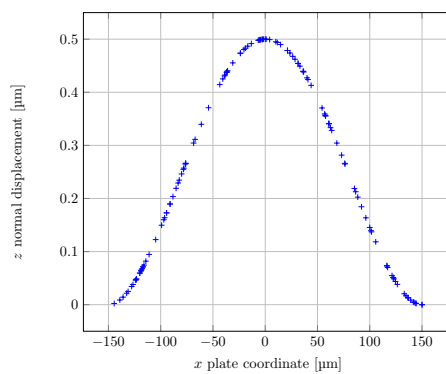


Figura 6: Desplazamiento (virtual) del primer modo que da lugar a la velocidad (impuesta) en el código GBEM.

bajarlo a 64 bits (i.e. en doble precisión). La alternativa de un cómputo de 80 bits en las matrices elementales fue una solución de compromiso para disponer de una precisión alternativa que fuera mayor a la usual de 64 bits cuando se calculan las mismas, pero sin degradar tanto la rapidez de cómputo, e.g. como ocurre con la precisión cuádruple, y fue sugerido parcialmente por la presencia de diversos factores exponenciales en los coeficientes de la función de Green en variable compleja, cuyos argumentos son proporcionales la frecuencia, siendo esta última relativamente elevada en las aplicaciones (del orden de 200 KHz). Por su parte, el subsiguiente ensamblaje y solución degradado a 64 bits fue otra solución de compromiso para ahorrar memoria primaria. La alternativa de precisión variable era preexistente en el código GBEM pero en una forma uniforme, i.e. en todas las variables de tipo real/compleja, mientras que la coexistencia de multiprecisión obligó a la introducción de una larga serie de modificaciones menores en el código. En cuanto a la solución del SEL inicialmente se usó ATLAS-LAPACK (en precisión doble) empero, por un fallo sistemático de memoria en el *solver* ZGESV en el caso de la malla BEM 3 de la Tabla 1, se optó en pasar temporariamente a un *solver* casero del método de Gauss en bloques y con pivotaje parcial, cuyo rendimiento en GFLOPS es el indicado en la misma tabla para cada malla. Se presume que el fallo de ZGESV en la malla 3 se debe a alguna combinación defectuosa en las banderas de compilación (se habían extralimitado un poco las usuales más recomendadas), o bien en recursos en el entorno del usuario (e.g. en el `stack size`).

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos en un análisis de convergencia en malla con 3 mallas BEM, donde la memoria primaria indicada se refiere al esquema de 64-80 bits únicamente porque la diferencia con el caso de 64-64 bits es despreciable. Notar que el esquema de precisión mixta 80-64 bits fue posible incluso con la malla del caso 3 consignado en la Tabla 1 utilizando un Intel Core i7-6700K de 4 GHz, 4 núcleos, y 64 GiB de memoria primaria. La columna referida a una técnica de colocación en los centroides en la Tabla 1 es sólo a los efectos de una comparación de recursos de hardware versus ponderación de Galerkin. La gran diferencia de recursos de hardware requeridos entre las columnas de colocación versus las de ponderación de Galerkin es la situación usual en problemas con dominios 3D modelados con BEM sólo en los contornos, por lo que en esos casos resulta recomendable emplear ponderación de Galerkin nodal en preferencia a la colocación centroidal. En cuanto a los GFLOPS, como una referencia, el HPL benchmark en otra computadora algo similar (Intel Core i7-3930K de 3.20 GHz, 6 núcleos, y 16 GiB de memoria primaria) es del orden de 120 GFLOPS en doble precisión.

malla BEM	nro de nodos	nro de elem.	colocación en centroides (no empleado)	ponderación Galerkin nodal (sí empleado)	sol. LU GFLOPS 64 bits	ensamblaje + solución wall time [h]	
						64-64 bits	80-64 bits
1	8697	17686	42 GiB (0.66)	11 GiB (0.16)	77	1	2
2	13644	27580	103 GiB (1.60)	25 GiB (0.40)	85	2	5
3	20975	42242	240 GiB (3.74)	59 GiB (0.93)	88	7	11

Tabla 1: Mallas BEM empleadas, número de nodos, de elementos, memoria primaria, incluyendo fracciones relativas a 64 GiB, y GFLOPS en la solución (col. 1-6). Además, *wall time* de ensamblaje y solución LU en los esquemas de precisión: (i) 64-64 bits (64 bits en las matrices elementales, en el ensamblaje y solución, col. 7); y (ii) 80-64 bits (80 bits en las matrices elementales, y 64 bits en el ensamblaje y solución, col. 8).

4.3. Factor de calidad

En lo que respecta al factor de calidad Q , además de las estimaciones con **OpenFOAM**[®] y con el código GBEM, se realizó otra serie de simulaciones numéricas basadas también en FVM pero con **Code_Saturne** (?). Así, en la Tabla 2, se listan las estimaciones obtenidas con los 3 métodos, en donde los resultados con el código GBEM incluyen resultados de un estudio de convergencia en malla. El valor de Q obtenido con **OpenFOAM**[®] es $Q \approx 191.57$ mientras que con **Code_Saturne** es $Q \approx 192.00$, quedando ambos por debajo de los predichos con Galerkin BEM, estos últimos monótonamente crecientes cuando se refina la malla, siendo $Q \approx 266.32$ en la malla más refinada (malla 3). Por otro lado, como el factor de calidad Q es el cociente entre la energía total del dispositivo y aquella que disipa al fluido en un ciclo de oscilación entonces, a igual energía total del dispositivo, la discrepancia en el Q puede tomarse como un indicador que la energía disipada por el fluido viscoso predicha con Galerkin BEM (basado en la ecuación de Stokes) es menor que la calculada con FVM (basado en la ecuación de Navier-Stokes). En la convergencia en malla con Galerkin BEM, se vuelve a observar lo mismo, i.e. a medida que se refina la malla la energía disipada disminuye, por lo que el factor de calidad Q crece cuando la malla se refina.

	OpenFOAM [®]	Code_Saturne	GBEM		
nodos placa	405 260 ^(*)	243 898	8 697	13 644	20 975
Q (64-64 bits)	191.57	192.00	247.37	248.07	266.32
Q (80-64 bits)	-	-	247.37	248.07	266.32

(*) Para 1/4 de la placa.

Tabla 2: Análisis de convergencia en malla con GBEM (col. 4-6) versus las estimaciones con **OpenFOAM**[®] (col. 2), y **Code_Saturne** (col. 3), para el factor de calidad Q , tanto con 80-64 bits como con 64-64 bits.

5. CONCLUSIONES

La alternativa de precisión mixta 80-64 bits en GBEM sirvió principalmente para descartar problemas de precisión en el cálculo de las matrices elementales, y, marginalmente, mejorar el número de condición de la matriz del sistema, aunque al precio de prácticamente duplicar el tiempo de cómputo, y sin cambiar el valor del factor de calidad Q . Por otra parte, no se cuentan con resultados analíticos, semianalíticos, o experimentales para este caso, mientras que en el trabajo de referencia de ? predice un factor de calidad $Q \approx 11$, que es un orden de magnitud menor a los obtenidos con **OpenFOAM**[®], **Code_Saturne**, o con el código GBEM. Se observa que ? incluyen una validación del WBEM (por *Wavelet Boundary Element Method*) mediante un caso analítico dado por una placa sin agujeros que vibra en voladizo en su primer modo fundamental (también considerado anteriormente en ?). No obstante, consideraron un único esquema de cálculo sin incluir alguna otra verificación independiente mediante otro método numérico o software, mientras que en el presente trabajo los cálculos tanto con FVM (mediante los códigos **OpenFOAM**[®] o **Code_Saturne**), como con Galerkin BEM (con código GBEM) son completamente independientes, pero coinciden en el orden de magnitud, por lo que se tiene alguna confianza en las presentes estimaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET, proyecto PIP 112-201501-00588CO), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT, proyectos PICT-2014-2660, PICT-2015-2904, PICT-

E-2014-0191, y PICT-2016-0105), Universidad Nacional del Litoral (UNL, proyecto CAI+D 2016 (504-201501-00112-LI)), Universidad Nacional del Comahue (UNCo, proyecto 04/I-215), Universidad Tecnológica Nacional (UTN, proyecto PID-UTN ASUTIFE0004827TC), y ha sido parcialmente realizado con los recursos del *Free Software Foundation/GNU-Project*, tales como GNU–Linux–OS, GNU–GFortran, GNU–Octave, GNU–Git, GNU–Doxygen, y GNU–GIMP, así como otros recursos de código abierto, tales como \LaTeX , PGF, TikZ, y PGFPlots.